

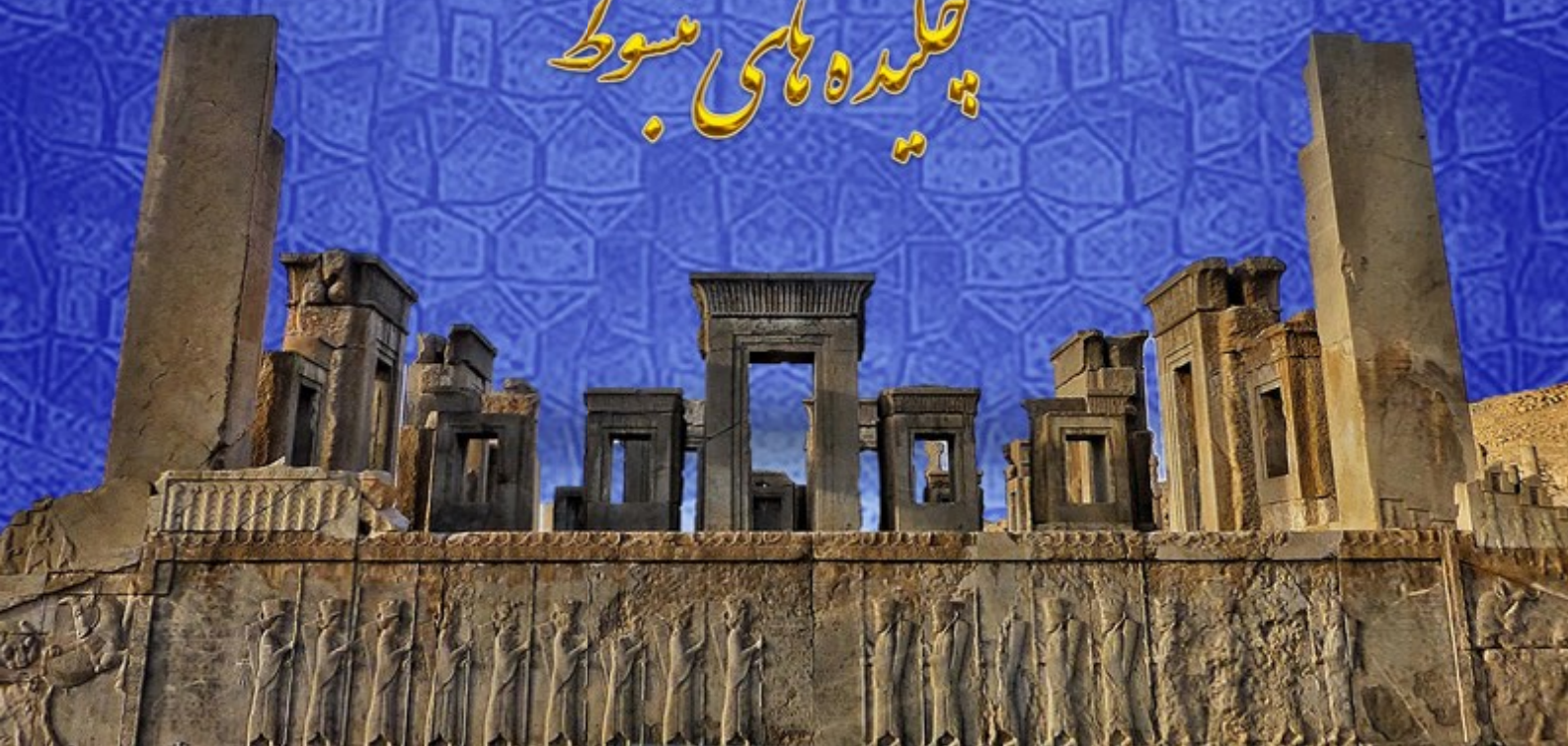


دانشگاه شیراز

نیم قرن کتفرائس ریاضی ایران  
نیم قرن انجمن ریاضی ایران



پیکره‌های مسوط







# پنجاهمین کنفرانس ریاضی ایران

۴ تا ۷ شهریور ۱۳۹۸، دانشگاه شیراز

## چکیده‌های مبسوط

آدرس دبیرخانه: شیراز، چهارراه ادبیات، دانشگاه شیراز، دانشکده علوم، بخش ریاضی

تلفن: ۳۶۱۳۷۲۴۰ (۰۷۱)

دورنگار: ۳۲۲۷۷۱۱۶ (۰۷۱)

ایمیل: [aimc50@shirazu.ac.ir](mailto:aimc50@shirazu.ac.ir)

<http://aimc50.shirazu.ac.ir>





## Organizers



## Sponsors



پایگاه استنادی علوم جهان اسلام





## پیشگفتار

در سال ۱۳۴۹ اولین کنفرانس ریاضی ایران به ابتکار دانشگاه شیراز، توسط این دانشگاه برگزار گردید و از آن به بعد سالانه و تحت هر شرایطی، این کنفرانس توسط دانشگاه‌های ایران و با همکاری انجمن ریاضی ایران به طور مرتب برگزار می‌شود. دانشگاه شیراز افتخار میزبانی اولین، پنجمین، پانزدهمین و بیست و هفتمین کنفرانس ریاضی ایران را داشته و پس از گذشت نزدیک به پنجاه سال از اولین کنفرانس، پنجاهمین کنفرانس ریاضی ایران، در زادگاهش شهر شیراز، توسط دانشگاه شیراز برگزار می‌شود. کنفرانس پنجاهم موید نیم قرن برگزاری موفق کنفرانس‌های ریاضی کشور بوده و همانند اولین کنفرانس و با مساعدت و همکاری همگانی می‌تواند نقطه عطف دیگری در تاریخ ریاضیات ایران بوجود آورد. خروج از قالب‌های سنتی و توجه ویژه به کاربردها و فناوری‌های نوین همچون ریاضیات صنعتی، نظریه اطلاعات کوانتومی، ریاضیات پزشکی، نقش ریاضیات در کارآفرینی و ... در برنامه‌ریزی علمی کنفرانس، می‌تواند منشا تحولات سودمندی در جامعه علمی کشور باشد.

برگزاری بزرگداشت نیم قرن فعالیت انجمن ریاضی ایران، از دیگر برنامه‌های مهم پنجاهمین کنفرانس است و به این مناسبت تعداد بیشتری از صاحب نظران و متخصصان ریاضی کشور از این کنفرانس استقبال کرده و با حضور خود بر بار علمی و فرهنگی آن می‌افزایند. با توجه به نقش ارزنده‌ای که دکتر بهبودیان و مرحوم دکتر منوچهر وصال در پایه‌گذاری کنفرانس ریاضی ایران و پیشبرد ریاضیات کشور داشته‌اند، بزرگداشت این دو بزرگوار، با حمایت بنیاد نخبگان فارس، یکی دیگر از برنامه‌های مهم پنجاهمین کنفرانس است.

پروردگار را سپاس می‌گویم که با همکاری و تلاش مسئولین محترم دانشگاه، انجمن ریاضی ایران، همکاران گرامی در کمیته‌های اجرایی و علمی، پرسنل محترم بخش ریاضی و دانشگاه شیراز و دانشجویان عزیز بخش ریاضی مقدمات برگزاری این کنفرانس فراهم آمد و از زحمات این عزیزان، داوران مقاله‌ها، حامیان کنفرانس و کلیه افرادی که همکاری نمودند تشکر و قدردانی می‌نمایم و امیدوارم این کنفرانس نقش سازنده‌ای در پیشبرد ریاضی کشور داشته باشد. مسلماً در هر همایشی احتمال کاستی وجود دارد؛ از شرکت‌کنندگان گرامی بابت وجود نواقص احتمالی پوزش می‌طلبم.

فرشید عبداللہی  
دبیر پنجاهمین کنفرانس ریاضی ایران



# سازمان کنفرانس

دبیر کنفرانس: دکتر فرشید عبدالمهی

دبیر علمی کنفرانس: دکتر غلامحسین اسلامزاده

دبیر اجرایی کنفرانس: دکتر سیدمرتضی میردهقان اشکذری

## اعضای کمیته علمی

- دکتر اسدالله آقاجانی - دانشگاه علم و صنعت ایران
- دکتر محمدباقر احمدی - دانشگاه شیراز
- دکتر غلامحسین ارجایی - دانشگاه شیراز
- دکتر مجید ارشاد - دانشگاه شیراز
- دکتر غلامحسین اسلام زاده - دانشگاه شیراز
- دکتر چنگیز اصلاچی - دانشگاه شهید بهشتی
- دکتر ایمان افتخاری - پژوهشگاه دانش های بنیادی
- دکتر فرامرز تهمتنی - دانشگاه شیراز
- دکتر بهرام خانی رباطی - دانشگاه شیراز
- دکتر حسن دقیق - دانشگاه کاشان
- دکتر جلیل رشیدی نیا - دانشگاه علم و صنعت ایران
- دکتر محمدرضا رفسنجان‌ی صادقی - دانشگاه صنعتی امیرکبیر
- دکتر مجید سلیمانی دامنه - دانشگاه تهران
- دکتر حبیب شریف - دانشگاه شیراز
- دکتر محمدحسن شیردره حقیقی - دانشگاه شیراز
- دکتر امید علی شهنی کرمزاده - دانشگاه شهید چمران اهواز
- دکتر بهمن طباطبائی - دانشگاه شیراز
- دکتر علیرضا عبدالمهی - دانشگاه اصفهان
- دکتر علیرضا فخازاده - دانشگاه صنعتی شیراز
- دکتر سید محمد باقر کاشانی - تربیت مدرس
- دکتر سعید کریمی - دانشگاه خلیج فارس بوشهر
- دکتر زهرا گویا - دانشگاه شهید بهشتی
- دکتر مژگان محمودی - دانشگاه شهید بهشتی
- دکتر عبادالله محمودیان - دانشگاه صنعتی شریف
- دکتر محمد رضا مولایی - دانشگاه شهید باهنر کرمان
- دکتر داود میرزایی - دانشگاه اصفهان
- دکتر رسول نصر اصفهانی - دانشگاه صنعتی اصفهان
- دکتر علیرضا نعمت الهی - دانشگاه شیراز
- دکتر سید منصور واعظ پور - دانشگاه صنعتی امیر کبیر
- دکتر بهنام هاشمی - دانشگاه صنعتی شیراز
- دکتر کریم هدایتیان - دانشگاه شیراز

### اعضای شورای سیاست گذاری

- دکتر محمدباقر احمدی
- دکتر غلامحسین اسلام زاده
- دکتر بهرام خانی رباطی
- دکتر امیر پیروی
- دکتر فرامرز تهمتنی
- دکتر حبیب شریف
- دکتر محمدحسن شیردره حقیقی
- دکتر فرشید عبدالهی
- دکتر محمد رضا عبودی
- دکتر محمدرضا فرهنگ دوست
- دکتر سیدمرتضی میردهقان اشکذری
- دکتر اشکان نیک سرشت
- دکتر کریم هدایتیان

### اعضای کمیته اجرائی

- دکتر افشین امینی
- دکتر بابک امینی
- دکتر امیر پیروی
- دکتر محسن تقوی
- دکتر شهره نمازی
- دکتر محمد رضا عبودی
- دکتر فاطمه علینقی پور
- دکتر محمدرضا فرهنگ دوست
- دکتر معصومه فقیه احمدی
- دکتر علیرضا کاظمی
- دکتر سیدمرتضی میردهقان اشکذری
- دکتر اشکان نیک سرشت
- دکتر بهمن احمدی

### عوامل اجرایی:

**خانم‌ها** راضیه بهبود، معصومه چابکی، مهشید یار محمدی، نگار عدالتی تزنگی، حکیمه محمودی، اسماء نمازی، زهرا واثقی، الهه نیک آئین، انسیه روستا، الهه سلطانی، دیبا امین شایان، ناهید صارم سنگری، فاطمه پیرایش دهکردی، نوشین قادری، پرستو عالی منش، فاطمه غلام پور، سحر پور حسنی، رها پویان مهر، الهه پور رضایی، نگار آهنگران، صدف عبدالهی، مریم همایونی، زهرا طاهری، فاطمه نجاتی، فاطمه سادات تقوی، سمانه کرمی، سعیده نسیمی، فرانک گلریزخاتمی، ستاره سعادت، صدیقه رئیسی، سلما حسن نژاد، اظهر امید، مریم صالحی و مرضیه بیگی خرمایی

**آقایان** احسان اسکندری، میلاد معظمی گودرزی، محمد کارگر، رهام کمندی، پارسا قاسمی، محمدرضا حسین زاده، امیرمحمد غضنفری، رضا بهزادی، عبدالرضا ارمان، احمدرضا معافیان، محمدرضا چنگلوایی، صادق مرآتی، علی رهایی، رضا دست بسته، حسین فارسیمدان، احمد رضا عطاری پل سنگی، مهدی نادری، محمد نامه گشای فرد، محمد شهبازی، رامتین الهی، محمدهادی شکرریز و وحید غواصی

## شرکت‌کنندگان در کنفرانس

نام	نام خانوادگی	موسسه/دانشگاه
Vladimir	Muller	Czech Academy of Sciences
Siegfried	Rump	Hamburg University of Technology
بهاره	ابراهیمی	دانشگاه شهید باهنر کرمان
ندا	ابراهیمی	دانشگاه شهید باهنر کرمان
حامد	ابراهیمی	علوم پایه گیلان
علی	ابراهیمی جهان	امیرکبیر (پلی تکنیک)
حمیدرضا	ابراهیمی ویشکی	دانشگاه فردوسی مشهد
مجید	ابریشمی مقدم	دانشگاه آزاد اسلامی واحد بیرجند
آسیه	ابطحی	دانشگاه شیراز
زبیر	احمد	دانشگاه یزد
سیده ریحانه	احمدزاده	دانشگاه شاهد
محمدباقر	احمدی	دانشگاه شیراز
بهمن	احمدی	دانشگاه شیراز
خدیجه	احمدی آملی	دانشگاه پیام نور
حسین	احمدیان مقدم	حکیم سبزواری
فضه	اختری فر	ارومیه
پرستو	ادهمی	دانشگاه هرمزگان
کیان	ادیب غیاثی	شهید بهشتی
غلامحسین	ارجانی	Shiraz University
مریم	اردشیری لردجانی	دانشگاه آزاد تهران شمال
مجید	ارشاد	Shiraz
عبدالرضا	ارمکان	دانشگاه شهید باهنر کرمان
ابراهیم	اژدری	دانشگاه سلمان فارسی کازرون
الهام	اسدالهی فرد	دانشگاه صنعتی شیراز
احسان	اسکندری	دانشگاه شیراز
الناز	اسگویی	دانشگاه صنعتی ارومیه
غلامحسین	اسلام زاده	شیراز
اسفندیار	اسلامی	دانشگاه شهید باهنر کرمان
زهره	اسلامی گیسکی	دانشگاه آزاد اسلامی سیرجان
محمد علی	اسم خانی	دانشگاه زنجان
مهین	اسماعیلی	دانشگاه شهید باهنر کرمان
حسین	اشراقی	دانشگاه کاشان
سید علی رضا	اشرفی	دانشگاه کاشان
سید امین	اصفهانی	دانشگاه دامغان
سعید	اعظم	دانشگاه اصفهان
سید سجاد	اعلایی اندبیلی	دانشگاه شاهد تهران
ایمان	افتخاری	پژوهشگاه دانش‌های بنیادی
لیلا	افتخاری	تربیت مدرس
عباس	افتخاریان	هرمزگان
مرضیه	افرازنده	دانشگاه شیراز
ابراهیم	اکبرگلو	دانشگاه فرهنگیان
محبوبه	اکبرپور	دانشگاه هرمزگان
بنفشه	اکبری	دانشگاه صنعتی سهند تبریز
نجمه	اکبری	دانشگاه صنعتی اصفهان



نام خانوادگی	نام	موسسه/دانشگاه
اکرمی ابرقویی	محمد حسین	دانشگاه یزد
الفتی	علیرضا	دانشگاه یاسوج
الماس پور	زهرا	یزد
الهی	رامتین	شیراز
الیاسی	نیره	دانشگاه خوارزمی
الیاسی	مهتاب	دانشگاه حکیم سبزواری
امیاری	مریم	دانشگاه آزاد اسلامی، واحد مشهد
امیدی	محمد رضا	دانشگاه صنعتی کرمانشاه
امیدی	اطهر	دانشگاه شیراز
امیری	حبیب	دانشگاه زنجان
امیری خراسانی	وحید	امیرکبیر
امین شایان جهرمی	دیبا	دانشگاه شیراز
امینی	بابک	دانشگاه شیراز
امینی	افشین	دانشگاه شیراز
امینی فارسانی	زهرا	دانشگاه لرستان
انصاری	هاجر	دانشگاه صنعتی امیرکبیر
انصاری اردلی	علی	دانشگاه شهرکرد
ایران زاد آقامیلو	فاطمه	دانشگاه تبریز
ایرانمنش	علی	
ایلاتی	محمد	دانشگاه صنعتی سهند تبریز
ایوانی	سارا	دانشگاه رازی
آبکار	علی	دانشگاه بین المللی امام خمینی
آتش افروز	منا	دانشگاه صنعتی امیرکبیر
آتش پیکر	پروانه	دانشگاه بناب
آذری	مهدیه	دانشگاه آزاد اسلامی واحد کازرون
آرزومند	مجید	مجتمع آموزش عالی لارستان
آرمندزاد	علی	دانشگاه ولی عصر عجل رفسنجان
آرین نژاد	مسعود	دانشگاه زنجان
آزادی خوی	معصومه	شیراز
آقاجانی	اسدالله	Tarbiat Modares University
آهنگران	نگار	دانشگاه شیراز
آیت ... زاده شیرازی	فاطمه	دانشگاه تهران
بابائی	افشین	دانشگاه مازندران
بابلیان	اسمعیل	دانشگاه خوارزمی
بازرگان	فاطمه	دانشگاه تحصیلات تکمیلی صنعتی و فناوری پیشرفته کرمان
بازیار	محمد	دانشگاه یاسوج
باغانی	امید	دانشگاه حکیم سبزواری
باقرپورفرد	مینا	دانشگاه فردوسی مشهد
باقری قلعه نوئی	زهرا	دانشگاه تربیت مدرس
بختیاری	حسن	دانشگاه شهید باهنر کرمان
بختیاری	سمانه	انجمن ریاضی ایران
براتی	علی	دانشگاه رازی کرمانشاه
براتی	زهرا	کوثر بجنورد
برسم	حسن	دانشگاه جیرفت
برغمندی	اسماعیل	حکیم سبزواری
بروغنی	رضا	حکیم سبزواری
برید لقمانی	قاسم	

نام	نام خانوادگی	موسسه/دانشگاه
مرتضی	بنی اسد آزاد	دانشگاه صنعتی امیرکبیر
راضیه	بهبود	شیراز
جواد	بهبودیان	دانشگاه شیراز
مجتبی	بهرامیان	دانشگاه کاشان
مهدی	بهزاد	دانشگاه شهید بهشتی
رضا	بهزادی	دانشگاه شیراز
عرفان	بهمنی	دانشگاه زنجان
ابوالفضل	بهمنی	دانشگاه زنجان
جعفر	بی ازار	گیلان
اکرم	بی باک هفشجانی	دانشگاه ولی عصر رفسنجان
مولود	بیات	انجمن ریاضی ایران
رضا	بیات تاجور	پیام نور
مسعود	بیرامی امینلوئی	دانشگاه صنعتی شریف
محمد	بیرانوند	دانشگاه لرستان
رضا	بیرانوند	دانشگاه لرستان
مرضیه	بیگی خرمایی	دانشگاه شیراز
احمد	پارسیان	دانشگاه تهران
شیلا	پرکار	دانشگاه شهید چمران اهواز
پریا	پرویز	علوم تحقیقات تهران
سمیه	پوراحمدی	دانشگاه باهنر کرمان
مرضیه	پوریابایی	دانشگاه کاشان
سحر	پورحسینی	دانشگاه شیراز
الهه	پوررضایی	دانشگاه شیراز
محمد رضا	پوریای ولی	دانشگاه اصفهان
رها	پویان مهر	شیراز
فاطمه	پیرایش دهکردی	دانشگاه شیراز
امیر	پیروی	شیراز
خاطره	تراوش	دانشگاه شیراز
ثریا	ترکمن	دانشگاه یزد
محمد	تفکری بافقی	یزد
عاطفه	تقوی	دانشگاه تحصیلات تکمیلی و فناوری صنعتی کرمان
محسن	تقوی	دانشگاه شیراز
فاطمه سادات	تقوی	دانشگاه شیراز
علی	تقوی راد	دانشگاه تربیت مدرس
فرامرز	تهمتنی	دانشگاه شیراز
فائزه	توتونیان	فردوسی مشهد
علی محمد	توکلی	آموزش و پرورش فارس
هانیه	توکلی پور	صنعتی امیرکبیر
مگردیچ	تومانیان	فرهنگستان علوم
پونه	تیموری	دانشگاه شهید بهشتی
حسین	تیموری فعال	دانشگاه علامه طباطبائی
سمیرا	ثابتی	دانشگاه سمنان
محسن	جان نثاری لادانی	مرکز آموزش عالی شهرضا
علی	جانمحمدی	دانشگاه سمنان
مرتضی	جعفرزاده	دانشگاه حکیم سبزواری
حسنا	جعفرمش	دانشگاه حکیم سبزواری
فروغ	جعفری	دانشگاه آزاد اسلامی شیراز

نام	نام خانوادگی	موسسه/دانشگاه
راحله	جعفری جزه	دانشگاه خوارزمی
مریم	جلالی	علوم پایه دامغان
محمد	جلوداری ممقانی	علامه طباطبائی
علی	جمالیان	دانشگاه گیلان
مریم	جهانگیری	دانشگاه خوارزمی
حسین	جواد پور	شهید باهنر کرمان
فاطمه	جوادی	دانشگاه صنعتی شیراز
سمیه	جوانی	خلیج فارس
میثم	جوزی	دانشگاه خلیج فارس بوشهر
معصومه	چابکی	دانشگاه شیراز
الهام	چاکرالحسینی ابرقویی	یزد
طیبه	چراغ زاده چالشتی	دانشگاه شهرکرد
محمدرضا	چنگلویی	شیراز
سیدحمید	حاجی سید جوادی	دانشگاه شاهد
سلما	حسن نژاد	صنعتی شیراز
حسین	حسین پور	دانشگاه علم و صنعت ایران-تهران
سلیمان	حسین پور	دانشگاه صنعتی شاهرود
حمیده	حسین دوست	امیرکبیر
محمدرضا	حسین زاده	دانشگاه شیراز
زهرا سادات	حسینی	بوعلی سینا
حسین	حسینی گیو	دانشگاه سیستان و بلوچستان
دتیا	حقیقی	دانشگاه بین المللی امام خمینی قزوین
آرش	حیاتی	دانشگاه شهید چمران اهواز
مجید	حیدرپور	دانشگاه زنجان
محمدتقی	حیدری	دانشگاه یاسوج
محسن	خالقی مقدم	دانشگاه علوم کشاورزی و منابع طبیعی ساری
فاطمه	خالویی	دانشگاه شهید باهنر کرمان
صدیقه	خانزاده	دانشگاه صنعتی شیراز
نیما	خانی پور	دانشگاه شیراز
بهرام	خانی رباطی	دانشگاه شیراز
علی	ختن لو	دانشگاه شیراز
داود	خجسته سالکویه	دانشگاه گیلان
صغری	خزایی	شاهد تهران
بهنام	خسروی	دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان
بهمن	خسروی	دانشگاه صنعتی قم
رقیه	خسروی	دانشگاه فسا
زهرا	خسروی	یزد
مریم	خسروی	دانشگاه باهنر کرمان
شهلا	خلیفه	دانشگاه یزد
قربان	خلیل زاده رنجبر	دانشگاه بوعلی سینا
امیر	خمسه	دانشگاه خوارزمی
مرضیه	خواجه پور	دانشگاه خوارزمی
کاووس	خورشیدیان	دانشگاه شیراز
مینو	خوش اقبال قرابایی	دانشگاه خلیج فارس
نگین	خوینی ها	دانشگاه تربیت مدرس
علی	دادخواه	دانشگاه فردوسی مشهد
زهره	دادی	بجنورد



نام خانوادگی	نام	موسسه/دانشگاه
دارا	محمد	علم و صنعت ایران
دارابی	مرضیه	دانشگاه فنی مهندسی گلپایگان
دارکوتی	مهسا	دانشگاه صنعتی شاهرود
دالوند	زینب	شهید بهشتی
دانایی	علی	دانشگاه صنعتی لافبرو انگلستان
داوطلب علیائی	فریده	دانشگاه کاشان
درخش	پژمان	دانشگاه یاسوج
درخشان	کبری	سیستان و بلوچستان
درفشه	محمدرضا	University of Tehran
دست پسته	رضا	SFU
دلک آبادی	مرضیه	حکیم سبزواری
دلیری بیرجندی	محمد حسین	دانشگاه فنی و حرفه ای بیرجند
دهداری پور	محمدرضا	دانشگاه شیراز
دهستانی	هانیه	الزهر
دهقان	امیدرضا	دانشگاه بجنورد
دهقان	محمد علی	ولی عصر رفسنجان
دهقانیان	مهدی	دانشگاه صنعتی سیرجان
دوستی	مرضیه	مازندران
دیده ور	فرزاد	دانشگاه امیرکبیر
ذبیحی	فاطمه	دانشگاه کاشان
رازقی مله	مهران	دانشگاه مازندران
راشدی	فاطمه	دانشگاه ولایت ایرانشهر
راعی	مرضیه	دانشگاه صنعتی مالک اشتر اصفهان
رباط سرپوشی	مریم	دانشگاه حکیم سبزواری
رجبی	هانیه	دانشگاه حکیم سبزواری
رجبی	ستاره	دانشگاه تحصیلات تکمیلی در علوم پایه زنجان
رحمانی جعفریگی	راهام	یزد
رحمانی دوست	محمدحسین	دانشگاه نیشابور
رحیمی	محمد رضا	پیام نور تهران شرق
رحیمیان	فروزان	دانشگاه صنعتی ارومیه
رستمی	اسماعیل	دانشگاه شهید باهنر کرمان
رسولی	سعید	دانشگاه خلیج فارس
رسولی زاده	محمد نواز	دانشگاه ولایت
رشیدی	حمیده	دانشگاه سیستان و بلوچستان
رشیدی	فرح	شهرکرد
رشیدی نیا	جلیل	دانشگاه علم و صنعت ایران
رضا پور	شهرام	دانشگاه شهید مدنی آذربایجان
رضاخانلو	مژگان	دانشگاه تربیت مدرس
رضایی بروجنی	آسیه	دانشگاه تحصیلات تکمیلی صنعتی و فناوری پیشرفته کرمان
رضائیان	رمضان	دانشگاه آزاد اسلامی واحد نور
رفیع پور	ابوالفضل	شهید باهنر کرمان
رمضان نسب	مجتبی	دانشگاه خوارزمی
رضانی	پردیس	دانشگاه پیام نور
رضانی	سید مهرباب	دانشگاه یاسوج
رهائی	علی	دانشگاه شیراز
روپایی	هادی	دانشگاه ولی عصر رفسنجان
روزگار	سید روح الله	دانشگاه یاسوج

نام	نام خانوادگی	موسسه/دانشگاه
انسیه	روستا	دانشگاه شیراز
یاسر	روشن	تحصیلات تکمیلی زنجان
زینب	روغنی عراقی	دانشگاه یزد
جمال	رویین	دانشگاه تحصیلات تکمیلی زنجان
منیره	ریاحی	دانشگاه دامغان
مهدی	ریاضی کرمانی	
ساناز	ریواز	شهید باهنر کرمان
عظیم	ریواز	
غفار	رئیزی	Shahrekord University
ماجد	رئیزی	دانشگاه سیستان و بلوچستان
صدیقه	رئیزی	دانشگاه شیراز
حسین	زارع	دانشگاه تربیت مدرس
رحیم	زارع نهندي	دانشگاه تهران
محبوبه	زارعی	حکیم سبزواری
بهنام	زرپاک	شاهد
جعفر	زعفرانی	شیخ بهایی
سمیه	زنگویی زاده	دانشگاه شهید باهنر کرمان
محسن	زهرائی	دانشگاه آزاد اسلامی واحد اهواز
عباس	زیوری کاظم پور	دانشگاه ایت ا... بروجردی
محسن	ژولانژاد	دانشگاه شهید چمران اهواز
عباس	سالمی پاریزی	دانشگاه شهید باهنر کرمان
محمد رسول	سام خانیانی	مرکز تحصیلات تکمیلی پیام نور تهران
محمد اسماعیل	سامعی	دانشگاه بوعلی سینا
مسعود	سبزواری	شهرکرد
محمد رضا	سپهری	دانشگاه شیراز
مجتبی	سجادمنش	دانشگاه پناپ
عطیه	سرائی	دانشگاه آزاد مشهد
ستاره	سعادت	شیراز
زینب	سعیدیان طریی	دانشگاه کاشان
فهیمة	سفیدفرد	شهید باهنر کرمان
شیوا	سلاح ورزی	دانشگاه زنجان
سمیه	سلطانپور	دانشگاه صنعت نفت
الهه	سلطانی	شیراز
حسین	سلطانی مقدم	
حسین	سلمه ای	ولی عصر(عج) رفسنجان
لیلا	سلیمانی	دانشگاه بیرجند
مجید	سلیمانی دامنه	دانشگاه تهران
منیژه	سلیمی	دانشگاه فرهنگیان
اسماء	سهوئی	دانشگاه ولایت ایرانشهر
مریم السادات	سیدزاده یزدی	دانشگاه صنعتی مالک اشتر اصفهان
مریم	سیف الدینی	دانشگاه گیلان
مهرداد	سیلانی	جهاد دانشگاهی خوزستان
ارسلان	شادمان	دانشگاه تهران
شکوه	شاه بیک	دانشگاه غیاث الدین جمشید کاشانی
محسن	شاه حسینی	دانشگاه آزاد اسلامی واحد شهر قدس
مریم	شاه سیاه	دانشکده ریاضی و کامپیوتر خوانسار
پریسا	شاهدی	دانشگاه صنعتی شیراز

نام	نام خانوادگی	موسسه/دانشگاه
سیدابوالفضل	شاهزاده فاضلی	دانشگاه یزد
مریم	شرفی	دانشگاه شیراز
حبیب	شریف	دانشگاه شیراز
جواد	شریف پیرانی	حکیم سبزواری
مهدی	شریف زاده	دانشگاه یاسوج
فریده السادات	شریفی	دانشگاه صنعتی اصفهان
ابوالفضل	شعبانی	دانشگاه شهید بهشتی
زهرا	شعبانی	دانشگاه سیستان و بلوچستان
محدثه	شفیعی سروستانی	شاهد
امینه	شکرامیز	صنعتی امیرکبیر
محمد هادی	شکرریز	شیراز
محمود	شکوری	دانشگاه لرستان
مریم	شمس سولاری	دانشگاه پیام نور
افسانه	شمسکی	دانشگاه دامغان
محمد	شهبازی	دانشگاه شیراز
امید علی	شهنی کرم زاده	شهید چمران اهواز
محبوبه	شیخ نیا	سراسری نقرش
محمد	شیرازیان	دانشگاه نیشابور
محمدحسن	شیردره حقیقی	شیراز
فرخ	شیرژیان	دانشگاه تربیت مدرس
فاطمه	شیرمحمدزاده	دانشگاه مازندران
اکرم	صادقی	انجمن ریاضی ایران
ناهید	صارم سنگری	امیرکبیر
مریم	صالحی	دانشگاه شیراز
نیلوفر	صالحی مکاری	دانشگاه تربیت مدرس
صفا	صالحیان	صنعتی شاهرود
مجتبی	صداقت جو	دانشگاه خلیج فارس
نسرین	صدری	صنعتی اصفهان
احمد	صفاپور	ولی عصر رفسنجان
مژده	صفری زاده	فردوسی مشهد
عرفان	صلواتی	دانشگاه صنعتی ایرکبیر
فریده	صمدیان	انجمن ریاضی ایران
مرضیه	صیادی شهرکی	دانشگاه شهرکرد-بنیاد ملی نخبگان
حدیثه	صدی	دانشگاه تربیت مدرس
بهرام	طارمی	دانشگاه شیراز
فاطمه	طالقانی	شیراز
مصطفی	طامندی	دانشگاه ولی عصر رفسنجان
علی	طاهرخانی	دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان
نرگس	طاهری	دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب
سید قهرمان	طاهریان	دانشگاه صنعتی اصفهان
بهمن	طباطبایی شوریجه	دانشگاه شیراز
بنفشه	طهماسبی اشتیانی	دانشگاه آزاد اسلامی - علوم و تحقیقات تهران
جواد	طیبری	دانشگاه تبریز
علی	ظفری	دانشگاه پیام نور
اعظم	ظهرانی	دانشگاه مازندران
بیژن	ظهوری زنگنه	صنعتی شریف
سعیده	ظهیری	مرکز آموزش عالی اقلید



نام	نام خانوادگی	موسسه/دانشگاه
ایوب	عابدینی کابدول	دانشگاه تبریز
رضا	عابدینی نسب مهاجری	ولی عصر رفسنجان (عج)
رسول	عاشقی حسین آبادی	دانشگاه صنعتی اصفهان
پرستو	عالی منش	دانشگاه شیراز
مختار	عباسی	دانشگاه قم
مریم	عباسی هرمزی	دانشگاه یاسوج
علیرضا	عبداللهی	دانشگاه اصفهان
عاطفه	عبداله ابیانه	دانشگاه خوارزمی
محمد	عبداله زاده بالانجی	صنعتی ارومیه
فرشید	عبدالهی	شیراز
صدف	عبدالهی	دانشگاه شیراز
الهام	عبدالهی اصل	یاسوج
منا	عبدی	دانشگاه صنعتی شاهرود
محمد رضا	عبودی	دانشگاه شیراز
نگار	عدالتی	دانشگاه شیراز
علی	عزیزی مایوان	محقق اردبیلی
عباس	عسکری زاده	دانشگاه ولی عصر (عج)
مهدی	عسکری صیاح	دانشگاه صنعتی امیرکبیر
زهرا	عسگری	خوارزمی تهران
احمد رضا	عطاری پل سنگی	دانشگاه شیراز
محمد رضا	عظیمی	دانشگاه مراغه
سید جواد	علوی گوشکجانی	دانشگاه گیلان
مریم	علی پور	دانشگاه سیستان و بلوچستان
رجب	علی پور	دانشگاه شهید مدنی آذربایجان
موسی	علی پور زنوزی	
محسن	علی نژاد	فردوسی مشهد
ستار	علیزاده	دانشگاه آزاد واحد مرند
رحیم	علیزاده	دانشگاه شاهد
محبوبه	علیزاده صنعتی	گلستان
کسری	علیشاهی	دانشگاه صنعتی شریف تهران
داود	علیمحمدی	دانشگاه اراک
هاجر	علیمراد	جهرم
فاطمه	علینقی پور تکلیمی	دانشگاه شیراز
بهناز	عمومی	دانشگاه صنعتی اصفهان
امیر محمد	غضنفری	دانشگاه شیراز
علی	غفارپناه	سلمان فارسی کازرون
فرنوش	غفارپور گل سفیدی	دانشگاه خوارزمی
کوثر	غفله مرمضی	دانشگاه آزاد اسلامی واحد اهواز
فاطمه	غلام پور	دانشگاه شیراز
فرانک	غلامپور	دانشگاه صنعتی شیراز
مصطفی	غلامی	دانشگاه تحصیلات تکمیلی در علوم پایه زنجان
آزاده	غنی فرد	دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
وحید	غواصی	شیراز
حسین	فارسیمدان	شیراز
سمیه	فاضلی	دانشگاه تبریز
مهدیه	فاطمی دخت	دانشگاه باهنر کرمان
علیرضا	فخارزاده چهارمی	صنعتی شیراز

نام	نام خانوادگی	موسسه/دانشگاه
بهشید	فخرکاظمی بجستانی	دانشگاه مازندران
محمدرضا	فدائی	دانشگاه شهید باهنر کرمان
غزاله	فرجام	دانشگاه شهید بهشتی
فرزانه	فردوسی	مرکز آموزش عالی فیروزباد
ملیحه	فرضی هارمی	صنعتی شیراز
اسماعیل	فرهادی	دانشگاه شیراز
محمدرضا	فرهنگ دوست	دانشگاه شیراز
فرید	فروغی	خلیج فارس
ابوالحسن	فریدونی	ایلام
حسین	فضائلی مقیمی	دانشگاه بیرجند
امین	فقیه	صنعتی سهند
معصومه	فقیه احمدی	دانشگاه شیراز
هانیه	فلاح اسلاملو	صنعتی امیرکبیر
میلاد	فهیمی	دانشگاه سمنان
مهرداد	فولادی	دانشگاه شیراز
سمیه	فولادی	دانشگاه شهرکرد
نوشین	قادری	دانشگاه شیراز
مینا	قاسمی	دانشگاه صنعتی شیراز
هادی	قاسمی	آموزش و پرورش شهرستان فیروزه
پارسا	قاسمی	شیراز
روح اله	قائدی	دانشگاه صنعتی شیراز
کریم	قدیمی	دانشگاه پیام نور
ناهید	قراخانلو	دانشگاه غیاث الدین جمشید کاشانی
محبوبه	قشونی	دانشگاه زنجان
سعید	قهرمانی	Western New England University
هاجر	قهرمانی گل	دانشگاه شاهد
علیرضا	قورچی زاده	دانشگاه بیرجند
مجتبی	قیراطی	دانشگاه یاسوج
فائزه	کارگر	سلمان
محمد	کارگر	دانشگاه شیراز
علیرضا	کاظمی	دانشگاه شیراز
غلامرضا	کرمعلی	دانشگاه علوم و فنون هوایی شهید ستاری
سمانه	کرمی	شیراز
سارا	کرنگیش	دانشگاه سیستان و بلوچستان
سعید	کریمی	خلیج فارس
زهرا	کریمی	دانشگاه شهرکرد
یوسف	کریمی	دانشگاه صنعتی اصفهان
لطف اله	کریمی	دانشگاه صنعتی همدان
میلاد	کریمی	دانشگاه صنعتی سهند
آزاد	کسنزانی	دانشگاه کردستان
زهرا	کشت کار	شهید چمران اهواز
زهرا	کمالی	آزاد اسلامی واحد شیراز
رهام	کندی	علم و صنعت ایران
داریوش	کیانی	دانشگاه صنعتی امیرکبیر
رضا	کیخایی	خوانسار
مجید	گازر	صنعتی اصفهان
مهديه	گل بشمنی مقدم	دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)

نام	نام خانوادگی	موسسه/دانشگاه
آذین	گل بهاران	دانشگاه خوارزمی
فرانک	گلریز خاتمی	یاسوج
زینب	گلی نژاد	ولیعصر رفسنجان
فرانک	گودرزی	دانشگاه کاشان
لیلا	گودرزی	دانشگاه آیت الله بروجردی (ره)
زهرا	گویا	شهید بهشتی
ساناز	لامعی	دانشگاه گیلان
مینا	لطفی	تربیت مدرس
مریم	لطفی پور	دانشگاه فسا
فاطمه	لعل دولت آباد	Buein zahra technical university
پروانه	لولو	دانشگاه صنعتی خاتم الانبیا بهبهان
اکرم	لیاس پور	خلیج فارس
ماشاالله	ماشین چی	دانشگاه باهنر کرمان
ماشاءاله	متین فر	مازندران
محمد حسن	مجتبایی	دانشگاه صنعتی شیراز
مهرناز	محبی	دانشگاه صنعتی شیراز
محمود	محسنی مقدم	دانشگاه شهید باهنر کرمان
مرتضی	محمدنژاد کیاسری	مازندران بابلسر
مریم	محمدی	دانشکده فنی و مهندسی دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تهران جنوب
سید عباس	محمدی	دانشگاه یاسوج
ندا	محمدی	دانشگاه فردوسی مشهد
سجاد	محمدی	دانشگاه ارومیه
نیما	محمدی	دانشگاه فرهنگیان
ندا	محمدی	دانشگاه شهرکرد
مژگان	محمودی	شهید بهشتی
یعقوب	محمودی	دانشگاه آزاد واحد تبریز
حکیمه	محمودی	شیراز
حدیث	محمودی برام	دانشگاه کاشان
عبادالله	محمودیان	صنعتی شریف
امیرحسین	مختاری	دانشکده فنی و مهندسی فردوس، دانشگاه بیرجند
رضا	مختاری	دانشگاه صنعتی اصفهان
علی	مرادزاده دهکردی	University of Shahreza
زینب	مرادی	دانشگاه یزد
مرجان	مرادی	دانشگاه گرگان
صادق	مرآتی	شیراز
زهرة	مستقیم	علم و صنعت ایران
مریم	مسعودی آرانی	دانشگاه کاشان
سمیرا	مسگری	بین المللی امام خمینی قزوین
فاطمه	مطیع اله	شیراز
حمید	مظاهری تهرانی	یزد
احمد رضا	معافیان	دانشگاه شیراز
علی	معدن کن	دانشگاه یزد
میلاد	معظمی گودرزی	دانشگاه شیراز
مریم	معماری	دانشگاه شیراز
عزیزالله	معماریانی	دانشگاه خوارزمی
شیرین	معین	دانشگاه صنعتی اصفهان
حلیمه	مقبلی دامنه	دانشگاه جیرفت

نام	نام خانوادگی	موسسه/دانشگاه
فرشته	ملک	دانشگاه خواجه نصیر طوسی
محمد جواد	ملکی	حکیم سبزواری
زهره	ملکی	دانشگاه صنعتی شیراز
حسن	ملکی	دانشگاه ملایر
زهره	ملکی	صنعتی اصفهان
طاهره	منوچهری	شیراز
نظام الدین	مهدوی امیری	دانشگاه صنعتی شریف
مهدی	مهدی زاده	دانشگاه حکیم سبزواری
محمد	مهدیان	Google Research Center, USA
سمیرا	مهرانگیز	شیراز
احسان	موحدنیا	دانشگاه یزد
فاطمه	موذن	دانشگاه کاشان
حمید	موسوی	دانشگاه تبریز
سید اصغر	موسوی	دانشگاه ولی عصر (عج)
محمد	موسی خانی	دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی
ساناز	میرانشاهی	دانشگاه خوارزمی
سید مرتضی	میردهقان	دانشگاه شیراز
حنیف	میرزائی	دانشگاه صنعتی سهند
مرتضی	میرزائی ازندریانی	دانشگاه قم
پریسا	میرسلیمانی	دانشگاه یزد
آمنه سادات	میرنیام	دانشگاه شیراز
مهدی	نادری	دانشگاه شیراز
مهری	ناصحنی	دانشگاه صنعتی اصفهان
نقیسه	ناصری شمس	دانشگاه صنعتی شیراز
عذرا	ناصریان	دانشگاه آزاد زنجان
مهران	نامجو	دانشگاه ولی عصر (عج)
مهرداد	نامداری	دانشگاه شهید چمران اهواز
محمد	نامه گشای فرد	دانشگاه شیراز
عارفه	نبوی	دانشگاه صنعتی اصفهان
ایرج	نبی پور	دانشگاه علوم پزشکی بوشهر
فاطمه	نجاتی	دانشگاه خوارزمی
امیر همایون	نجاح	شهید بهشتی
مهدی	نجفی کلیانی	ولی عصر (عج) رفسنجان
افسانه	نژادزاده	دانشگاه پیام نور اهواز
سعیده	نسیمی	شیراز
رسول	نصر اصفهانی	دانشگاه صنعتی اصفهان
نرگس	نظری	هرمزگان
علی محمد	نظری	اراک
ریحانه	نظری	علوم و تحقیقات تهران
علیرضا	نعمت اللهی	دانشگاه شیراز
حسین	نگارستانی	دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان
اسما	نگهداری	دانشگاه آزاد واحد شیراز
شهره	نمازی	دانشگاه شیراز
اسماء	نمازی	دانشگاه شیراز
صغرا	نوبختیان	دانشگاه اصفهان
راهله	نورایی	دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب
محتبی	نوری	مازندران

نام خانوادگی	نام	موسسه/دانشگاه
نوریانی	هاجر	دانشگاه آزاد اسلامی واحد کرج
نیازی	محسن	دانشگاه بیرجند
نیک اندیش	رضا	دانشگاه صنعتی جندی شاپور دزفول
نیک آئین	الهه	دانشگاه شیراز
نیک سرشت	اشکان	دانشگاه شیراز
نیکبخت	مریم	دانشگاه پیام نور
نیکنام	اسدالله	دانشگاه فردوسی مشهد
وائقی	زهره	دانشگاه شیراز
واعظ پور	سید منصور	صنعتی امیرکبیر
وثوقی نیا	علی	دانشگاه حکیم سبزواری
وحید دستجردی	مرضیه	صنعتی اصفهان
وصال	علی	دانشگاه شهید بهشتی
وصال	لیلا	
هادی	علی	دانشگاه شهید باهنر کرمان
هاشم پور	مجید	دانشگاه هرمزگان
هاشمی	بهنام	صنعتی شیراز
هاشمی	مریم	خوانسار
هاشمی	فخری السادات	آزاد اسلامی واحد نور
هاشمی زاده دزفولی	سید جمال	دانشگاه شهید چمران اهواز
هدایتیان	کریم	دانشگاه شیراز
هدایتیان	زهره	شیراز
همایونی	مریم	دانشگاه شیراز
هوشمند	محمد هادی	دانشگاه آزاد اسلامی واحد شیراز
یادگاری	امید	دانشگاه خوارزمی
یارمحمدی	مehشید	دانشگاه شیراز
یحیی زاده	زهره	شاهد
یعقوبی	مریم	مرکز تحصیلات تکمیلی پیام نور تهران
یکتائیان	یاسمن	دانشگاه صنعتی اصفهان
یوسف نژاد	محسن	دانشگاه شیراز

## فهرست مقالات ارائه شده

- ۱ بخش ۰۱ سخنرانی‌های مدعو  
ک. علیشاهی،  
۲ پیش‌بینی، یادگیری و بهینه‌سازی برخط
- ۳ بخش ۰۲ سخنرانی‌ها — آنالیز  
م. ابریشمی مقدم،  
۴ الگوریتمی برای یافتن نقاط بهترین تقریب نسبت به یک سیمپلکس  
ح. مظاهری تهرانی،  
۷ بهترین تقریب مجانبی در فضاهاى نرم دار
- ۱۰ بخش ۰۳ سخنرانی‌ها — آنالیز عددی و بهینه‌سازی  
م. جوزی و س. کریمی،  
۱۱ روش کريلف-تيخانوف برای حل مسائل معکوس و بدوضع گسسته  
حسام‌الدینی‌ا. و قاندى.ر،  
۱۵ ترکیبی کارآمد از روش‌های تکرار تغییراتی و هم‌محلی طیفی برای حل معادلات انتگرال فردهم غیرخطی  
ع. ربواز و م. رئیسی سرخونی،  
۱۹ کاربرد ماتریس‌های خاص در رمزنگاری  
س. زنگوئی زاده و م. ابوسعیدی،  
۲۳ ماتریس‌های هم‌زاویه ستونی و متعامد سطری  
ف. شریفی و ر. مختاری،  
۲۷ بازمتعامدسازی با نرم فروبنیوس برای الگوریتم‌های دوقطری‌سازی گولاب-کاهان سراسری و روش لنچوز سراسری  
م. ح. مجتبابی و ع. فخارزاده جهرمی،  
۳۱ طراحی سیستم بهینه تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای موازی  
ز. ملکی، ح. ر. ملکی، و ز. اکبری،  
۳۵ حل مساله مکان‌یابی تدافعی با استفاده از الگوریتم کلونی مورچگان  
م. نجفی-کلیانی و ف. پ. ع. بیک،  
۳۹ منظم‌سازی تیخونوف تعمیم یافته با به‌کارگیری فرآیند هسنبِرگ برای حل معادلات ماتریسی بدوضع  
ع. هادی و م. ایزدی،  
۴۳ بررسی پایداری و حل عددی یک مدل اپیدمی  $SIR$  با عامل واكسيناسيون  
م. پوربابایی و ع. سعادت‌مندی،  
۴۸ حل عددی معادله پنتاگراف کسری با استفاده از چندجمله‌ای‌های چبیشف
- ۵۳ بخش ۰۴ سخنرانی‌ها — ترکیبیات و علوم کامپیوتر  
م. امامی، الف. بهمنی و ع. ناصریان،  
۵۴ کران بالایی برای عدد احاطه‌گری گراف  $G(2, 3, v)$   
ح. تیموری فعال،  
۵۷ پیچیدگی درخت تصمیم توابع بولی و چندجمله‌ای خوشه‌ای

۶۰. م. سیف الدینی،  
یک مساله زمانبندی آنلاین: بررسی نسبت رقابتی
۶۴. م. سیف الدینی،  
طرح های تقریب برای یک مساله زمانبندی
۶۸. بخش ۵. سخنرانی‌ها — هندسه و توپولوژی
۶۹. م. دارا،  
خاصیت قطری نگاشت تکانی و فروکاست خمینه‌های همیتونی حاصلضربی
۷۳. بخش ۶. سخنرانی‌ها — سایر
۷۴. الف. بهمنی و م. امامی،  
کدهای دوتایی ناشی از چهارتایی‌ها روی  $k$ -تایی‌ها
۷۷. دکتر سیدحمید حاجی سید جوادى و (محدثه شفیعی سروستانی)،  
روشی برای جلوگیری از حمله ۵۱٪ در سکه‌بیتی و مدل کردن آن با زنجیره‌ی مارکوف
۸۱. س. ر. روزگار و ا. عبدالمی اصل،  
مدل رگرسیون آمیخته براساس توزیع چوله-لاپلاس-نرمال
۸۵. کاشفی و ناصحی،  
راهبردهای تدریس مفهوم تشابه در هندسه براساس نظریه ون هیلری
۹۰. ف. گودرزی،  
برخی نتایج از توابع شکاف فقر و شدت فقر و کاربردهای آنها
۹۴. ص. محسنی و ر. رضائیان،  
پیش‌بینی قیمت سهام بر مبنای شبکه عصبی و فیلتر کالمن
۹۸. بخش ۷. ارائه‌های پوستری — آنالیز
۹۹. شهلا خلیفه،  
دنباله بسل برداری مقدار در فضای هیلبرت  $L^2(0, \infty)$
۱۰۳. ا. سهویی، ز. هراتی فرزاد، م. فرهمند،  
قاب‌ها در فضاهای باناخ دنباله‌ای
۱۰۷. اسما نگهداری،  
برد عددی عملگر ترکیبی وزن‌دار  $C_{\psi, \varphi}$  وقتی که  $|\hat{\varphi}(z)| < 1$
۱۱۰. بخش ۸. ارائه‌های پوستری — آنالیز عددی و بهینه‌سازی
۱۱۱. عباسی و محمدی،  
محاسبه اولین مقدار ویژه و تابع ویژه یک عملگر غیرخطی با روش توانی معکوس
۱۱۶. ح. احمدیان مقدم و ع. قلی‌زاده،  
حل دستگاه معادلات انتگرال-دیفرانسیل ولترا-فردهلم کسری با استفاده از توابع بلوک‌پالس
۱۲۱. ر. بروغنی و م. پرتانین،  
حل معادلات انتگرال آبل تعمیم یافته با استفاده از ماتریس‌های عملیاتی چندجمله‌ای چبیشف
۱۲۵. م. تفکری بافقی، ق. ب. لقمانی و م. حیدری،  
روش تکرار پیکارد دومرحله‌ای با پارامتر کمکی برای حل مسائل مقدار مرزی دونقطه‌ای با شرایط نیومان

- حمیده حسین دوست و مصطفی شمسی،  
 ۱۲۹ روش رونوشت مستقیم موضعی اویلر برای حل مسایل کنترل بهینه و کاهش زمان حل مسایل
- حمیده حسین دوست و مصطفی شمسی،  
 ۱۳۳ روش رونوشت مستقیم موضعی هرمیت سیمپسون برای حل مسایل کنترل بهینه و کاهش زمان حل مسایل
- حسین پور و محمدی،  
 ۱۳۷ بازسازی تصویر با استفاده از الگوریتم های تکراری  $SOR$  و کاکرمارز
- ا.ر. حقیقی و ف. رحیمیان،  
 ۱۴۱ حل عددی معادلات انتشار هذلولی با استفاده از روش مربع ساز دیفرانسیل
- ص. خانزاده و آ. طالعی،  
 ۱۴۵ روش شبه طیفی برای حل عددی معادله بلک-شولز با اختیار فروش آمریکایی
- مرضیه خواجهپور و محمدعلی رعایت پناه،  
 ۱۴۹ بهینه سازی مشترک انرژی مراکز داده توزیع شده جغرافیایی و شبکه های متصل به آن بر مبنای مهاجرت ماشین های مجازی
- خوینی ها، داودی، و حسینی،  
 ۱۵۴ نوین زدایی تصویر با استفاده از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی: رویکرد کنترل بهینه
- مصطفی داوطلب و فریده داوطلب،  
 ۱۵۸ تخصیص منصفانه ی هزینه ی ثابت با استفاده از تحلیل پوششی داده ها
- داوطلب و محمودی،  
 ۱۶۲ یک فرمول دو سطحی برای تخصیص منابع متمرکز بدون تغییر مرز کارا
- ب. درخش و ر. کتانی،  
 ۱۶۶ حل عددی معادلات دیفرانسیل کسری با استفاده از یک روش هم محلی
- ک. درخشان و م. عرب عامری،  
 ۱۷۰ روش هم محلی لژاندر برای حل تقریبی معادله دیفرانسیل ریکاتی کسری با ضرایب متغیر
- م.ع. رعایت پناه، ع. عبدالله ابیانه، م. بیرامی ایناللو، و گ. حزبی،  
 ۱۷۴ ارائه یک مدل استوار برای مدیریت منابع آب
- م. رئیسی و م. عرب عامری،  
 ۱۷۸ روش عملیاتی موجه لژاندر برای حل عددی دستگاه معادلات دیفرانسیل انتگرال ولترای غیر خطی
- م.زارعی و م. پرتانیان،  
 ۱۸۲ حل مسئله کنترل بهینه غیرخطی درجه دوم با استفاده از سری مودال
- ب. شاهی و آ. طالعی،  
 ۱۸۶ روش های عنصر متناهی توسعه یافته و گالرکین آزاد از عنصر اصلاح شده برای مساله مرز مشترک الاستیسیته
- ج. شریف پیرانی و ا. رفیعی،  
 ۱۹۰ حل دستگاه معادلات انتگرال-دیفرانسیل ولترا-فردهلم خطی با استفاده از چند جمله ای های برنشتاین و بسل
- ن. صالحی مکاری و س.م. حسینی،  
 ۱۹۴ پایداری بهینه سازی شده روش های رونگه-کوتا ضمنی با نوین جمعی
- م. محبی و ح. ملکی،  
 ۱۹۸ بهینه سازی متغیرهای طراحی فرایند ایزومریزاسیون به کمک الگوریتم تکامل تفاضلی
- م. ج. ملکی و م. ع. پرتانیان،  
 ۲۰۲ ترکیب روش تکرار وردشی و درونیایی به وسیله چند جمله ای های چبیشف برای حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی



۲۰۷	ب. میرسلیمانی، س.ا. شاهزاده‌فاضلی و ن. بیدآبادی، روش مینیمم مانده QLP برای حل دستگاه خطی فازی
۲۱۱	چاکرال‌حسینی ابرقویی و حیدری، یک روش تکراری کارآمد برای حل معادله دیفرانسیل وندرپل
۲۱۵	کرنگیش و حمیدی، مسئله برنامه‌ریزی خطی چند هدفه فازی شهودی با توابع عضویت و عدم عضویت
۲۱۸	بخش ۹. ارائه‌های پوستری — ترکیبیات و علوم کامپیوتر
۲۱۹	ز. کریمی و م. قاسمی، پیشنهاد یک معماری برای بایگانی تکلیف‌های برنامه‌نویسی با امکان تشخیص تقلب‌های احتمالی
۲۲۳	بخش ۱۰. ارائه‌های پوستری — جبر
۲۲۴	م. بی‌باک و پ. رمضانی، تشخیص‌پذیری جدیدی از $O_{\lambda}^{+}(5)$
۲۲۷	ج. هاشمی و ع. رضایی، مروری کلی بر فضا‌های اشتراکی
۲۳۱	بخش ۱۱. ارائه‌های پوستری — هندسه و توپولوژی
۲۳۲	ر. علیپور و م. المکچی، زیرخمینه‌های $CR$ ضرب پیچشی و $\delta$ -پایا در فضا فرم مختلط
۲۳۷	ر. علیپور و م. المکچی، ناابرابری برای زیرخمینه‌های $CR$ ضرب پیچشی و $\delta$ -پایا در فضا فرم مختلط
۲۴۱	حسن ملکی و میلاد احمدی فرد، بررسی ساختار ریمانی $\Sigma$ -متالیک روی زیرمنیفولدهای یک منیفولد ریمانی متالیک
۲۴۵	بخش ۱۲. ارائه‌های پوستری — معادلات دیفرانسیل و سیستم‌های دینامیکی
۲۴۶	ز. باقری و م. میرزائی، تأثیر بازخورد‌های تلفیق شده در دینامیک شبکه تنظیمی بین سلولی در کپک مخاطی دیکتیوستلیم
۲۵۰	پ. تیموری و م. ص. شاهرخ‌دهکردی، تجزیه و تحلیل ریاضی پویایی کلی یک مدل برای عفونت $HIV$ از سلولهای $CD4 + T$
۲۵۳	ل. سلیمانی و ا. ربیعی، انشعاب مسیرهای تناوبی بزرگ با گذر از مسیرهای هموکلینیکی متقارن
۲۵۷	غ. فرجام و م. ص. شاهرخ‌دهکردی، نامساوی هارناک برای معادلات بیضوی در فرم واگرایی
۲۶۰	ف. محمدی و ز. دادی، مطالعه عددی دینامیک یک مدل سرطان در افراد آلوده به $HIV$
۲۶۴	ز. مرادی و م. فاتح‌نیا، یک مدل غیر خطی ساده دینامیکی روی تار صوتی با استفاده از ترکیب و تجزیه و تحلیل
۲۶۸	بخش ۱۳. ارائه‌های پوستری — سایر

- ۲۶۹ م. افرازنده، م. شرفی، و ز. سجادنيا،  
توزیع نرمال کوماراسوامی و کاربرد آن در مدل‌های رگرسیون خطی
- ۲۷۳ ا. بهرام، ن. محمدی و م. حسینی،  
آموزش ریاضی از طریق دست‌ورزی راه‌حلی برای ایجاد علاقه به رشته ریاضی
- ۲۷۷ خاطره تراوش، مریم شرفی، و زهرا سجادنيا،  
مطالعه‌ای بر روش‌های گوناگون نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار و مقایسه‌ی کارایی میانگین نمونه‌ای آن‌ها
- ۲۸۰ تقوی راد، ع. و جعفری خالدی، م.،  
اندازه‌های احتمال تصادفی برای فرآیندهای فضایی
- ۲۸۴ روغنی عراقی و ذاکرزاده،  
برآورد پیش‌آزمون و انقباضی بیزی پارامتر مقیاس در توزیع نمایی بر اساس داده‌های سانسور
- ۲۸۸ سفیدفرد، حسینی،  
قیمت‌گذاری اختیار معامله آسیایی و راهبردهای پوشش ریسک  
(مورد مطالعاتی بورس اوراق بهادار تهران)
- ۲۹۲ عبدالله زاده، باقرزاده و نباتی،  
ارائه رویکردی جدید برای پیش‌بینی مدل بازه‌ای سری‌های زمانی
- ۲۹۶ م. فهیمی و ک. نوری،  
قیمت‌گذاری اختیار معامله دومانعی با استفاده از روش تصویرسازی متعامد مبتنی بر چندجمله‌ای‌های لژاندر
- ۳۰۰ ع. معدن‌کن، ع. دلاورخلفی، م. کرباسی، و ف. ادیب‌نیا،  
کران‌های تضمین شده خط‌مشی‌های فرایند تصمیم‌مارکف
- ۳۰۴ س. میرانشاهی، ا. صنعت‌پور، و ب. پناه‌بحق،  
میانگین رتبه‌ای در مدل‌هایی از مجموعه‌های مرتب‌پاره‌ای
- ۳۰۸ س. پوراحمدی و م. ایزدی،  
حل عددی معادله بلک-شولز دو بعدی
- ۳۱۲ ف. گودرزی،  
مشخص‌سازی توزیع‌های پیوسته از طریق نامساوی‌هایی شامل مقادیر مورد انتظار توابع انتخاب شده

## سخنرانی‌های مدعو



## پیش‌بینی، یادگیری و بهینه‌سازی برخط

کسری علیشاهی\*  
دانشگاه صنعتی شریف، تهران، ایران

در نظریه آمار کلاسیک، مدل‌های احتمالاتی نقشی اساسی در صورت‌بندی و روش حل مساله‌ی پیش‌بینی به عهده دارند. اما در سال‌های اخیر به دلیل ضرورت مواجهه با مسائلی که در آن‌ها شرایط محیط به شدت در حال تغییر است و یا بازیگران هوشمند و احیاناً متخاصم اثرگذار هستند، ایده‌های جدیدی ابداع شده‌اند که امکان پرداختن به مساله‌ی پیش‌بینی بدون فرض هرگونه مدل احتمالاتی را به وجود می‌آورند! این ایده‌ها که همزمان از مفاهیم و روش‌های شاخه‌های بهینه‌سازی، علوم کامپیوتر و آمار استفاده می‌کنند و مبانی نظری جالبی برای انواعی از مساله‌ی یادگیری فراهم کرده‌اند. در این ارائه به کمک چند مثال محوری، تصویری کلی از مساله‌ی یادگیری برخط و ارتباط آن با زمینه‌های مشابه ارائه خواهیم کرد.  
پست الکترونیکی: [alishahi@sharif.ir](mailto:alishahi@sharif.ir)

سخنرانی‌ها

آنالیز

## الگوریتمی برای یافتن نقاط بهترین تقریب نسبت به یک سیمپلکس

مجید ابریشمی مقدم\*

گروه ریاضی، واحد بیرجند، دانشگاه آزاد اسلامی، بیرجند، ایران

چکیده. در این مقاله، ابتدا فرمولی برای تعیین بهترین تقریب یک نقطه نسبت به یک سیمپلکس ۱-بعدی در فضای اقلیدسی ارائه می شود. سپس به کمک آن، الگوریتمی برای یافتن نقاط بهترین تقریب نسبت به یک سیمپلکس  $n$ -بعدی در فضای اقلیدسی  $\mathbb{R}^n$  معرفی می گردد. واژه های کلیدی: فضای اقلیدسی، بهترین تقریب، سیمپلکس. طبقه بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 41A65, 52A27.

## ۱. مقدمه و کلیات

مسئله یافتن بهترین تقریب نسبت به مجموعه های مختلف یکی از مسائل کاربردی در حوزه علوم ریاضی و فنی می باشد. در این پژوهش می خواهیم الگوریتمی را برای پیدا کردن نقاط بهترین تقریب نسبت به یک سیمپلکس در فضای  $\mathbb{R}^n$  معرفی کنیم.

تعریف ۱.۰.۱. فرض کنید  $X$  یک فضای نرمدار و  $C \subset X$  یک زیرمجموعه ناتهی و  $x \in X$  باشد. نقطه  $y \in C$  را بهترین تقریب<sup>۱</sup>  $x$  در  $C$  می نامیم هرگاه

$$\|x - y_0\| = \inf_{y \in C} \|x - y\|.$$

مجموعه همه بهترین تقریب های  $x$  در  $C$  را با نماد  $P_C(x)$  نمایش می دهیم. اگر برای هر  $x \in X$ ،  $P_C(x)$  ناتهی باشد  $C$  را تقریب پذیر<sup>۲</sup> و اگر  $P_C(x)$  دقیقاً دارای یک عضو باشد  $C$  را چپیشف<sup>۳</sup> می نامیم.

در نظریه بهترین تقریب چند سوال اساسی مطرح می شود که عبارتند از: (۱) وجود نقاط بهترین تقریب (۲) یکتایی نقاط بهترین تقریب (۳) توصیف نقاط بهترین تقریب (۴) تعیین نقاط بهترین تقریب (۵) پیوستگی تابع بهترین تقریب (۶) خطای تقریب. مقالات متعددی درخصوص وجود، یکتایی و توصیف نقاط بهترین تقریب برای مجموعه های مشخص در فضاهای مختلف وجود دارد. یکی از مهمترین رده های این مجموعه ها، مجموعه های محدب هستند که دارای کاربردهای متعدد بوده و قضایای وجود و یکتایی نقاط بهترین تقریب برای آنها اثبات شده است. از جمله می توان به قضیه زیر از مرجع [۳] اشاره کرد:

قضیه ۲.۰.۱. هر مجموعه بسته و محدب در فضای هیلبرت، چپیشف است.

در مسائل کاربردی علاوه بر وجود و یکتایی نقاط بهترین تقریب، نحوه یافتن آنها نیز اهمیت فراوانی دارد. الگوریتم های متعددی درخصوص تعیین این نقاط برای انواع مجموعه های محدب ارائه شده است ( [۱]، [۲]، [۴] ) که از آن جمله می توان به الگوریتم دایکسترا<sup>۴</sup> برای یافتن بهترین تقریب نسبت و اشتراک متناهی از مجموعه های محدب بسته در فضای اقلیدسی و حالت خاص آن روش فون نویمان<sup>۵</sup> برای زیرفضاهای خطی اشاره کرد [۳]. یکی از معروفترین مجموعه های محدب، سیمپلکس ها هستند که در این پژوهش قصد داریم یک الگوریتم برای یافتن نقاط بهترین تقریب نسبت به آنها در فضای اقلیدسی ارائه دهیم.

## ۲. نتایج اصلی

تعریف ۱.۰.۲. فرض کنید  $E := \{e_0, e_1, \dots, e_n\}$  مجموعه ای متشکل از  $n+1$  نقطه در فضای اقلیدسی  $\mathbb{R}^n$  باشد که بطور خطی مستقل<sup>۶</sup> اند، یعنی مجموعه بردارهای  $\{e_1 - e_0, e_2 - e_0, \dots, e_n - e_0\}$  مستقل خطی هستند. این خاصیت نتیجه می دهد

\* سخنران<sup>۱</sup> von Neumann's<sup>۲</sup> Dykstra's algorithm<sup>۳</sup> Chebyshev<sup>۴</sup> proximal<sup>۵</sup> best approximation<sup>۶</sup> affinely independent

method

که هر نقطه در کلاف محدب  $C = \text{conv}\{e_0, e_1, \dots, e_n\} = [e_0, e_1, \dots, e_n]$  دارای نمایش یکتایی بصورت ترکیب محدب نقاطی در  $E$  می باشد. در این حالت  $C$  را یک سیمپلکس  $n$ -بعدی با رئوس  $e_i$  می نامیم.

اکنون سوالی که در اینجا مطرح می شود آنست که : چگونه می توان بهترین تقریب یک نقطه مانند  $x \in X$  را نسبت به سیمپلکس  $n$ -بعدی  $C$  پیدا کرد؟

برای پاسخ به سوال فوق ابتدا فرمولی را برای یافتن بهترین تقریب نسبت به سیمپلکس ۱-بعدی  $C = [e_0, e_1]$  بدست می آوریم. سپس به کمک آن روشی را برای یافتن بهترین تقریب نسبت به سیمپلکس  $n$ -بعدی وقتی  $n \geq 2$  معرفی می کنیم. برای این منظور ابتدا تابع زیر را موسوم به تابع برشی<sup>۹</sup> بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$[\alpha]_0^1 = \begin{cases} 0 & \text{if } \alpha < 0 \\ \alpha & \text{if } 0 \leq \alpha < 1 \\ 1 & \text{if } \alpha > 1 \end{cases}.$$

توجه شود که در  $X = \mathbb{R}$  برای هر  $\alpha \in \mathbb{R}$  داریم  $[\alpha]_0^1 = P_{[0,1]}(\alpha)$ .

گزاره ۲.۲. فرض کنید  $C = [e_0, e_1]$  یک سیمپلکس ۱-بعدی باشد. آنگاه برای هر  $x \in X$  داریم

$$P_C(x) = e_0 + \left[ \frac{\langle x - e_0, e_1 - e_0 \rangle}{\|e_1 - e_0\|^2} \right]_0^1 (e_1 - e_0).$$

قبل از اینکه به حالت  $n \geq 2$  بپردازیم، نحوه یافتن  $P_A(x)$  را که در آن  $x \in X$  و  $A = \text{aff}C$  (اشتراک همه زیرمجموعه های خطی شامل  $C$ ) را بیان می کنیم.

گزاره ۳.۲. فرض کنید  $C = [e_0, e_1, \dots, e_n]$  یک سیمپلکس  $n$ -بعدی و  $A = \text{aff}C$  باشد. آنگاه برای هر  $x \in X$  داریم

$$P_C(x) = e_0 + \sum_{j=1}^n \alpha_j (e_j - e_0),$$

که در آن ضرایب  $\alpha_j$  در معادلات زیر موسوم به معادلات نرمال<sup>۱۰</sup> صدق می کنند:

$$\sum_{j=0}^n \alpha_j \langle e_j - e_0, e_i - e_0 \rangle = \langle x - e_0, e_i - e_0 \rangle, \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

گزاره زیر که به اصل تحویل<sup>۱۱</sup> معروف است [۳]، به ما اجازه می دهد که یافتن بهترین تقریب نقطه  $x$  نسبت به سیمپلکس  $C$  روی کل فضای  $X$  را به زیرمجموعه خطی  $A = \text{aff}(C)$  کاهش دهیم.

گزاره ۴.۲. فرض کنید  $C$  یک مجموعه محدب بسته و  $A = \overline{\text{aff}}(C)$  باشد. آنگاه برای هر  $x \in X$  داریم

$$P_C(x) = P_C(P_A(x))$$

و

$$d^2(x, C) = d^2(x, A) + d^2(P_A(x), C).$$

اکنون الگوریتم را برای حالت  $n = 2$  در گزاره زیر بیان می کنیم و سپس به کمک آن الگوریتمی برای هر  $n$  بدست می آوریم.

گزاره ۵.۲. فرض کنید  $C = [e_0, e_1, e_2]$  یک سیمپلکس ۲-بعدی باشد. آنگاه برای هر  $x \in \text{aff}(C)$  یا  $x \in C$  که در این حالت داریم  $P_C(x) = x$ ، یا اینکه  $x \notin C$  که در این حالت نیز داریم

$$P_C(x) = P_{[e_i, e_{i+1}]}(x)$$

برای هر  $i \in \{1, 2, 3\}$  که در رابطه زیر صادق هستند

$$\|x - P_{[e_i, e_{i+1}]}(x)\| = \min_j \|x - P_{[e_i, e_{i+1}]}(x)\|.$$

<sup>11</sup> reduction principle

<sup>10</sup> normal equations

<sup>9</sup> truncation function

<sup>8</sup> simplex

<sup>7</sup> convex hull

در اینجا  $e_3 := e_0$ .

حال آماده هستیم که به کمک ایده مطرح شده در گزاره فوق روش تعیین  $P_C(x)$  را برای یک سیمپلکس  $n$ -بعدی ارائه دهیم. فرض کنید  $C = [e_0, e_1, \dots, e_n]$  یک سیمپلکس  $n$ -بعدی در  $X$  و  $x \in \text{aff}(C)$ . اگر  $x \in C$  آنگاه  $P_C(x) = x$ . لذا فرض می‌کنیم که  $x \in \text{aff}(C) \setminus C$ . بنابراین  $P_C(x) \in \text{rbd}(C)$  که در آن

$$\text{rbd}(C) = \left\{ \sum_{i=0}^n \lambda_i e_i \mid \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1, \lambda_j = 0 \text{ for some } j \right\}.$$

از آنجائیکه هر  $y \in \text{rbd}(C)$  حداقل در یکی از مجموعه‌های  $C_j$  بصورت زیر واقع است

$$(1) \quad C_j := \left\{ \sum_{i=0}^n \lambda_i e_i \mid \lambda_i \geq 0, \text{ for all } i, \lambda_j = 0 \text{ and } \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1 \right\}.$$

لذا می‌توان نوشت:

$$\text{rbd}C = \bigcup_{j=0}^n C_j.$$

بعلاوه هر  $C_j$  خود یک سیمپلکس  $n-1$ -بعدی در  $C$  است و برای حداقل یک  $j$ ،  $P_C(x) \in C_j$  و برای این اندیس  $j$  داریم

$$\|x - P_C(x)\| = d(x, C) \leq \|x - P_{C_j}(x)\| = d(x, C_j) \leq \|x - P_C(x)\|.$$

این نتیجه می‌دهد که در رابطه بالا باید همه نامساویها، تساوی باشند. لذا با توجه به یکتایی بهترین تقریب داریم  $P_C(x) = P_{C_j}(x)$ . اگر  $\{j \mid \|x - P_{C_j}(x)\| = \min_i \|x - P_{C_i}(x)\|\}$  آنگاه واضح است که برای هر  $j \in J$  داریم  $P_C(x) = P_{C_j}(x)$ . با توجه به بحث فوق می‌توان الگوریتمی بازگشتی برای محاسبه  $P_C(x)$  و قتیکه  $C = [e_0, e_1, \dots, e_n]$  یک سیمپلکس  $n$ -بعدی است، بدست آورد.

فرض کنید  $C_j$  یک سیمپلکس  $(n-1)$ -بعدی تعریف شده در رابطه (۱) باشد. فرض کنید  $A_j = \text{aff}C_j$ ،  $A = \text{aff}C$  و برای هر  $x \in A \setminus C$ ،  $j = 0, 1, \dots, n$  و برای هر  $j$ ،  $x_j = P_{A_j}(x)$ . الگوریتم زیر تابعی مانند  $P(n, x, C)$  را تعریف می‌کند که مقادیر  $x$  و مجموعه  $C$  را می‌گیرد و بهترین تقریب  $P_C(x)$  را مشخص می‌کند. خلاصه این الگوریتم را بصورت زیر می‌توان نوشت:

- (۱) اگر  $n = 1$  به کمک فرمول داده شده در گزاره (۲.۲)،  $P(1, x, C)$  را محاسبه کن.
- (۲) اگر  $n \geq 2$  آنگاه برای  $n = 0, 1, \dots$  مقادیر  $x_j = P_{A_j}(x)$  و  $P(n-1, x_j, C_j)$  را محاسبه کن.
- (۳) برای هر  $j \in \text{argmin}_k \|x_k - P_{C_k}(x_k)\|$  قرار بده  $P_C(x) = P_{C_j}(x_j)$ .

## مراجع

1. Francisco J. Aragón, Rubén Campoy, *A new projection method for finding the closest point in the intersection of convex sets*, Computational Optimization and Applications. 69 (2018), no. 1, 99–132.
2. Heinz H. Bauschke, Patrick L. Combettes, and D. Russell Luke, *Finding best approximation pairs relative to two closed convex sets in Hilbert spaces*, Journal of Approximation Theory. 127 (2004), no. 2, 178–192.
3. F. Deutsch, *Best Approximation in Inner Product Spaces*, Springer, New York, 2001.
4. D. Russell Luke, *Finding Best Approximation Pairs Relative to a Convex and Prox-Regular Set in a Hilbert Space*, SIAM Journal on Optimization. 19 (2008), no. 2, 714–739.

پست الکترونیکی: [m.abrishami.m@gmail.com](mailto:m.abrishami.m@gmail.com)



## بهترین تقریب مجانبی در فضاهای نرم دار

حمید مظاهری تهرانی\*  
پردیس علوم-دانشکده ریاضی- دانشگاه یزد

چکیده. در این مقاله مفاهیم اصلی مراکز مجانبی، نزدیکترین نقاط مجانبی و دورترین نقاط مجانبی دنباله های کراندار در فضاهای نرم دار تعریف می شود. این تعاریف مفاهیمی جدید در نظریه تقریب مجرد به شمار می روند و شبیه نزدیکترین و دورترین نقاط قابل بررسی و تجزیه و تحلیل هستند.  
واژه های کلیدی: مراکز مجانبی، نزدیکترین نقاط مجانبی، دورترین نقاط مجانبی، نزدیکترین نقاط، دورترین نقاط.  
طبقه بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 90C47 46B20 46B50.

### ۱. پیش گفتار

نظریه تقریب که شامل دو موضوع عمده نزدیکترین نقاط (بهترین تقریب) و دورترین نقاط است یکی از شاخه های قدیمی آنالیز ریاضی است. چیشیف ریاضی دان روسی نخستین فردی بود که در سال ۱۸۵۳ اقدامات معنا داری در نظریه تقریب انجام داد. در سال ۱۸۸۵ وایراشتراس ریاضی دان آلمانی قضیه موسوم به تقریب وایراشتراس را ارائه داد. مطالعات در نظریه تقریب در نیمه اول قرن بیستم توسط جکسون ۱۹۳۰ بونت ۱۹۳۴ موتزکین ۱۹۳۵ نیکلاسکو ۱۹۳۸ ادامه یافت. یسن نخستین فردی بود که مفهوم دورترین نقاط را در سال ۱۹۴۰ ارائه داد. بعد از کارهای یسن نظریه تقریب با سرعت بیشتری گسترش یافت.

تعریف ۱.۱. فرض کنید  $x \in X$  یک نقطه  $z \in G$  را نزدیکترین نقطه به  $x$  گوئیم. هرگاه  $\|x - z\| = d(x, G) = \inf_{g \in G} \|x - g\|$  مجموعه تمام نقاط نزدیکترین نقاط به  $x$  در  $G$  را با نماد  $P_G(x)$  نشان می دهیم. قرار می دهیم

$$d(G) = \{x \in X : P_G(x) \neq \emptyset\},$$

$$d_u(G) = \{x \in X : \text{card}(P_G(x)) = 1\},$$

$$d'(G) = \{x \in X : \text{card}(P_G(x)) \leq 1\}.$$

مجموعه  $G$  را تقریبی (چیشیف و یا نیم چیشیف) گوئیم هرگاه

$$d(G) = X \text{ (} d'(G) = X, \text{ or } d_u(G) = X \text{)}.$$

تعریف ۲.۱. فرض کنید  $x \in X$  یک نقطه  $z \in G$  را دورترین نقطه به  $x$  گوئیم. هرگاه  $\|x - z\| = \delta(x, G) = \sup_{g \in G} \|x - g\|$  مجموعه تمام نقاط نزدیکترین نقاط به  $x$  در  $G$  را با نماد  $F_G(x)$  نشان می دهیم. قرار می دهیم

$$\delta(G) = \{x \in X : F_G(x) \neq \emptyset\},$$

$$\delta_u(G) = \{x \in X : \text{card}(F_G(x)) = 1\},$$

مجموعه  $G$  را دوری ( بطور یکتا دوری ) گوئیم هرگاه

$$\delta(G) = X \text{ (} \delta_u(G) = X \text{)}.$$

تعریف ۳.۱. برای دنباله کراندار  $\{x_n\}$  در  $X$  تابع  $r_a(\cdot, \{x_n\}) : X \rightarrow R$  تعریف شده بصورت زیر را در نظر می گیریم:

$$r_a(x, \{x_n\}_{n \geq 1}) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x - x_n\| \quad x \in X$$

$$r_a(G, \{x_n\}) = \inf_{x \in G} r_a(x, \{x_n\}).$$

عدد  $r_a(G, \{x_n\})$  را شعاع مجانبی دنباله نسبت به مجموعه  $G$  گوئیم. نقطه  $z \in G$  را مرکز مجانبی دنباله  $\{x_n\}$  نسبت به مجموعه  $G$  هرگاه  $r_a(G, \{x_n\}) = r_a(z, \{x_n\})$ .

تعریف ۴.۱. برای دنباله کراندار  $\{x_n\}$ ، تعریف می کنیم.

$$d_a(x, \{x_n\}_{n \geq 1}) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x - x_n\| \quad x \in X$$

و

$$d_a(G, \{x_n\}) = \inf_{x \in G} d_a(x, \{x_n\}).$$

عدد  $d_a(G, \{x_n\})$  را نزدیکترین فاصله مجانبی دنباله  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  تا مجموعه  $G$  گوئیم. نقطه  $z \in G$  را نزدیکترین نقطه مجانبی دنباله  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  نسبت به  $G$  گوئیم. مجموعه تمام نزدیکترین نقاط مجانبی دنباله  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  نسبت به  $G$  را با  $P_a(G, \{x_n\})$  نشان می دهیم. قرار می دهیم

$$d_a(G) = \{\{x_n\}_{n \geq 1} : \{x_n\}_{n \geq 1}, P_a(G, \{x_n\}) \neq \emptyset\},$$

و

$$d_{u_a} = \{\{x_n\}_{n \geq 1} : \{x_n\}_{n \geq 1}, \text{card}(P_a(G, \{x_n\})) = 1\}.$$

مجموعه  $G$  را تقزیمی مجانبی (چپیشف مجانبی) گوئیم هرگاه  $d_a(G)$  (متناظر  $d_{u_a}$ ) شامل تمام دنباله های کراندار در  $X$  باشد.

تعریف ۵.۱. برای دنباله کراندار  $\{x_n\}$ ، تعریف می کنیم.

$$\delta_a(x, \{x_n\}_{n \geq 1}) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x - x_n\| \quad x \in X$$

و

$$\delta_a(G, \{x_n\}) = \inf_{x \in G} \delta_a(x, \{x_n\}).$$

عدد  $\delta_a(G, \{x_n\})$  را دورترین فاصله مجانبی دنباله  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  تا مجموعه  $G$  گوئیم. نقطه  $z \in G$  را دورترین نقطه مجانبی دنباله  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  نسبت به  $G$  گوئیم. مجموعه تمام دورترین نقاط مجانبی دنباله  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  نسبت به  $G$  را با  $F_a(G, \{x_n\})$  نشان می دهیم. قرار می دهیم

$$\delta_a(G) = \{\{x_n\}_{n \geq 1} : \{x_n\}_{n \geq 1}, F_a(G, \{x_n\}) \neq \emptyset\},$$

و

$$\delta_{u_a} = \{\{x_n\}_{n \geq 1} : \{x_n\}_{n \geq 1}, \text{card}(F_a(G, \{x_n\})) = 1\}.$$

مجموعه  $G$  را دورترین مجانبی (یکتا دورترین مجانبی) گوئیم هرگاه  $d_a(G)$  (متناظر  $d_{u_a}$ ) شامل تمام دنباله های کراندار در  $X$  باشد.

مثال ۶.۱. فرض کنید  $c$ . فضای تمام دنباله های حقیقی مقدار همگرا به صفر با نرم سوپر نیم باشد. قرار می دهیم

$$x_n = \left\{ \frac{((-1)^n - 2)n}{(n+1)k} \right\}_{k=1}^{\infty}$$

برای  $n \in N$

$$G_1 = \left\{ \left\{ \frac{\sin a}{k} \right\}_{k=1}^{\infty} : a \in (0, \pi) \right\},$$

$$G_2 = \left\{ \left\{ \frac{\sin a}{k} \right\}_{k=1}^{\infty} : a \in (0, 2\pi) \right\}.$$

آنگاه

$$P_a(G_1, \{x_n\}_{n=1}^{\infty}) = P_a(G_2, \{x_n\}_{n=1}^{\infty}) = \emptyset.$$

مثال ۷.۱. فرض کنید  $X = C$  مجموعه اعداد مختلط با دو نرم تعریف شده زیر

$$\|x + iy\|_1 = |x| + |y|, \quad \|x + iy\|_2 = \max\{|x|, |y|\}.$$

برای هر  $n \in N$  قرار می دهیم  $z_n = (1 + 2^{1-n})i^{n-1}$  اگر  $G_j = \{z \in C : \|z\|_j \leq 1\}$  برای  $j = 1, 2, 3$ . آنگاه

$$F_a(G_j, \{z_n\}_{n=1}^{\infty}) = \{z \in C : \|z\|_j = 1\}.$$

برای  $j = 1, 3$  و

$$F_a(G_2, \{z_n\}_{n=1}^{\infty}) = \{1, -1, I, -I\}.$$

همچنین

$$F_a(G_j^o, \{z_n\}_{n=1}^{\infty}) = \emptyset,$$

برای  $j = 1, 2, 3$ .

## ۲. نتایج اصلی

قضیه ۱.۰۲. اگر  $x_n \rightarrow x$  و  $x \in X$  آنگاه

$$P_a(G, \{x_n\}_{n=1}^{\infty}) = P_G(x).$$

و

$$F_a(G, \{x_n\}_{n=1}^{\infty}) = F_G(x).$$

قضیه ۲.۰۲. رابطه زیر برقرار است.

$$d_a(G, \{x_n\}_{n=1}^{\infty}) = d_a(\bar{G}, \{x_n\}_{n=1}^{\infty}).$$

و

$$\delta_a(G, \{x_n\}_{n=1}^{\infty}) = \delta_a(\bar{G}, \{x_n\}_{n=1}^{\infty}).$$

همچنین

$$\delta_a(G, \{x_n\}_{n=1}^{\infty}) = \delta_a(co(G), \{x_n\}_{n=1}^{\infty}).$$

قضیه ۳.۰۲. اگر  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  یک دنباله کشی باشد. آنگاه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x, x_n) = da(x, \{x_n\}_{n=1}^{\infty}),$$

و

$$P_a(G, \{x_n\}_{n=1}^{\infty}) = Z_a(G, \{x_n\}_{n=1}^{\infty}).$$

قضیه ۴.۰۲. فرض کنید  $G$  مجموعه باز و هر دنباله  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  دارای زیر دنباله ای همگرا باشد و نیز  $d_a(G, \{x_n\}_{n=1}^{\infty}) > 0$  در اینصورت

$$P_a(G, \{x_n\}_{n=1}^{\infty}) = \emptyset.$$

قضیه ۵.۰۲. رابطه زیر برقرار است.

$$F_a(G, \{x_n\}_{n=1}^{\infty}) \neq \emptyset \Leftrightarrow F_a(co(G), \{x_n\}_{n=1}^{\infty}) \neq \emptyset.$$

قضیه ۶.۰۲. رابطه زیر برقرار است.

$$F_a(G, \{x_n\}_{n=1}^{\infty}) = \{z\} \Leftrightarrow F_a(co(G), \{x_n\}_{n=1}^{\infty}) = \{z\}.$$

قضیه ۷.۰۲. رابطه زیر برقرار است.

$$ext(F_a(G, \{x_n\}_{n=1}^{\infty})) = F_a(G, \{x_n\}_{n=1}^{\infty}) \cap ext(G).$$

## REFERENCES

- [1] R. P. Agarwal, D. Regan and D.R. Sahu, Fixed Point Theory for Lipschitzian type Mappings with Applications, Springer –Verlag, New York, 2009.
- [2] S. Cobzas, Geometric properties of Banach spaces and the existence of nearest and Farthest points, Abstr. Appl. Anal. (3)2005, 259-285.
- [3] F. Deutsch, "Best Approximation in Inner Product Spaces, Springer-Verlag, New York, 2001.
- [4] S. Muthukumar, A note on best and best simultaneous approximations, Indian J. Pure Appl. Math. 11 (6) (1980), 715-719.
- [5] I. Singer, The Theory of Best Approximation and Functional Analysis, Philadelphia, Pa., 1974.

سخنرانی‌ها

آنالیز عددی و بهینه‌سازی

## روش کرلیف-تیخانوف برای حل مسائل معکوس و بدوضع گسسته

میثم جوزی\*

بخش ریاضی، دانشگاه خلیج فارس، بوشهر، ایران

و سعید کریمی

بخش ریاضی، دانشگاه خلیج فارس، بوشهر، ایران

چکیده. در این مقاله یک روش تکراری برای حل مسائل معکوس و بدوضع گسسته ارائه می‌شود. در تکرار  $k$ ام این روش جواب مسأله‌ی تیخانوف متناظر با مسأله‌ی اصلی در یک زیرفضای کرلیف با بعد  $k$  جست‌وجو می‌شود و به این وسیله مسأله‌ی تیخانوف به یک مسأله‌ی با بعد کمتر و بسیار ساده‌تر کاهش می‌یابد که با روش‌های مستقیم مانند تجزیه‌ی QR قابل حل است. این فرایند به الگوریتم تکراری کرلیف-تیخانوف منجر می‌شود. به‌علاوه از یک استراتژی ساده و سریع مبتنی بر روش قانون اختلاف برای انتخاب هم‌زمان پارامتر منظم‌سازی و اندیس تکرار بهره می‌گیریم. در نهایت با ذکر چند مثال عددی حاصل از گسسته‌سازی معادلات انتگرالی نوع اول الگوریتم کرلیف-تیخانوف مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.

واژه‌های کلیدی: مسائل معکوس گسسته، روش تیخانوف، روش‌های زیرفضای کرلیف، پارامتر منظم‌سازی. طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 65F10, 65F22, 65R32.

### ۱. پیش‌گفتار

موضوع مقاله‌ی حاضر حل مسأله‌ی

$$(۱) \quad Ax = b, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad b \in \mathbb{R}^m,$$

است که در آن  $A$  یک ماتریس بزرگ و بدوضع است؛ یعنی دنباله‌ی مقادیر منفرد آن به صفر میل می‌کند. دستگاه‌های معادلات خطی از این نوع به مسائل معکوس گسسته معروف هستند که از گسسته‌سازی مسائل معکوس پیوسته مانند معادلات انتگرالی نوع اول به‌دست می‌آیند. در مسائل کاربردی داده‌ی سمت راست یعنی بردار  $b$  آغشته به خطای اندازه‌گیری است و لذا داریم

$$b = b^{exact} + e,$$

که در آن  $b^{exact}$  و  $e$  به‌ترتیب بردار سمت راست دقیق نامعلوم و بردار خطا می‌باشند. در نتیجه بدوضع مسأله باعث می‌شود جواب حاصل از به‌کارگیری روش‌هایی که برای حل مسائل خوش‌وضع طراحی شده‌اند، با جواب مسأله‌ی دقیق یعنی

$$Ax^{exact} = b^{exact},$$

فاصله داشته باشد [۵].

یک رویکرد کلی برای حل مسائل معکوس بدوضع تکنیک منظم‌سازی است که مسأله را با یک مسأله‌ی خوش‌وضع وابسته به یک پارامتر به نام پارامتر منظم‌سازی تقریب می‌زند. برای آشنایی با نظریه‌ی منظم‌سازی به [۳، ۶] مراجعه کنید. معروف‌ترین روش منظم‌سازی روش تیخانوف است که (۱) را با مسأله‌ی کمینه‌سازی زیر جایگزین می‌کند

$$(۲) \quad \min_{x \in \mathbb{R}^n} \{ \|Ax - b\|_2^2 + \alpha \|Lx\|_2^2 \},$$

که در آن  $L \in \mathbb{R}^{p \times n}$  ماتریس منظم‌سازی و  $\alpha$  پارامتر منظم‌سازی می‌باشد. مسأله‌ی (۲) با مسأله‌ی کمترین مربعات زیر معادل است

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \left\| \begin{pmatrix} A \\ \sqrt{\alpha}L \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2 \right\},$$

که  $O$  بردار صفر  $1 \times p$  است. بنابراین مسأله‌ی تیخانوف (۲) دارای جواب منحصر به فرد است اگر  $\mathcal{N}(L) \cap \mathcal{N}(A) = \emptyset$ . نشان‌دهنده‌ی هسته‌ی ماتریس  $L$  می‌باشد. حل مسأله‌ی (۲) توجه بسیاری از محققین را به خود جلب کرده است و تاکنون روش‌هایی که همگی بر یافتن مقدار بهینه‌ی  $\alpha$  متمرکز هستند، ارائه شده‌اند [۲، ۳، ۴]. ایده‌ی کلی بسیاری از این روش‌ها، تصویر فضای جواب به یک زیرفضا با بعد کمتر و در نتیجه کاهش (۲) به یک مسأله ساده‌تر است. یک انتخاب مناسب برای این منظور زیرفضاهای کرلیف و

\* سخنران

دو الگوریتم معروف برای تولید پایه‌ی یکامتعامد عبارت هستند از آرنولد و دوقطری سازی لانکروس [۸، ۷]. هر دوی این الگوریتم‌ها دو دنباله از ماتریس‌های  $n \times k$ ، مانند  $U_k = [u_1, u_2, \dots, u_k]$ ،  $V_k = [v_1, v_2, \dots, v_k]$  می‌سازند به گونه‌ای که

$$(3) \quad AV_k = U_{k+1}T_k, \quad u_1 = \frac{b}{\|b\|}$$

که در آن  $V_k$  و  $U_{k+1}$  ماتریس‌های متعامد و  $T_k \in \mathcal{R}^{(k+1) \times k}$  ماتریسی با یک ساختار ساده است. در روش آرنولد ماتریس‌های  $U_k$  و  $V_k$  با هم برابر هستند.

ستون‌های ماتریس  $V_k$  در آرنولد و لانکروس به ترتیب پایه‌ای یکامتعامد برای زیرفضای کرلیف  $\mathcal{K}_k(A, b)$  و  $\mathcal{K}_k(A^T A, A^T b)$  هستند و لذا جواب مسأله‌ی (۲) به صورت  $x_k = V_k y_k$  تقریب زده می‌شود. بعد از جایگذاری در معادله‌ی (۲) و استفاده از رابطه‌ی (۳) و همچنین خاصیت تعامد ماتریس  $U_{k+1}$ ، مسأله‌ی تیخانوف به صورت زیر کاهش می‌یابد

$$(4) \quad \min_{y \in \mathbb{R}^k} \{ \|T_k y - \|b\|_2 e_1\|_2 + \alpha \|LV_k y\|_2^2 \},$$

که در آن  $e_1$  ستون اول ماتریس همانی می‌باشد. ماتریس  $T_k$  برای الگوریتم‌های آرنولد و لانکروس به ترتیب بالاهسنبرگ و پایین دوقطری است. با توجه به اینکه مقادیر  $k$  کوچک هستند، مسأله‌ی فوق را می‌توان با روش‌های مستقیم مانند تجزیه‌ی QR ماتریس

$$\begin{pmatrix} T_k \\ \sqrt{\alpha} LV_k \end{pmatrix},$$

حل نمود [۱]. اگر جواب (۴) را با  $y_k^{(\alpha)}$  نشان دهیم، جواب مسأله‌ی (۲) عبارت خواهد بود از  $x_k^{(\alpha)} = V_k y_k^{(\alpha)}$ . حال روش ساده‌ای را برای یافتن هم‌زمان پارامترهای  $k$  و  $\alpha$  شرح می‌دهیم. این روش بر قانون اختلاف استوار است؛ یعنی با فرض اینکه مقدار  $\|e\|_2$  معلوم باشد، پارامترها به گونه‌ای تعیین می‌شوند که

$$(5) \quad \|b - Ax_k^{(\alpha)}\|_2 = \eta \|e\|_2,$$

که در آن  $\eta \geq 1$  [۶، ۳]. با اعمال  $x_k^{(\alpha)} = V_k y_k^{(\alpha)}$  و استفاده از رابطه‌ی (۳) و خاصیت تعامد ماتریس  $U_{k+1}$ ، معیار (۵) به صورت زیر تقلیل می‌یابد.

$$\|T_k y_k^{(\alpha)} - \|b\|_2 e_1\|_2 = \eta \|e\|_2.$$

بنابراین در هر تکرار  $k$ ، معادله‌ی غیرخطی زیر نسبت به  $\alpha$  ظاهر می‌شود:

$$(6) \quad \phi_k(\alpha) = \eta \|e\|_2, \quad \phi_k(\alpha) := \|T_k y_k^{(\alpha)} - \|b\|_2 e_1\|_2.$$

برای حل این معادله دو جمله‌ی اول بسط مک لورن تابع  $\phi_k$  در نظر گرفته شده و تقریب خطی زیر به دست می‌آید

$$(7) \quad \phi_k(\alpha) \approx \phi_k(\circ) + \alpha \phi_k'(\circ).$$

آنگاه  $\phi_k'(\circ)$  به صورت زیر تقریب زده می‌شود

$$(8) \quad \phi_k'(\circ) \approx \frac{\phi_k(\alpha_{k-1}) - \phi_k(\circ)}{\alpha_{k-1}}.$$

در معادله‌ی بالا،  $\phi_k(\alpha_{k-1})$  از طریق حل (۴) به ازای  $\alpha = \alpha_{k-1}$ ، که در تکرار قبلی محاسبه شده است، به دست می‌آید. توجه کنید که  $\phi_k(\circ)$  برای الگوریتم‌های آرنولد و دوقطری سازی لانکروس به ترتیب مانده‌ی  $k$ ام الگوریتم‌های GMRES و LSQR می‌باشد [۸، ۷]. حال برای انتخاب  $\alpha_k$ ، شرط زیر اعمال می‌شود

$$\phi_k(\alpha_k) = \eta \|e\|_2.$$

این شرط و معادلات (۷) و (۸) رابطه‌ی بازگشتی ذیل را نتیجه می‌دهند.

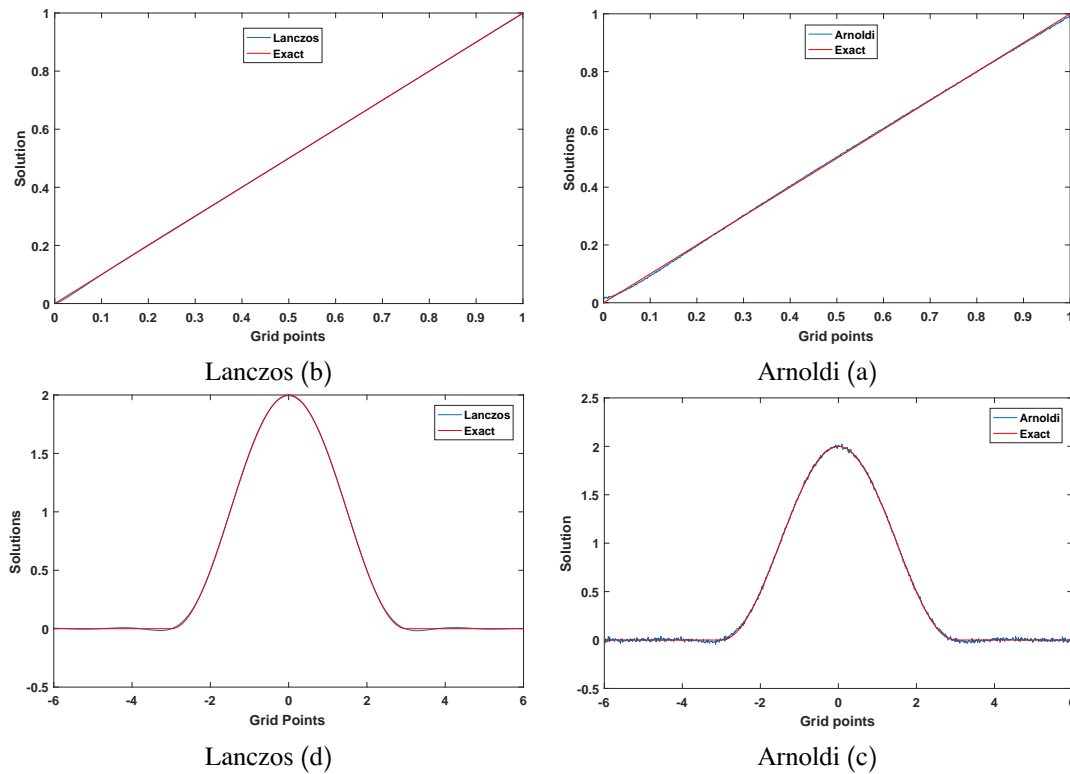
$$(9) \quad \alpha_k = \left| \frac{\eta \|e\|_2 - \phi_k(\circ)}{\phi_k(\alpha_{k-1}) - \phi_k(\circ)} \right| \alpha_{k-1}.$$

گام‌های اصلی الگوریتم فوق به صورت زیر جمع‌بندی می‌شود.

(۱)  $A, b, \eta, \delta$  و  $\epsilon$  را بگیر.

(۲) برای  $k = 1, 2, \dots$  کارهای ذیل را تا رسیدن به شرط توقف  $\|b - Ax_k^{(\alpha)}\|_2 \leq \eta \delta$  انجام بده

(۳) به کمک یکی از الگوریتم‌های آرنولد یا لانکروس ماتریس‌های  $V_k$  و  $T_k$  را تولید کن.



شکل ۱. مقایسه‌ی جواب‌های تقریبی با جواب دقیق برای هر دو مثال. ردیف بالا: foxgood و ردیف پایین: phillips

- (۴) مسأله‌ی کمینه‌سازی (۴) را با انتخاب  $\alpha = \alpha_{k-1}$  حل و  $\|b\|_2$  و  $\|T_k y_k^{(\alpha_{k-1})} - b\|_2$  را محاسبه کن.  
 (۵) مقدار  $\phi_k(0)$  را محاسبه کن.  
 (۶) مقدار جدید  $\alpha_k$  را توسط رابطه‌ی بازگشتی (۹) محاسبه کن.

لازم به ذکر است که الگوریتم فوق از آرنولدی استفاده شود، نسخه‌ی منظم‌سازی شده‌ی الگوریتم تکراری GMRES و در صورتی که از دوقطری‌سازی لانکزوس استفاده شود، نسخه‌ی منظم‌سازی شده‌ی LSQR است.

## ۲. نتایج عددی

در این بخش به کمک دو مثال معادله‌ی انتگرالی فردهم نوع اول phillips و foxgood از بسته‌ی نرم‌افزاری MATLAB در [۴]، الگوریتم ارائه شده را مورد ارزیابی قرار می‌دهیم. برای این منظور معادله‌ها را با روش نیشتروم و انتگرال‌گیری عددی نقطه‌میان با  $1000$  نقطه‌ی گره‌ای گسسته می‌کنیم تا دستگاه  $Ax = b$  حاصل شود. بردار  $e = \sigma\omega$  را به بردار سمت راست اضافه می‌کنیم که در آن  $\omega$  برداری تصادفی با توزیع نرمال استاندارد و  $\sigma$  به طریقی انتخاب می‌شود که

$$\frac{\|e\|_2}{\|b\|_2} = \epsilon.$$

آنگاه الگوریتم را برای  $\epsilon = 10^{-3}$ ،  $\eta = 1/10$  و  $\delta = \epsilon\|b\|_2$  برای حل دستگاه نهایی به کار می‌گیریم. عدد شرطی ماتریس ضرایب برای مثال phillips و foxgood به ترتیب برابر است با  $1.76 \times 10^{10}$  و  $5.17 \times 10^{21}$ . جواب دقیق و جواب تقریبی حاصل از الگوریتم برای هر دو فرایند آرنولدی و لانکزوس برای هر دو مثال در شکل ۱ آمده است. این شکل نشان می‌دهد که فرایند لانکزوس نسبت به آرنولدی قابل اعتمادتر است. به علاوه میانگین عدد شرطی (Mcond) ماتریس‌های  $T_k$ ،  $k^*$ ، برای هر دو روش در جدول ۱ آمده‌اند؛  $k^*$  مقدار بهینه‌ی  $k$  می‌باشد. ملاحظه می‌کنید که در این زمینه نیز روش لانکزوس بر آرنولدی برتری دارد.

جدول ۱. میانگین عدد شرطی

	phillips	foxgood
Arnoldi	$7.66 \times 10^{+2}$	$9.13 \times 10^{+7}$
Lanczos	۵۳	$1.52 \times 10^{+4}$

مراجع

1. A. Björk, *Numerical methods for least squares problems*, SIAM, Sweden, 1996.
2. S. Gazzola, P. Novati and M. R. Russo, *On Krylov projection methods and Tikhonov regularization*, Electron. Trans. Numer. Anal. 44 (2015) 83-123.
3. P. C. Hansen, *Discrete inverse problems: insight and algorithms.*, SIAM: Philadelphia, PA, 2010.
4. P. C. Hansen, *Regularization Tools Version 4.1 for Matlab 7.3*, Numer. Algo. 46 (2007) 189-194.
5. M. Jozi, S. Karimi, *A weighted singular value decomposition for the discrete inverse problems*, Numer. Linear. Algebra. Appl. 25 (2018) e2114.
6. A. Kirsch, *An introduction to the mathematical theory of inverse problems*, Springer, New York, 2011.
7. C. C. Paige, Michael A. Saunders, *LSQR: an algorithm for sparse linear equations and sparse least squares*, ACM Trans. Math. Software. 8 (1982) 43-71.
8. Y. Saad, *Iterative methods for sparse linear systems*, University of Minnesota, 2000.

پست الکترونیکی: [maisam.j63@gmail.com](mailto:maisam.j63@gmail.com)  
 پست الکترونیکی: [karimijafarbigloo@gmail.com](mailto:karimijafarbigloo@gmail.com)



## ترکیبی کارآمد از روش‌های تکرار تغییراتی و هم‌محلی طیفی برای حل معادلات انتگرال فردهلم غیرخطی

اسماعیل حسام‌الدینی  
گروه ریاضی، دانشگاه صنعتی شیراز، شیراز، ایران  
و روح‌اله قاندي\*  
گروه ریاضی، دانشگاه صنعتی شیراز، شیراز، ایران

چکیده. در این مقاله قصد داریم از یک روش عددی که ترکیبی از روش‌های تکرار تغییراتی و روش هم‌محلی طیفی است، برای حل دسته‌ای از معادلات انتگرال فردهلم غیرخطی استفاده نماییم. این روش دیگر نیازی به محاسبه ضرایب لاگرانژ یا چند جمله‌ای‌های آدومیان ندارد و با یک الگوریتم ساده قابل پیاده‌سازی است. در ادامه به معرفی این روش پرداخته و برای نشان دادن دقت نسبتاً بالای آن به ارایه‌ی چند مثال خواهیم پرداخت.

واژه‌های کلیدی: روش هم‌محلی طیفی، روش تکرار تغییراتی، معادلات انتگرال فردهلم غیرخطی.  
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: ۴۵G۱۰، ۴۵B۰۵، ۶۵M۷۰.

### ۱. پیش‌گفتار

برای توصیف بسیاری از پدیده‌های موجود در جهان فیزیکی علاوه بر معادلات دیفرانسیل، معادلات انتگرال نیز سهم قابل توجهی را به خود اختصاص داده است. بنابراین بعضی مواقع لازم است به جای یک معادله دیفرانسیل از یک معادله انتگرال استفاده کنیم. به طور کلی معادلات انتگرال شامل تابع مجهول  $u(x)$  در داخل یا بیرون انتگرال می‌باشد. حدود انتگرال بسته به نوع آن معادله، ثابت، متغیر و یا تابع است. همزمان با ظهور معادلات انتگرال در علوم مختلف تلاش‌هایی نیز برای حل آن‌ها صورت پذیرفت. روش تکرار تغییراتی که از آن به عنوان یک روش نیمه تحلیلی یاد می‌شود برای حل معادلات انتگرال غیرخطی در بسیاری از موارد ناکارآمد می‌باشد. بکارگیری روش هم‌محلی که در دسته‌ی روش‌های عددی قرار دارد نیز برای حل معادلات انتگرال غیرخطی گاهی اوقات ممکن است منجر به محاسبات پیچیده و طولانی گردد. برای غالب آمدن بر مشکلات فوق در این مقاله به بررسی و کارایی روش ترکیبی یاد شده بر روی معادلات انتگرال فردهلم غیرخطی زیر می‌پردازیم،

$$u(t) = f(t) + \lambda \int_0^T k(s, t) G(u(s)) ds, \quad t \in [0, T],$$

که در آن  $k(s, t)$  هسته انتگرال و  $G(u)$  عامل غیرخطی معادله و یک تابع هموار می‌باشد. لازم به ذکر است که وجود و یکتایی جواب معادله‌ی فوق در مرجع [۱] بررسی شده است.

در چند دهه اخیر روش‌های عددی متعددی برای حل انواع معادلات انتگرال بکار گرفته شده است. از این موارد می‌توان به روش هم‌محلی طیفی بر پایه چند جمله‌ای‌های لژاندر اشاره کرد [۲]. در این روش، جواب معادله انتگرال بصورت یک سری از توابع پایه‌ای تخمین زده می‌شود. در اینجا توابع پایه همان توابع چند جمله‌ای متعامد لژاندر  $l_m(t)$  می‌باشد که در بازه‌ی  $[0, 1]$  به صورت زیر تعریف می‌شوند [۳]،

$$l_0(t) = 1; l_1(t) = t;$$

$$(m+1)l_{m+1}(t) = (2m+1)tl_m(t) - ml_{m-1}(t); \quad m = 1, 2, 3, \dots,$$

البته این توابع را می‌توان در صورت نیاز به بازه‌های دیگر نیز انتقال داد. در روش هم‌محلی با تقریب تابع مجهول  $u(t)$  به صورت،

$$u(t) \simeq \sum_{i=0}^m a_i l_i(t),$$

و جایگذاری در رابطه‌ی (۱) به معادله‌ای با تعداد  $m$  مجهول  $a_i$  دست می‌یابیم و با قرار دادن  $m$  نقطه‌ی هم‌محلی به جای  $t$  به یک دستگاه معادلات غیرخطی می‌رسیم. برای غلبه بر مشکل غیرخطی بودن دستگاه در این مقاله قصد داریم از ترکیب این روش با روش تکرار تغییراتی استفاده کنیم. مشابه این ایده قبلاً دلیری و صابری نجفی به کمک چند جمله‌ای‌های چبیشف بررسی کرده‌اند [۲].

روش تکرار تغییراتی نخستین بار توسط جی هوان هی دانشمند چینی در سال ۱۹۹۸ معرفی شد. برای شرح این روش، معادله دیفرانسیل زیر را در نظر می‌گیریم:

$$L[u(t)] + N[u(t)] = f(t),$$

که در آن  $L$  عملگر خطی و  $N$  عملگر غیرخطی و  $f(t)$  یک تابع معلوم است. اکنون برای حل معادله (۳) به روش تکرار تغییراتی می‌توان تابع تصحیح زیر را در نظر گرفت:

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda(t, s) \{Lu_n(s) + N\tilde{u}_n(s) - f(s)\} ds,$$

که در آن  $\lambda(t, s)$  ضریب لاگرانژ بهینه در قضیه تنوری تغییرات است [۶] و  $u_n$  تقریب  $n$  ام جواب و  $\tilde{u}_n$  یک تغییر محدود در نظر گرفته می‌شود، به عبارت دیگر  $\delta \tilde{u}_n = 0$ . برای یافتن پاسخ معادله (۳) ضریب لاگرانژ  $\lambda(t, s)$  به گونه‌ای انتخاب می‌شود که تابع تصحیح ایستا باشد. یا بطور معادل  $\delta \tilde{u}_{n+1} = 0$ ، سپس با داشتن ضریب لاگرانژ  $\lambda(t, s)$  و انتخاب تابع اولیه دلخواه  $u_0$  که در شرایط اولیه یا مرزی مساله صدق کند، تقریب‌های متوالی  $u_n$ ،  $n \geq 1$  از جواب دقیق  $u(t)$  بدست می‌آیند و در نتیجه،

$$u(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t).$$

همگرایی روش در مرجع [۴] بررسی شده است.

## ۲. روش ترکیبی برای حل معادلات انتگرال فردهلم غیرخطی

بکارگیری روش تکرار تغییراتی روی معادله (۱) به رابطه‌ی تکراری زیر می‌انجامد [۶]،

$$u_{n+1}(t) = f(t) + \int_0^T k(t, s) G(u_n(s)) ds.$$

در ادامه با انتخاب مقدار دلخواه  $u_0(t)$  و جایگذاری در روند تکراری رابطه (۵) می‌توان به تقریب مناسب از تابع مجهول  $u(t)$  رسید. اما در این روش ما در هر مرحله نیاز به محاسبه تحلیلی انتگرال داریم که این محاسبات دشوار و گاهی اوقات غیر ممکن می‌باشد. برای رفع این ایراد در هر مرحله با استفاده از رابطه (۲) تقریب زیر را برای  $G(u_n(t))$  روی بازه  $[0, T]$  در نظر می‌گیریم،

$$G(u_n(t)) \simeq \sum_{j=0}^m b_j^n L_j(t),$$

که در آن  $L_j(t)$ ،  $j$  امین چند جمله‌ای انتقال یافته لژاندر روی بازه  $[0, T]$  می‌باشد. اکنون بازه  $[0, T]$  را به  $m+1$  نقطه هم محلی بصورت زیر،

$$t_i = \frac{T}{\pi} \left(1 - \cos\left(\frac{\pi i}{m}\right)\right), \quad i = 0, 1, \dots, m,$$

که نقاط گاوس-چیبیشف-لوباتو هستند شبکه‌بندی می‌کنیم. با جایگذاری این گره‌ها در رابطه (۶) و حل دستگاه حاصل، مقادیر  $b_j^n$  معلوم می‌شوند. سپس رابطه (۶) را در معادله (۵) جایگذاری می‌کنیم. بنابراین در  $m+1$  گره  $t_i$  داریم:

$$u_{n+1}(t_i) = f(t_i) + \int_0^T k(t_i, s) \sum_{j=0}^m b_j^n L_j(t_i) ds, \quad i = 0, 1, \dots, m,$$

یا به عبارتی:

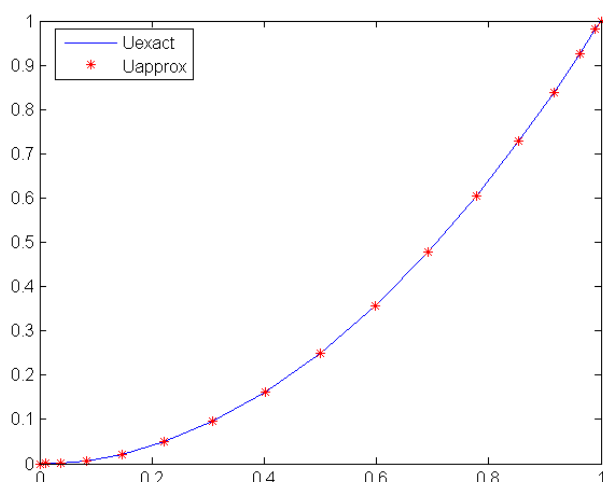
$$u_{n+1}(t_i) = f(t_i) + \sum_{j=0}^m b_j^n \underbrace{\int_0^T k(t_i, s) L_j(t_i) ds}_{k_{ij}}, \quad i = 0, 1, \dots, m.$$

رابطه (۹) رابه شکل ماتریسی زیر می‌توان نوشت،

$$U_{n+1} = F + K b_n,$$

که در آن ماتریس  $K$  و بردارهای  $U_{n+1}$  و  $F$ ،  $b_n$  بصورت زیر می‌باشند،

$$K = (k_{ij})_{i,j=0,\dots,m}, \quad U_{n+1} = [u_{n+1}(t_0), u_{n+1}(t_1), \dots, u_{n+1}(t_m)]^T, \\ F = [f(t_0), f(t_1), \dots, f(t_m)]^T, \quad b_n = [b_0^n, b_1^n, \dots, b_m^n]^T.$$



شکل ۱. مقایسه جواب تقریبی و جواب دقیق با  $m = 16$  برای مثال ۱.۳

بنابراین در رابطه تکراری (۱۰) در هر مرحله برای محاسبه  $U_{n+1}$  ماتریس  $K$  و بردار  $F$  ثابت هستند و کافی است فقط بردار  $b_n$  بروزرسانی گردد که این خود باعث صرفه‌جویی در وقت و هزینه محاسباتی می‌گردد.

### ۳. مثال‌های عددی

مثال ۱.۳. معادله انتگرال فردهلم غیرخطی زیر را،

$$u(t) = t^2 - \frac{1}{4}(e-1)t + \int_0^1 ste^{u(s)} ds,$$

مورد بررسی قرار می‌دهیم. جواب دقیق این معادله  $u(t) = t^2$  می‌باشد. این معادله را به روش ترکیبی بیان شده به کمک نرم‌افزار متلب حل کرده‌ایم. شکل ۱ مقایسه جواب دقیق و جواب تقریبی حاصل از روش ترکیبی را نشان می‌دهد. در جدول ۱ نیز خطای حاصل برای تعداد نقاط مختلف با نرم  $L_2$  و نرم  $L_\infty$  آورده شده است. با توجه به نتایج بدست آمده با افزایش تعداد نقاط دقت تقریب نیز افزایش می‌یابد. برای محاسبه خطای تقریب با نرم  $L_2$  و  $L_\infty$  از روابط زیر استفاده شده است،

$$L_2 = \sqrt{\sum_{j=0}^m (u_n(t_j) - u_{exact}(t_j))^2}, \quad L_\infty = \max_j |u_n(t_j) - u_{exact}(t_j)|.$$

مثال ۲.۳. معادله انتگرال فردهلم غیرخطی زیر با جواب دقیق  $u(t) = e^t$  را مورد بررسی قرار داده‌ایم،

$$u(t) = e^t - \frac{2}{3}(e\sqrt{e}-1)t + \int_0^1 te^s \sqrt{u(s)} ds,$$

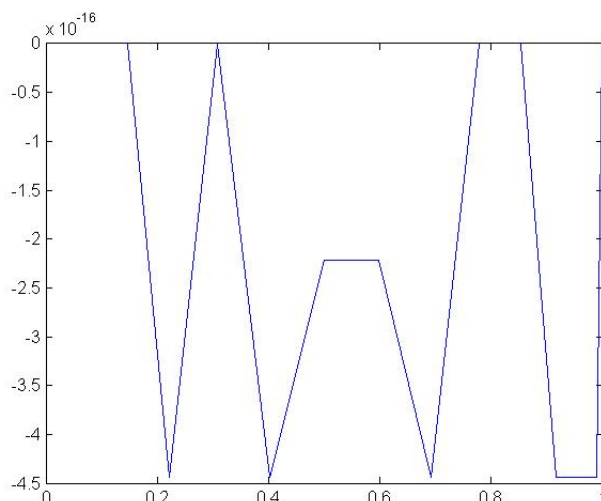
نتایج بدست آمده از حل این معادله در نمودار ۲؟ و جدول ۲ خلاصه شده است. این نتایج حاکی از دقت نسبتاً بالا و کارایی روش گفته شده می‌باشد.

جدول ۱. خطای تقریب با نرم  $L_2$  و  $L_\infty$  برای مثال ۱.۳

$m$	۴	۶	۸	۱۲	۱۶
$L_2$	$7.2965e-04$	$3.8751e-06$	$2.5979e-08$	$1.3095e-12$	$7.4679e-16$
$L_\infty$	$5.1594e-04$	$2.3368e-06$	$1.3886e-08$	$5.8564e-13$	$3.3307e-16$

جدول ۲. خطای تقریب با نرم  $L_2$  و  $L_\infty$  برای مثال ۲.۳

$m$	۴	۶	۱۰	۱۲	۱۶
$L_2$	$۱/۹۰۹۰e - ۰۷$	$۱/۵۲۱۶e - ۱۱$	$۳/۳۶۸۸e - ۱۵$	$۳/۱۷۹۲e - ۱۵$	$۱/۱۳۲۲e - ۱۵$
$L_\infty$	$۱/۳۴۹۹e - ۰۷$	$۹/۱۷۵۸e - ۱۲$	$۱/۰۸۱۸e - ۱۵$	$۱/۷۷۶۴e - ۱۵$	$۴/۴۴۰۹e - ۱۶$



شکل ۲. نمودار خطای جواب تقریبی با  $m = ۱۶$  برای مثال ۲.۳

#### ۴. نتیجه‌گیری

در این مقاله، روش ترکیبی تکرار تغییراتی و هم‌محلی طیفی با پایه چند جمله‌ای‌های لژاندر را برای حل عددی معادلات انتگرال فردهلم غیرخطی به کار بردیم. در این روش با استفاده از ایده نقاط هم محلی ایراد غیرخطی بودن و پیچیدگی محاسباتی روش تکرار تغییراتی را تا حد زیادی برطرف نمودیم. همچنین نزدیک بودن جواب‌های عددی با مقدار دقیق معادله بیانگر دقت و توانمندی این روش در حل این گونه معادلات می‌باشد.

#### مراجع

1. K.E Atkinson, *The numerical solution of integral equations of the second kind*, vol.4. Cambridge University press, Cambridge, (1997).
2. M.H. Daliri and J. saberi-Nadjafi, *Improved variational iteration method for solving a class of nonlinear Fredholm integral equations*, Sociedad Espanola de Matematica Aplicada, Springer, 2018.
3. K. Maleknejad and K. Nouri, M. Yousefi, *Discussion on convergence of Legendre polynomial for numerical solution of integral equations*, Applied Mathematics and Computation, 193, 335–339, (2007).
4. M. Tatari and M. Dehghan, *On the convergence of He's variational iteration method*, J. Comput. Appl. Math. 207 (2007) 121–128.
5. H.L. Tidke and C.T. Aage, J.N. Salunke, *Existence and uniqueness of continuous solution of mixed type integral equations in cone metric space*, Kathmandu Univ. J. Sci. Eng. Technol., 7(1), 48–55 (2011).
6. L. Xu, *Variational iteration method for solving integral equations*, Computers and Mathematics with Applications 54 (2007) 1071–1078.

پست الکترونیکی: [hesameddini@sutech.ac.ir](mailto:hesameddini@sutech.ac.ir)

پست الکترونیکی: [R.ghaedi@sutech.ac.ir](mailto:R.ghaedi@sutech.ac.ir)



## کاربرد ماتریس‌های خاص در رمزنگاری

عظیم ریواز\*

بخش ریاضی، دانشگاه شهیدباهنر کرمان، کرمان، ایران

و محله رئیسی سرخونی

دانشکده ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهیدباهنر کرمان، کرمان، ایران

چکیده. هدف از این مقاله ارائه یک روش رمزنگاری شامل یک کلید خصوصی و یک کلید عمومی است که با ماتریس‌های هم‌زاویه و عدد شرطی آن‌ها در ارتباط است. در واقع با انتخاب یک عدد  $p > 1$  و ساخت یک ماتریس نامنفرد و استفاده از تابع  $\alpha = f(p)$  به عنوان کلید خصوصی، ماتریس هم‌زاویه  $S$  با عدد شرطی  $p$  به عنوان کلید عمومی چنان ساخته می‌شود که رمزنگاری توسط  $S$  و رمزگشایی توسط تابع  $\alpha = f(p)$  انجام می‌شود.

واژه‌های کلیدی: رمز، رمزگشایی، ماتریس‌های هم‌زاویه، ماتریس‌های بدو-مربع.

طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 94A60, 15A30.

## ۱. پیش‌گفتار

رمزنگاری یکی از قدیمی‌ترین ابزارهای مورد نیاز در مسائل امنیتی است و اکنون جهت تأمین امنیت فضای مجازی در برقراری ارتباط‌های امن اهمیت ویژه‌ای دارد. رمزنگاری میهم نمودن اطلاعات به طریقی است که از دید دشمن پنهان شود و رقیب نیز نتواند هیچ تغییری در اطلاعات صورت دهد و در عین حال فرد مجاز یعنی فردی که دارای کلید مناسب برای رمزگشایی اطلاعات باشد، قادر به مشاهده و استفاده از اطلاعات باشد. در زیر تعریفی دقیق‌تر از یک سیستم رمزنگاری بیان می‌شود.

**تعریف ۱.۱.** یک سیستم رمزنگاری با پنج گانه  $(P, C, K, E, D)$  نمایش داده می‌شود که  $P$  یک مجموعه‌ی متناهی از متن‌های خام،  $C$  یک مجموعه‌ی متناهی از متن‌های رمز شده،  $K$  فضای کلید شامل مجموعه‌ای متناهی از کلیدها است و همچنین برای هر کلید متعلق به فضای کلید یک تابع رمز کردن مانند  $e$  متعلق به  $E$  و یک تابع رمزگشایی مانند  $d$  متعلق به  $D$  وجود دارد به گونه‌ای که برای هر متن خام مانند  $x$  داریم:

$$d(e(x)) = x$$

یکی از روش‌های رمزگذاری رمزهای جایگزینی است و از قدیمی‌ترین رمزهای شناخته شده رمز سزاری است که در این مقاله نیز از آن استفاده می‌شود.

**مثال ۲.۱.** اگر حروف انگلیسی به همراه  $\cdot$  و  $-$  (فاصله) را به صورت زیر در نظر بگیرید:

A	B	C	...	Z	.	-
۰	۱	۲	...	۲۵	۲۶	۲۷

در روش سزاری هر حرف به اندازه سه حرف جابه جا می‌شود. در این مقاله جابه جایی حروف با  $k \in \mathbb{N}$ ،  $k > 1$  انجام می‌گیرد و تابع رمز کردن  $e_k$  و رمزگشایی  $d_k$  نیز به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$e_k(x) = y$$

$$d_k(y) = x$$

منظور از  $x$  متن خام و  $y$  متن رمز شده است.

به طور معمول رمزنگاری به دو طریق انجام می‌گیرد:

روش اول: رمزنگاری متقارن است که به آن رمزنگاری کلید خصوصی نیز می‌گویند (مثال ۲.۱).

روش دوم: رمزنگاری نامتقارن (رمزنگاری کلید عمومی) است.

تفاوت این دو روش در تعداد کلیدهاست. در روش اول فقط از یک کلید استفاده می‌شود در حالی که در روش دوم از دو کلید استفاده می‌شود [۱].

در این مقاله یک روش رمزنگاری معرفی می‌شود که ترکیبی از این دو روش است و برخلاف سایر رمزنگاری‌ها که از نظریه اعداد الهام

\* سخنران

گرفته‌اند در این روش از اطلاعات جبرخطی استفاده شده است. در ادامه جهت ارائه نتایج اصلی، برخی مفاهیم و تعاریف اولیه مورد نیاز ارائه می‌گردند. تمامی محاسبات در فضای برداری  $\mathbb{R}^n$  روی میدان  $\mathbb{R}$  صورت می‌گیرد و  $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$  و  $\alpha = \cos \theta$  فرض می‌شود و  $Cond(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$  عدد شرطی ماتریس  $A$ ،  $I$  ماتریس همانی و  $e = (1, \dots, 1)^t$  است و ماتریس  $S = [s_1, \dots, s_n]$  را هم‌زاویه یک‌ه نامیم اگر

$$G_\alpha = S^t S = \alpha e e^t + (1 - \alpha) I$$

و  $EM_\alpha^n$  مجموعه‌ی همه ماتریس‌های  $n \times n$  هم‌زاویه با زاویه  $\theta$  است.

لم ۳.۱. فرض کنید  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ماتریسی نامنفرد باشد در این صورت تجزیه‌ای به صورت  $A = SR$  برای این ماتریس وجود دارد به‌طوری‌که  $S \in EM_\alpha^n$ ،  $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$  که  $R$  یک ماتریس بالا مثلثی است. [۲]

لم ۴.۱. اگر  $S \in EM_\alpha^n$  آنگاه  $S^{-1} = \beta G_{\alpha'} S^t$  که در آن

$$\alpha' = \frac{-\alpha}{1 + (n-2)\alpha}, \quad \beta = \frac{1 + (n-2)\alpha}{(1-\alpha)(1+(n-1)\alpha)}$$

## ۲. نتایج اصلی

در این بخش هدف ارائه یک الگوریتم رمزنگاری می‌باشد، برای این منظور متن خام و متن رمز شده به صورت برداری در  $\mathbb{R}^n$  در نظر گرفته می‌شود، بنابراین بردار  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$  و عدد دلخواه  $k > 1$  و  $p > 1$  را به عنوان ورودی و کلید خصوصی در نظر بگیرید و با استفاده از اعداد انتخابی  $k, p$  ماتریس  $n \times n$ ،  $A = (a_{ij})$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= (-1)^{kp} \frac{kp}{n} & i = j \\ &= (-1)^{ij} \frac{kp}{n} & j > i \\ &= (-1)^{kp} \frac{kp}{n} & j < i \end{aligned}$$

با استفاده از کلید خصوصی تابع  $\alpha = f(p)$ ، زاویه  $\theta = \cos^{-1}(f(p))$  توسط گیرنده محاسبه می‌شود و سپس توسط الگوریتم هم‌زاویه ساز ماتریس هم‌زاویه  $S$  تولید و به عنوان کلید عمومی شناخته می‌شود و لازم به ذکر است که می‌توان نشان داد که  $Cond(S) = p$  اکنون  $x$  با الگوریتم جایگزینی و کلید  $k$  رمز اولیه و سپس بردار جدید که با  $x'$  نشان می‌دهیم به صورت  $Sx' = y$  رمز و  $y$  به عنوان رمز شده نهائی منتشر می‌شود. اکنون با استفاده از کلید خصوصی  $\alpha = f(p)$  توابع  $h(p)$  و  $g(p)$  و در نهایت ماتریس  $N(f(p))$  به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} g(p) &= \frac{1 + (n-2)f(p)}{(1-f(p))(1+(n-1)f(p))}, \\ h(p) &= \frac{-f(p)}{1 + (n-2)f(p)}, \\ N(f(p)) &= g(p)G_{h(p)}S^t. \end{aligned}$$

رمزگشایی اولیه به صورت  $y = N(f(p))x'$  انجام می‌گیرد. حال با استفاده از کلید خصوصی  $k$  توسط بردار  $x'$ ، بردار  $x$  به دست می‌آید.

همچنین در پایان لازم به ذکر است که با توجه به اینکه  $Cond(S) = p$  می‌باشد و می‌دانیم که اگر  $p > 1$  آنگاه،  $S$  بد وضع می‌باشد و محاسبه  $N(f(p))$  به عنوان رمزگشا با داشتن کلید عمومی  $S$  امکان پذیر نمی‌باشد.

مثال ۱.۲. فرض کنید  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_7 \end{pmatrix}$  و  $p = 7$  و  $k = 4$  باشد. بنابراین

$$A = \begin{bmatrix} 28 & 4 & -4 & 4 & -4 & 4 & -4 \\ 4 & 28 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 28 & 4 & -4 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & 4 & 28 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 28 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 28 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 28 \end{bmatrix}$$

و  $\theta = \cos^{-1}(\frac{48}{55})$ ،  $f(p) = \frac{48}{55}$

$$S = \begin{bmatrix} 0.9439 & 0.7243 & 0.7045 & 0.7052 & 0.6980 & 0.7017 & 0.6100 \\ 0.1348 & 0.5845 & 0.2624 & 0.2630 & 0.2558 & 0.2595 & 0.2578 \\ 0.1348 & 0.1636 & 0.5496 & 0.2041 & 0.1946 & 0.1995 & 0.1972 \\ 0.1348 & 0.1636 & 0.1821 & 0.5495 & 0.2041 & 0.2077 & 0.2060 \\ 0.1348 & 0.1636 & 0.1821 & 0.1732 & 0.5393 & 0.1748 & 0.1717 \\ 0.1348 & 0.1636 & 0.1821 & 0.1732 & 0.1962 & 0.5443 & 0.1983 \\ 0.1348 & 0.1636 & 0.1821 & 0.1732 & 0.1962 & 0.1747 & 0.5418 \end{bmatrix}$$

حال اگر متن رمز شده

$$y = \begin{pmatrix} 619487 \\ 235889 \\ 250991 \\ 252261 \\ 176562 \\ 173168 \\ 233956 \end{pmatrix}$$

باشد، رمزگشایی را به صورت زیر انجام می‌دهیم.  
با محاسبه‌ی مستقیم داریم  $g(p) = 675576$  و  $h(p) = -0.1627$ ، در نتیجه

$$N(f(p)) = \begin{bmatrix} 1.7237 & -1.1591 & -0.7476 & -0.7522 & -0.6332 & -0.6915 & -0.6617 \\ -0.0019 & 2.3728 & -0.5217 & -0.5263 & -0.4073 & -0.4655 & -0.4368 \\ -0.1568 & -0.1570 & 2.5115 & -0.3808 & -0.2617 & -0.3200 & -0.2913 \\ -0.1520 & -0.1522 & -0.2030 & 2.5055 & -0.3317 & -0.3900 & -0.3613 \\ -0.2081 & -0.2038 & -0.2778 & -0.2083 & 2.5446 & -0.2094 & -0.1807 \\ -0.1739 & -0.1795 & -0.2394 & -0.1795 & -0.3193 & 2.5257 & -0.3499 \\ -0.1929 & -0.1932 & -0.2576 & -0.1931 & -0.3435 & -0.1932 & 2.5346 \end{bmatrix}$$

و

$$x' = N(f(p))y = \begin{pmatrix} 3.0374 \\ 4.0374 \\ 23.0372 \\ 24.0372 \\ 7.0373 \\ 4.0374 \\ 22.0371 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 23 \\ 24 \\ 7 \\ 4 \\ 22 \end{pmatrix}$$

اکنون با توجه به الگوریتم جایگزینی و کلید  $k = 4$  داریم

$$x = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 27 \\ 0 \\ 11 \\ 8 \\ 26 \end{pmatrix}$$

بنابراین متن خام " $Hi \quad Ali$ " می باشد.

### مراجع

۱. ا. میوالد و م. س. ا. صفائی، امنیت شبکه، انتشارات دانش پرور، ۱۳۸۳.
2. A. Rivaz, D. Sadeghi, *An algorithm for constructing Equiangular vectors*, submitted.

پست الکترونیکی: [arivaz@uk.ac.ir](mailto:arivaz@uk.ac.ir)

پست الکترونیکی: [raeisi.mohadese@yahoo.com](mailto:raeisi.mohadese@yahoo.com)



## ماتریس‌های هم‌زاویه ستونی و متعامد سطری

سمیه زنگونی زاده\*

بخش ریاضی کاربردی، دانشکده ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران  
و ملیکا ابوسعیدی  
بخش ریاضی کاربردی، دانشکده ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران

چکیده. در این مقاله پس از معرفی اجمالی الگوریتم هم‌زاویه‌ساز به عنوان تعمیمی از الگوریتم گرام-اشمیت و همچنین معرفی ماتریس‌های هم‌زاویه، ارتباط بین ماتریس‌های هم‌زاویه و متعامد مطرح می‌شود. سپس روشی برای ساخت یک ماتریس با ستون‌های هم‌زاویه و سطری متعامد ارائه می‌گردد.

واژه‌های کلیدی: الگوریتم گرام-اشمیت، الگوریتم هم‌زاویه‌ساز، ماتریس متعامد، ماتریس هم‌زاویه.  
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 15A30, 15A03, 15A23.

### ۱. پیش‌گفتار

اگر  $a_1, a_2, \dots, a_n$  بردارهای مستقل خطی باشند، در این صورت با استفاده از الگوریتم گرام-اشمیت می‌توان بردارهای متعامد یکه  $q_1, q_2, \dots, q_n$  را ایجاد نمود. از این طریق می‌توان برای هر ماتریس  $A$  تجزیه  $QR$  که  $Q$  ماتریسی متعامد و  $R$  ماتریسی بالامثلثی است را بدست آورد [۲، ۳، ۴، ۵، ۶]. الگوریتم هم‌زاویه‌ساز که تعمیمی از الگوریتم گرام-اشمیت است، با فرض مستقل خطی بودن بردارهای  $a_1, a_2, \dots, a_n$  و انتخاب زاویه دلخواه  $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$  به ایجاد بردارهای هم‌زاویه  $s_1, s_2, \dots, s_n$  می‌پردازد به طوری که

$$(1) \quad s_i^T s_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ \alpha & i \neq j \end{cases}$$

که  $\alpha = \cos \theta$  است. الگوریتم هم‌زاویه‌ساز، توسط دکتر ریواز و دکتر صادقی در سال ۲۰۱۴ مطرح شد [۷]. می‌توان انتظار داشت که بردارهای هم‌زاویه همانند بردارهای متعامد در مواردی چون پردازش تصویر، پردازش سیگنال، نظریه کدگذاری دارای کاربرد باشند. این الگوریتم منجر به تجزیه  $SR$  برای ماتریس نامنفرد  $A$  می‌گردد به طوری که  $S$  ماتریسی با ستون‌های هم‌زاویه و  $R$  ماتریسی بالامثلثی می‌باشد. در این مقاله به معرفی روشی جدید برای دستیابی به ماتریس‌هایی با ستون‌های هم‌زاویه و سطری متعامد می‌پردازیم.

در این مقاله منظور از ماتریس هم‌زاویه ماتریسی با ستون‌های هم‌زاویه با زاویه  $\theta$  می‌باشد و  $e \in \mathbb{R}^n$  بردار  $[1, 1, \dots, 1]^T$  است همچنین  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  پایه متعامد استاندارد  $\mathbb{R}^n$  می‌باشد. اگر  $A = [a_1, a_2, \dots, a_m]$  یک ماتریس  $n \times m$  باشد ماتریس  $G = A^T A$  که  $G_{ij} = a_i^T a_j$  ماتریس گرام متناظر با  $A$  نامیده می‌شود [۲]. اگر  $S$  ماتریس هم‌زاویه با زاویه  $\theta$  باشد به طوری که  $\alpha = \cos(\theta)$ ، آن گاه ماتریس گرام متناظر با آن به صورت زیر است:

$$G_\alpha = S^T S = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \dots & \alpha \\ \alpha & 1 & \dots & \alpha \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha & \alpha & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

لم ۱۰۱. مقادیر ویژه ماتریس گرام  $G_\alpha$  متناظر با ماتریس هم‌زاویه  $S$ ،  $1 - \alpha$  با تکرار جبری  $n - 1$  و  $1 + (n - 1)\alpha$  می‌باشند.

### ۲. نتایج اصلی

در این بخش به بیان ارتباط بین ماتریس‌های هم‌زاویه و متعامد می‌پردازیم. سپس روشی برای ساخت ماتریسی با ستون‌های هم‌زاویه  $\theta$  و سطری متعامد مطرح می‌کنیم و در پایان فرم صریحی برای دستیابی به معکوس این نوع ماتریس‌ها ارائه می‌دهیم.

لم زیر ارتباط بین ماتریس‌های هم‌زاویه و متعامد را بیان می‌کند.

لم ۱۰۲. هر ماتریس هم‌زاویه  $S$  را می‌توان به صورت ترکیب خطی زیر نوشت

$$(۲) \quad S = pUV^T + qUNV^T$$

که در آن  $N = ne_1e_1^T$ ،  $p = \sqrt{1-\alpha}$  و  $U$  و  $V$  ماتریس‌های متعامد به دست آمده از تجزیه تکین ماتریس  $S$  هستند و همچنین  $q$  از رابطه  $\alpha = pq + nq^2$  به دست می‌آید.

□

اثبات. برای اثبات به [۱] رجوع شود.

در قضیه بعد روشی برای ساخت ماتریس  $S$  که دارای ستون‌های هم‌زاویه و سطرهاى متعامد می‌باشد، با استفاده از یک ماتریس متعامد ارائه می‌گردد.

قضیه ۲۰۲. هر ماتریس  $S$  به صورت

$$(۳) \quad S = \text{diag}(p + nq, p, \dots, p)V^T$$

که در آن  $N = ne_1e_1^T$  و  $V$  یک ماتریس متعامد با شرط  $VNV^T = ee^T$  و اسکالره‌ای  $p$  و  $q$  با استفاده از شرایط زیر

$$\bullet \quad p(p + 2q) + nq^2 = 1$$

$$\bullet \quad 2pq + nq^2 = \alpha$$

انتخاب می‌شوند، یک ماتریس با سطرهاى متعامد و ستون‌های هم‌زاویه با زاویه  $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$  است به طوری که  $\alpha = \cos\theta$ .

اثبات. برای اثبات باید نشان دهیم

$$S^T S = G_\alpha$$

$$S^T S = (\text{diag}(p + nq, p, \dots, p)V^T)^T (\text{diag}(p + nq, p, \dots, p)V^T)$$

حال با توجه به تعامد  $V$  و شکل خاص ماتریس  $N$  داریم:

$$S^T S = p^2 I + (2pq + nq^2)ee^T = G_\alpha$$

□

علاوه بر این

$$SS^T = \text{diag}(1 + (n-1)\alpha, 1-\alpha, \dots, 1-\alpha)$$

که نشان می‌دهد سطرهاى ماتریس  $S$  با یکدیگر متعامدند.

با توجه به قضیه قبل اگر ماتریس متعامد  $V$  طوری انتخاب شود که در شرط  $VNV^T = ee^T$  صدق کند و اسکالره‌ای  $p$  و  $q$  را با در نظر گرفتن شرایط ذکر شده در قضیه انتخاب کنیم در نتیجه با استفاده از رابطه ۲ می‌توان ماتریس هم‌زاویه با سطرهاى متعامد را به دست آورد.

نکته ۳۰۲. در قضیه ۲۰۲، اگر  $p$  و  $q$  بدون در نظر گرفتن شرایط به گونه‌ای انتخاب شوند که در شرط  $1 < 2pq + nq^2 < 1 - \alpha$  صدق کنند، آنگاه  $S$  دارای ستون‌های هم‌زاویه غیر یک و سطرهاى متعامد می‌باشد.

در قضیه بعد معکوس ماتریس هم‌زاویه  $S$  به دست آورده می‌شود که ماتریسی با ستون‌های متعامد غیر یک و هم‌زاویه سطری است.

قضیه ۴۰۲. اگر  $S$  ماتریس هم‌زاویه به دست آمده از قضیه ۲۰۲ باشد. آنگاه

$$S^{-1} = V \text{diag}\left(\frac{1}{p+nq}, \frac{1}{p}, \dots, \frac{1}{p}\right),$$

که  $V$  ماتریسی متعامد با شرط  $VNV^T = ee^T$  می‌باشد.

اثبات. برای اثبات کافی است نشان دهیم

$$SS^{-1} = I$$

$$SS^{-1} = \text{diag}(p + nq, p, \dots, p)V^T V \text{diag}\left(\frac{1}{p+nq}, \frac{1}{p}, \dots, \frac{1}{p}\right)$$

حال با توجه به تعامد ماتریس  $V$  داریم

$$SS^{-1} = \text{diag}(p + nq, p, \dots, p) \text{diag}\left(\frac{1}{p + nq}, \frac{1}{p}, \dots, \frac{1}{p}\right) = I.$$

□

مثال ۵.۲. فرض کنید

$$V = \begin{bmatrix} -0.4472 & 0 & 0 & 0 & 0.8944 \\ -0.4472 & 0.8389 & 0.423 & -0.2108 & -0.2236 \\ -0.4472 & -0.2474 & -0.8292 & 0.351 & -0.2236 \\ -0.4472 & -0.1224 & 0.3708 & 0.7730 & -0.2236 \\ -0.4472 & -0.4691 & 0.4161 & -0.5973 & -0.2236 \end{bmatrix}.$$

به راحتی می‌توان بررسی کرد که ماتریس  $V$  در شرط قضیه ۲.۲ صدق می‌کند. اگر اعداد  $p$  و  $q$  به صورت  $p = 0.3660$  و  $q = 0.3494$  انتخاب شوند، ماتریس به دست آمده از رابطه ۲ به صورت زیر است.

$$S = \text{diag}(p + nq, p, \dots, p) V^T = \begin{bmatrix} -0.9449 & -0.9449 & -0.9449 & -0.9449 & -0.9449 \\ 0 & 0.3070 & -0.0905 & -0.0448 & -0.1717 \\ 0 & 0.155 & -0.3035 & 0.1357 & 0.1523 \\ 0 & -0.0772 & 0.0128 & 0.2829 & -0.2186 \\ 0.3274 & -0.0818 & -0.0818 & -0.0818 & -0.0818 \end{bmatrix},$$

داریم

$$2pq + nq^2 = 0.8660$$

به راحتی می‌توان بررسی کرد که

$$G_{\alpha} = 0.8660 ee^T + (1 - 0.8660)I,$$

یعنی  $S$  ماتریسی هم‌زاویه با زاویه  $\theta = \cos^{-1}(2pq + nq^2)$  می‌باشد همچنین داریم:

$$SS^T = \text{diag}(0.4641, 0.1340, 0.1340, 0.1340, 0.1340)$$

که نشان می‌دهد سطرهای  $S$  متعامد هستند. معکوس ماتریس هم‌زاویه  $S$  با توجه به قضیه ۴.۲ به صورت زیر می‌باشد

$$S^{-1} = V \text{diag}\left(\frac{1}{p + nq}, \frac{1}{p}, \dots, \frac{1}{p}\right) = \begin{bmatrix} -0.2116 & 0 & 0 & 0 & 2.4437 \\ -0.2116 & 2.2921 & 0.1156 & -0.5760 & -0.6109 \\ -0.2116 & -0.6760 & -2.2656 & 0.0959 & -0.6109 \\ -0.2116 & -0.3344 & 1.0131 & 2.1120 & -0.6109 \\ -0.2116 & -1.2817 & 1.1369 & -1.6320 & -0.6109 \end{bmatrix}.$$

اگر اعداد  $p$  و  $q$  به صورت  $p = \frac{1}{4}$  و  $q = \frac{1}{8}$  انتخاب شوند، ماتریس

$$S = \begin{bmatrix} -0.5590 & -0.5590 & -0.5590 & -0.5590 & -0.5590 \\ 0 & 0.2097 & -0.0619 & -0.0306 & -0.1173 \\ 0 & 0.106 & -0.2073 & 0.0927 & 0.1040 \\ 0 & -0.0527 & 0.0088 & 0.1933 & -0.1493 \\ 0.2236 & -0.0559 & -0.0559 & -0.0559 & -0.0559 \end{bmatrix}$$

به دست می‌آید. به راحتی می‌توان بررسی کرد که این ماتریس هم‌زاویه با زاویه  $\theta = \cos^{-1}(0.30)$  و دارای ستون‌های غیر یکه می‌باشد. همچنین

$$SS^T = \text{diag}(1.5624, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625).$$

### مراجع

۱. م. ابوسعیدی، آنالیز ماتریس‌ها و چندجمله‌ای‌های هم‌زاویه، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه شهید باهنر کرمان، ۱۳۹۷.
2. B.N. Datta, *Numerical linear algebra and applications*, 2nd ed., pacific Grove, CA:Book/cole, 2013
3. J.W. Demmel, *Applied numerical linear algebra*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM). Philadelphia, 1997
4. C. D. Godsil, and G. Royle, *Algebraic graph theory*, Springer-Verlag, New York, 2001
5. Horn, A. Roger, Johnson and R. Charles, *Matrix analysis*, 2nd ed., New York: Cambridge University Press, 2013
6. D.C. Lay, *Linear Algebra and Its Applications*, International Edition, Pearson Education Limited, 2012
7. A. Rivaz and D. Sadeghi, *An algorithm for constructing Equiangular vectors*, arXiv preprint arXiv:1412.7552, 2014

پست الکترونیکی: [zangoei@uk.ac.ir](mailto:zangoei@uk.ac.ir)

پست الکترونیکی: [melikaabousaedi@yahoo.com](mailto:melikaabousaedi@yahoo.com)

## بازمتعامدسازی با نرم فروبنیوس برای الگوریتم‌های دوقطری‌سازی گولاب-کاهان سراسری و روش لنچوز سراسری

فریده‌السادات شریفی و رضا مختاری\*  
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان ۸۴۱۵۶-۸۳۱۱۱، ایران

چکیده. در بسیاری از روش‌ها در حوزه جبرخطی عددی، به ساختن بردارهای متعامد نیاز می‌شود. متأسفانه هنگام اجرای برخی از این روش‌های عددی مانند روش گولاب-کاهان سراسری، به دلیل خطاهای گردکردن، برخلاف انتظار تعامد بردارها/ماتریس‌ها برقرار نیست و در نتیجه خطا در سایر محاسبات انتشار می‌یابد. یکی از راهکارهای پیشنهادی استفاده از الگوریتم‌های بازمتعامدسازی یا متعامدسازی مجدد است. در این مقاله دو روش بازمتعامدسازی مبتنی بر نرم فروبنیوس ارائه می‌دهیم. **واژه‌های کلیدی:** بازمتعامدسازی، نرم فروبنیوس، دوقطری‌سازی گولاب-کاهان سراسری، روش لنچوز سراسری. **طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]:** 65F25.

### ۱. پیش‌گفتار

الگوریتم‌های عددی بسیاری برای کاهش یک ماتریس دلخواه به یک ماتریس دوقطری یا سه‌قطری وجود دارند که معمولاً در آن‌ها ماتریس‌های یکانی ظاهر می‌شوند. برخی از این الگوریتم‌ها عبارتند از روش لنچوز سراسری<sup>۱</sup> [۳]، دوقطری‌سازی لنچوز-گولاب-کاهان استاندارد<sup>۲</sup>، دوقطری‌سازی گولاب-کاهان سراسری<sup>۳</sup> [۴] و روش گولاب-کاهان-هاوس‌هلدر<sup>۴</sup> [۵]. در چنین الگوریتم‌هایی، هنگام متعامدسازی ممکن است با یک مشکل مواجه شویم که بردارها یا ماتریس‌های به دست آمده در محیط‌های عددی مانند MATLAB متعامد نباشند. این مشکل به دلیل خطاهای گردکردن و در نتیجه حذف ارقام بامعنا به وجود می‌آید. یک راهکار پیشنهادی برای حل این مشکل، متعامدسازی مجدد یا بازمتعامدسازی<sup>۵</sup> است. برای الگوریتم‌هایی که از نرم اقلیدوسی یا نرم دو استفاده می‌کنند، روش‌هایی برای بازمتعامدسازی معرفی شده است؛ به عنوان نمونه به مرجع [۶] مراجعه شود. در این مقاله قصد داریم روش‌های بازمتعامدسازی بر اساس نرم دو را به روش‌هایی برای بازمتعامدسازی با نرم فروبنیوس گسترش دهیم و از آن‌ها در الگوریتم‌هایی مبتنی بر نرم فروبنیوس استفاده کنیم. در این راستا از روش گرام-اشمیت بهبودیافته استفاده می‌کنیم.

### ۲. روش بازمتعامدسازی کامل

در ابتدای این بخش، به بیان چند تعریف مورد نیاز می‌پردازیم.

**تعریف ۱.۰۲.** برای ماتریس‌های  $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ، یک ضرب داخلی به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\langle A, B \rangle_F := \text{tr}(A^T B),$$

که در آن  $\text{tr}(\cdot)$  عملگر اثر است و متناظر با آن، نرم فروبنیوس به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\|A\|_F := \langle A, A \rangle_F^{\frac{1}{2}} = \left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

**تعریف ۲.۰۲.** دو ماتریس  $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ -متعامد نامیده می‌شوند هرگاه  $\langle A, B \rangle_F = 0$ .

حال فرض کنیم ماتریس  $\mathcal{V}_k = [V_1, V_2, \dots, V_k] \in \mathbb{R}^{m \times kn}$  ماتریس به دست آمده از یک الگوریتم مانند روش دوقطری‌سازی گولاب-کاهان سراسری باشد که انتظار داریم ستون‌های آن  $F$ -متعامد یک‌ه باشند، یعنی

$$\langle V_i, V_j \rangle_F = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

<sup>1</sup> Global <sup>2</sup> Standard Golub-Kahan-Lanczos bidiagonalization

<sup>3</sup> Global Lanczos method

\* سخنران

<sup>5</sup> Reorthogonalization

<sup>4</sup> Golub-Kahan-Householder Method

Golub-Kahan bidiagonalization

همچنین فرض کنیم ضرایب  $\alpha_i$  متناظر با ماتریس‌های  $V_i$  باشند (که به طور معمول برای ساختن ماتریس دوقطری استفاده می‌شوند). متأسفانه در عمل به دلیل خطاهای گردن‌کردن، تعامد برقرار نیست. در این صورت قصد داریم ماتریس‌های  $V_i$  را بازمتعامد کنیم. به همین منظور فرض کنیم  $R_k = \alpha_{k+1} V_{k+1}$  و ستون‌های  $\mathcal{V}_k = [V_1, V_2, \dots, V_k]$  در مراحل قبل بازمتعامد شده باشند. در این صورت  $V_{k+1}$  را به گونه‌ای می‌سازیم که به ازای  $i = 1, \dots, k$  بر  $V_i$ ،  $F$ -متعامد باشد. بنابراین برای یک  $\xi_k$  کوچک، می‌توان نوشت

$$\langle V_i, V_j \rangle_F = \begin{cases} 1 + \xi_k, & i = j, \\ \xi_k, & i \neq j. \end{cases}$$

به عبارتی  $\xi_k = \|I_{k \times k} - \mathcal{V}_k^T * F \mathcal{V}_k\|_F$  که در آن  $*F$  یک ضرب فروبنیوس است که به صورت بلوکی انجام می‌شود. پس

$$(1) \quad \mathcal{V}_k^T * F V_{k+1} = [V_1, V_2, \dots, V_k]^T * F V_{k+1} = [\langle V_1, V_{k+1} \rangle_F, \langle V_2, V_{k+1} \rangle_F, \dots, \langle V_k, V_{k+1} \rangle_F]^T.$$

حال با این فرض که ستون‌های  $\mathcal{V}_k$  در مراحل قبل بازمتعامد شده‌اند، مقادیر زیر را محاسبه می‌کنیم

$$W^{(1)} = [w_i^{(1)}]^T, \quad R_k^{(1)} = R_k - \sum_{i=1}^k w_i^{(1)} V_i,$$

که در آن  $w_i^{(1)} = \text{tr}(V_i^T R_k)$  برای هر  $i = 1, \dots, k$ . در ادامه اگر

$$(2) \quad \|R_k^{(1)}\|_F \geq \zeta_{\min} \|R_k\|_F,$$

آن‌گاه قرار می‌دهیم

$$\alpha_{k+1} = \|R_k^{(1)}\|_F, \quad V_{k+1} = R_k^{(1)} / \alpha_{k+1}.$$

در اینجا  $\zeta_{\min} \in (0, 1)$  پارامتری است که برای تعیین اینکه آیا جهت  $R_k^{(1)}$  بر  $\mathcal{V}_k$  متعامد است یا نه، به کار می‌رود و برای بازمتعامدسازی با نرم دو، مقدار  $\zeta_{\min} = \sqrt{0.8}$  برای آن پیشنهاد شده است [۲]. در غیر این صورت قرار می‌دهیم

$$W^{(2)} = [w_i^{(2)}]^T, \quad R_k^{(2)} = R_k^{(1)} - \sum_{i=1}^k w_i^{(2)} V_i,$$

که در آن  $w_i^{(2)} = \text{tr}(V_i^T R_k^{(1)})$  برای هر  $i = 1, \dots, k$ . حال اگر

$$(3) \quad \|R_k^{(2)}\|_F \geq \zeta_{\min} \|R_k^{(1)}\|_F$$

آن‌گاه قرار می‌دهیم

$$\alpha_{k+1} = \|R_k^{(2)}\|_F, \quad V_{k+1} = R_k^{(2)} / \alpha_{k+1}.$$

لم ۳.۲. اگر رابطه (۲) یا (۳) برقرار باشند، آن‌گاه

$$(4) \quad \|\mathcal{V}_k^T * F V_{k+1}\|_F \leq \frac{k^2}{4} \xi_k^2 + \frac{1}{4} k^2 (1+k) \xi_k^3 + \mathcal{O}(\xi_k^4).$$

اگر روابط (۲) و (۳) برقرار نباشند، آن‌گاه ماتریس  $E_J$  را یک ماتریس مربعی  $m \times m$  تعریف می‌کنیم که همه درایه‌های آن به جز درایه  $(j, j)$  صفر و درایه  $(j, j)$  یک باشد و ماتریس  $E_J$  را طوری پیدا می‌کنیم که

$$\|V_k^T * F E_J\|_F = \min_{1 \leq j \leq m} \|V_k^T * F E_j\|_F.$$

سپس قرار می‌دهیم

$$C^{(1)} = [c_i^{(1)}]^T, \quad t^{(1)} = E_J - \sum_{i=1}^k c_i^{(1)} V_i,$$

$$C^{(2)} = [c_i^{(2)}]^T, \quad t^{(2)} = t^{(1)} - \sum_{i=1}^k c_i^{(2)} V_i,$$

که در آن  $c_i^{(1)} = \text{tr}(V_i^T E_J)$  و  $c_i^{(2)} = \text{tr}(V_i^T t^{(1)})$  برای هر  $i = 1, \dots, k$ . در نهایت قرار می‌دهیم

$$(5) \quad V_{k+1} = t^{(2)} / \|t^{(2)}\|_F.$$

لم ۴.۲. اگر ماتریس  $V_{k+1}$  از رابطه (۵) به دست آید، آنگاه

$$\|\mathcal{V}_k^T *_F V_{k+1}\|_F \leq \frac{k^5}{m-k} \xi_k^4 - \frac{2k^6}{(m-k)^2} \xi_k^5 + \mathcal{O}(\xi_k^6). \quad (6)$$

این روش را در الگوریتم ۱ خلاصه کرده‌ایم.

### ۳. روش بازمعامدسازی پارامتری شده

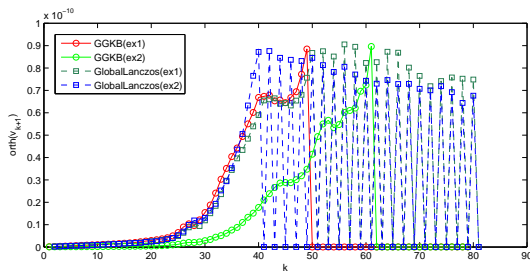
یک روش دیگر مبتنی بر نرم دو، روش بازمعامدسازی پارامتری شده است که در اینجا آن را برای نرم فروبنیوس گسترش می‌دهیم. به همین منظور برای  $j = 1, 2$  قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned} \alpha_{k+1}^{(j)} &= \|R_k\|_F, & V_{k+1} &= R_k / \alpha_{k+1}^{(j)}, \\ W^{(j)} &= [w_i^{(j)}]^T, & R_k^{(j)} &= R_k^{(j-1)} - \sum_{i=1}^k w_i^{(j)} V_i, \\ \alpha_{k+1}^{(j)} &= \|R_k^{(j)}\|_F, & V_{k+1}^{(j)} &= R_k^{(j)} / \alpha_{k+1}^{(j)}, \end{aligned}$$

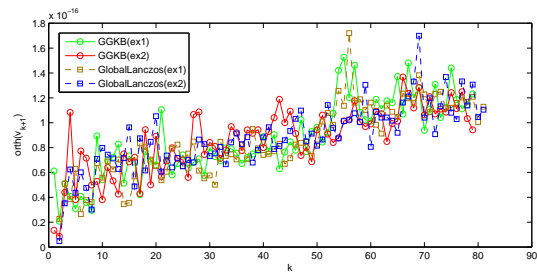
که در آن  $w_i^{(j)} = \text{tr}(V_i^T R_k^{(j)})$  برای هر  $i = 1, \dots, k$ . همچنین  $V_{k+1} = V_{k+1}^{(j)}$ . اگر رابطه  $\|\mathcal{V}_k^T *_F V_{k+1}^{(j)}\|_F \leq \eta$  برای  $j = 1, 2$  برقرار نباشد،  $V_{k+1}$  را مانند (۵) به دست می‌آوریم. این روش در الگوریتم ۲ خلاصه شده است.

### ۴. نتایج عددی

به منظور بررسی بازمعامدسازی پیشنهادشده، با دو مثال کاربردی میزان تعامد ماتریس  $V_{k+1}$  بر ماتریس  $\mathcal{V}_k$  را نشان می‌دهیم. این الگوریتم در روش‌های بسیاری از جمله روش گولاب-کاهان-لنچوز سراسری و روش لنچوز سراسری به کار می‌رود که جزئیات بیشتر استفاده از این روش‌ها و کاربرد آن در بازیابی و ترمیم تصاویر در مراجع [۳، ۴] بیان شده است. در این الگوریتم‌ها  $k$  را به عنوان متغیر ورودی برنامه در نظر گرفته‌ایم. برای نمونه در بازیابی و ترمیم تصاویر، از این دو روش همراه با الگوریتم بازمعامدسازی با نرم فروبنیوس برای تصاویر `peppers.tif` و `enamel.tif` استفاده می‌کنیم. مثال اول مربوط به تصویر `peppers.tif` و مثال دوم مربوط به تصویر `enamel.tif` است. در شکل ۱، روش گولاب-کاهان سراسری و روش لنچوز سراسری برای الگوریتم اول و در شکل ۲، این دو روش برای الگوریتم دوم یعنی الگوریتم بازمعامدسازی پارامتری شده نشان داده شده است.  $\text{orth}(V_{k+1}) = \|\mathcal{V}_k^T *_F V_{k+1}\|_F$  تعریف می‌شود.



شکل ۲. روش گولاب-کاهان سراسری و روش لنچوز سراسری برای الگوریتم بازمعامدسازی پارامتری شده



شکل ۱. روش گولاب-کاهان سراسری و روش لنچوز سراسری برای الگوریتم بازمعامدسازی کامل

### مراجع

1. J. L. Barlow, *Reorthogonalization for the Golub-Kahan-Lanczos bidiagonal reduction*. Numer. Math. 124 (2013), no. 2, 237–278.
2. J. L. Barlow, A. Smoktunowicz, and H. Erbay, *Improved Gram-Schmidt type downdating methods*. BIT 45 (2005), no. 2, 259–285.
3. A. H. Bentbib, M. El Guide, K. Jbilou and L. Reichel, *A global Lanczos method for image restoration*. J. Comput. Appl. Math. 300 (2016), 233–244.

4. A. H. Bentbib, M. El Guide, K. Jbilou and L. Reichel, *Global Golub-Kahan bidiagonalization applied to large discrete ill-posed problems*. J. Comput. Appl. Math. 322 (2017), 46–56.
5. G. Golub and W. Kahan, *Calculating the singular values and pseudo-inverse of a matrix*. J. Soc. Indust. Appl. Math. Ser. B Numer. Anal. 2 (1965), 205–224.

---

**Algorithm 1** Gram–Schmidt reorthogonalization of  $R_k$  against  $\mathcal{V}_k$  and  $\alpha_{k+1}$

---

```

for  $i = 1, 2, \dots, k$  do
     $w_i^{(1)} = \text{tr}(V_i^T R_k)$ ,
end for
 $R_k^{(1)} = R_k - \sum_{i=1}^k w_i^{(1)} V_i$ ,
if  $\|R_k^{(1)}\|_F \geq \zeta_{\min} \|R_k\|_F$  then
     $\alpha_{k+1} = \|R_k^{(1)}\|_F$ ,
     $V_{k+1} = R_k^{(1)} / \alpha_{k+1}$ ,
else
    for  $i = 1, 2, \dots, k$  do
         $w_i^{(2)} = \text{tr}(V_i^T R_k^{(1)})$ ,
    end for
     $R_k^{(2)} = R_k^{(1)} - \sum_{i=1}^k w_i^{(2)} V_i$ ,
    if  $\|R_k^{(2)}\|_F \geq \zeta_{\min} \|R_k^{(1)}\|_F$ , then
         $\alpha_{k+1} = \|R_k^{(2)}\|_F$ ,
         $V_{k+1} = R_k^{(2)} / \alpha_{k+1}$ ,
    else
        find  $E_J$  such that
         $\|\mathcal{V}_k^T *_{F} E_J\|_F = \min_{1 \leq j \leq m} \|\mathcal{V}_k^T *_{F} E_j\|_F$ 
        for  $i = 1, 2, \dots, k$  do
             $c_i^{(1)} = \text{tr}(V_i^T E_J)$ ,
        end for
         $t^{(1)} = E_J - \sum_{i=1}^k c_i^{(1)} V_i$ ,
        for  $i = 1, 2, \dots, k$  do
             $c_i^{(2)} = \text{tr}(V_i^T t^{(1)})$ ,
        end for
         $t^{(2)} = t^{(1)} - \sum_{i=1}^k c_i^{(2)} V_i$ ,
         $V_{k+1} = t^{(2)} / \|t^{(2)}\|_F$ ,
         $\alpha_{k+1} = \text{tr}(V_{k+1}^T R_k^{(2)})$ ,
    end if
end if

```

---



---

**Algorithm 2** Gram–Schmidt reorthogonalization of  $R_k$  against  $\mathcal{V}_k$  and  $\alpha_{k+1}$

---

```

for  $i = 1, 2, \dots, k$  do
     $w_i^{(1)} = \text{tr}(V_i^T R_k)$ ,
end for
 $\alpha_{k+1} = \|R_k\|_F$ ,
if  $\|W^{(1)}\|_F \leq \alpha_{k+1} * \eta$  then
     $V_{k+1} = R_k / \alpha_{k+1}$ ,
else
     $R_k^{(1)} = R_k - \sum_{i=1}^k w_i^{(1)} V_i$ ,
    for  $i = 1, 2, \dots, k$  do
         $w_i^{(2)} = \text{tr}(V_i^T R_k^{(1)})$ ,
    end for
     $\alpha_{k+1} = \|R_k^{(1)}\|_F$ ,
    if  $\|W^{(2)}\|_F \leq \alpha_{k+1} * \eta$  then
         $V_{k+1} = R_k^{(1)} / \alpha_{k+1}$ ,
    else
         $R_k^{(2)} = R_k^{(1)} - \sum_{i=1}^k w_i^{(2)} V_i$ ,
        for  $i = 1, 2, \dots, k$  do
             $w_i^{(3)} = \text{tr}(V_i^T R_k^{(2)})$ ,
        end for
         $\alpha_{k+1} = \|R_k^{(2)}\|_F$ ,
        if  $\|W^{(3)}\|_F \leq \alpha_{k+1} * \eta$  then
             $V_{k+1} = R_k^{(2)} / \alpha_{k+1}$ ,
        else
            find  $E_J$  such that
             $\|\mathcal{V}_k^T *_{F} E_J\|_F = \min_{1 \leq j \leq m} \|\mathcal{V}_k^T *_{F} E_j\|_F$ 
            for  $i = 1, 2, \dots, k$  do
                 $c_i^{(1)} = \text{tr}(V_i^T E_J)$ ,
            end for
             $t^{(1)} = E_J - \sum_{i=1}^k c_i^{(1)} V_i$ ,
            for  $i = 1, 2, \dots, k$  do
                 $c_i^{(2)} = \text{tr}(V_i^T t^{(1)})$ ,
            end for
             $t^{(2)} = t^{(1)} - \sum_{i=1}^k c_i^{(2)} V_i$ ,
             $V_{k+1} = t^{(2)} / \|t^{(2)}\|_F$ ,
             $\alpha_{k+1} = \text{tr}(V_{k+1}^T R_k^{(2)})$ ,
        end if
    end if
end if

```

---

پست الکترونیکی: [f.sharifi93@yahoo.com](mailto:f.sharifi93@yahoo.com)  
 پست الکترونیکی: [mokhtari@cc.iut.ac.ir](mailto:mokhtari@cc.iut.ac.ir)



## طراحی سیستم بهینه تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای موازی

محمد حسن مجتبابی\*

دانشجوی دکتری دانشکده ریاضی، دانشگاه صنعتی شیراز، شیراز، ایران

و علی رضا فخارزاده جهرمی

استاد دانشکده ریاضی، دانشگاه صنعتی شیراز، شیراز، ایران

چکیده. سازمان‌های مستقل جهت تخصیص منابع محدود، همواره نیازمند برنامه‌ریزی و بودجه‌ریزی بهینه هستند. جهت جلوگیری از هدررفت و تخصیص بهینه بودجه، می‌توان علاوه بر تخصیص بودجه سازمان‌ها، امکان تخصیص بودجه به زیرمجموعه‌ها و حتی فرآیندهای جزئی‌تر آنها را نیز فراهم نمود. وی و چنگ با استفاده از طراحی سیستم بهینه تحلیل پوششی داده‌های معمولی و شبکه‌ای سری، مدلی‌های را جهت تعیین بودجه بهینه برای واحدهای تصمیم‌گیرنده طراحی کردند. این مدل‌ها جهت بودجه‌ریزی بهینه تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای موازی کاربرد ندارند. تاکنون روشی جهت بودجه‌ریزی با شبکه‌های موازی ارائه نشده است و نیاز است تا روش جدیدی جهت بودجه‌ریزی بهینه سیستم‌های شبکه‌ای موازی با استفاده از تحلیل پوششی داده‌ها طراحی و به اجراء درآید. در این مقاله تلاش خواهد شد تا ابتدا طراحی سیستم بهینه تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای موازی معرفی و سپس مزایای آن نسبت به طراحی سیستم بهینه تحلیل پوششی داده‌های معمولی ارایه گردد. در پایان یک کاربرد جهت تشریح روش پیشنهادی ارائه می‌گردد.

واژه‌های کلیدی: تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای، سیستم‌های موازی، بودجه‌ریزی بهینه، ازدیاد بودجه.

## ۱. پیش‌گفتار

امروزه از دغدغه‌های اصلی جوامع در سطح کلان، رشد و توسعه اقتصادی بوده و همواره در این زمینه تخصیص بهینه منابع و جلوگیری از هدررفت سرمایه‌ها مورد نظر بوده است. در این راستا جایگاه بودجه‌ریزی و بودجه‌ریزی بهینه به عنوان عامل مهم در کاهش هزینه‌ها، نقش کلیدی و اساسی دارد. یکی از روش‌های ریاضی که می‌تواند در تعیین کارایی و رتبه‌بندی سازمان‌ها مورد استفاده قرار گیرد، روش‌های تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) است. روش تحلیل پوششی داده‌ها اولین بار توسط چارلز و همکاران در سال ۱۹۷۸ [۱] مورد استفاده قرار گرفت. این روش که ابزاری موثر در ارزیابی کارایی نسبی واحدهای تصمیم‌گیرنده همگن (DMU) است، تاکنون برای کاربردهای بسیاری استفاده شده است. وی و چانگ (۲۰۱۱ ب) [۲] به جای اندازه‌گیری کارایی سود سیستم‌های موجود، طراحی سیستم بهینه تحلیل پوششی داده‌ها را جهت بودجه‌ریزی بهینه واحدهای تصمیم‌گیرنده، توسعه دادند. تحقیقات متعددی دیگری برای تعیین کارایی شبکه‌های سری، موازی و ترکیبی (پویا) انجام شده است [۳]. در میان این تحقیقات، یاندگونگ و همکاران (۲۰۱۶) [۸]، مدل شبکه‌ای موازی تحلیل پوششی داده‌ها را جهت تعیین عملکرد یک سازمان پیشنهاد نمودند. لوزانو و آدنسو (۲۰۱۸) [۴]، روش تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای را برای ارزیابی کارایی جریان‌های محصول در دوره‌های مختلف پیشنهاد دادند. باتوجه به بررسی متون علمی تاکنون بودجه‌ریزی بهینه تحلیل پوششی داده‌های غیر شبکه‌ای و شبکه‌ای سری انجام گرفته است، اما بودجه‌ریزی برای شبکه‌های موازی با استفاده از تحلیل پوششی داده‌ها انجام نشده است. در این مقاله روش جدیدی برای طراحی سیستم بهینه تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای موازی با فرآیندهای مستقل توسعه داده می‌شود، ازدیاد و کسری بودجه در این مدل بررسی می‌گردد. افزون بر این، روش پیشنهاد شده از نظر محاسباتی مقرون به صرفه است. ساختار مقاله در ادامه به شرح زیر است. در بخش بعد، مدل بودجه‌ریزی بهینه و ازدیاد بودجه برای شبکه موازی با تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای موازی مورد بحث قرار می‌گیرد و قضیه‌های نیز بیان می‌گردد. یک کاربرد از مدل در بخش ۳ ارایه می‌گردد. در پایایان نتایج به صورت خلاصه بیان و نتیجه‌گیری و پیشنهاد‌های ارائه شده است.

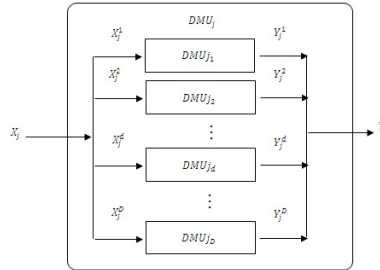
## ۲. معرفی مدل طراحی سیستم بهینه تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای موازی

تعداد  $n$  واحد تصمیم‌گیرنده  $DMU_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) با  $m$  ورودی و  $s$  خروجی که هر یک دارای  $D$  فرایند یا مرحله موازی هستند، را در نظر بگیرید. فرض کنید  $X_{idj}$  ( $i^d = 1, 2, \dots, m^d$ ) ورودی‌های مستقل و  $Y_{rdj}$  ( $r^d = 1, 2, \dots, s^d$ ) خروجی‌های مستقل در  $DMU_j$  برای مرحله  $d$  باشند. حاصل جمع ورودی‌های استفاده‌شده همه  $D$  فرایند با ورودی‌های سیستم برابر است  $\sum_{d=1}^D X_{idj} = X_{ij}$ . به طور مشابه، مجموع خروجی‌های تولید شده از  $D$  فرایند با خروجی‌های سیستم نیز برابر است  $\sum_{d=1}^D Y_{rdj} = Y_{rj}$ . شکل ۱ ساختار داخلی واحدهای تصمیم‌گیرنده را نشان داده است. مجموعه امکان تولید  $T$  از [۱]، جهت تعیین کارایی با استفاده از تحلیل پوششی داده‌ها تعریف می‌گردد:

$$T = \left\{ (\bar{X}, \bar{Y}) \mid \bar{X} = \sum_{j=1}^n \hat{X}_j \lambda_j, \bar{Y} \leq \sum_{j=1}^n \hat{Y}_j \lambda_j, \bar{X} \in \mathbb{R}^m, \bar{Y} \in \mathbb{R}^s, \lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, n \right\}$$

\* سخنران

که در آن  $\lambda$  بردار معین مثبت در  $\mathbb{R}^n$  و  $\hat{X} = (\hat{X}_j)$  و  $\hat{Y} = (\hat{Y}_j)$  بردارهای ورودی و خروجی در سیستم هستند. حال اگر  $\hat{X}_j = (\hat{X}_j^1, \hat{X}_j^2, \dots, \hat{X}_j^D) > 0$ ،  $\hat{Y}_j = (\hat{Y}_j^1, \hat{Y}_j^2, \dots, \hat{Y}_j^D) > 0$  به ترتیب  $d$ -امین زیر فرایند  $DMU_j^d (d = 1, 2, \dots, D)$  را در نظر بگیریم. مجموعه امکان تولید برای شبکه‌های موازی با الگوگیری از مجموعه امکان تولید  $T$



شکل ۱. ساختار سیستم موازی برای  $DMU_j$

، با مجموعه  $T^d$  بصورت زیر تعریف می‌گردد،  

$$T^d = \left\{ (X^d, Y^d) \mid \sum_{j=1}^n \hat{X}_{i^d j} \lambda_j^d = X^d, \sum_{j=1}^n \hat{Y}_{r^d j} \lambda_j^d \geq Y^d, \sum_{j=1}^n \lambda_j^d \leq 1, \lambda_j^d \geq 0, j = 1, \dots, n \right\}.$$
  
 مجموعه امکان تولید  $T^{(d)}$  مشابه  $T$  از [۱]، دارای چهار اصل مجموعه امکان تولید می باشد:  
 فرض کنید،  $C = (C_1, C_2, \dots, C_m)$  بردار هزینه ورودی،  $P = (P_1, P_2, \dots, P_s)$  بردار قیمت‌های خروجی و کل بودجه در دسترس "B" برای  $DMU_j$  مفروض باشد. مدل طراحی سیستم بهینه تحلیلی پوششی داده‌های شبکه‌ای (POSDDEA) با رابطه (۱) معرفی می‌گردد.

$$\begin{aligned} (1) \quad & f(B) = \max P^T \hat{Y} \lambda \quad (\text{الف}) \\ & \text{s.t. } e^T \lambda^d \leq 1, \quad d = 1, 2, \dots, D \quad (\text{ب}) \\ & C^T \hat{X} \lambda \leq B \quad (\text{ج}) \\ & \lambda^d \geq 0, \quad d = 1, 2, \dots, D \quad (\text{د}) \end{aligned}$$

که  $e = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^n, j = 1, 2, \dots, n, \hat{Y}_j = (\hat{Y}_{r^1 j}, \hat{Y}_{r^2 j}, \dots, \hat{Y}_{r^D j}), \hat{X}_j = (\hat{X}_{i^1 j}, \hat{X}_{i^2 j}, \dots, \hat{X}_{i^D j})$  سطر (الف) از رابطه (۱)، تابع هدف مسأله است که میزان درآمد حاصل از بودجه‌ریزی را نشان می‌دهد. سطر (ب)، تعداد  $D$  محدودیت مستقل و موازی مدل هستند. این محدودیت‌ها موجب می‌گردند تا فرایندهای موازی مشابه در واحدهای تصمیم‌گیرنده با هم مقایسه شده و براساس کارایی شان به ترتیب اولویت، بودجه دریافت کنند. سطر (ج)، محدودیت بودجه‌ریزی مربوط واحدهای تصمیم‌گیرنده هدف را نشان می‌دهد. محدودیت (د) متغیرهای مدل هستند.

**قضیه ۱.۲.**  $f(B) = \max(P^T \hat{Y}) \lambda$  تابعی مقعر، غیر کاهشی بر دامنه  $\Omega = \{B \mid B \geq 0, B \in \mathbb{R}^1\}$  و  $f(0) = 0$  است. اثبات: به آسانی مشاهده می‌شود که  $f(B)$  تابعی غیر کاهشی و یکنوا بر دامنه  $\Omega$  بوده و کافی است مقعر بودن  $f(B)$  و  $f(0) = 0$  را نشان دهیم. دوگان مدل (۱) بصورت (۲) تعریف می‌گردد.

$$\begin{aligned} (2) \quad & f(B) = \min \left( uB + \sum_{d=1}^D v^d \right) \\ & \text{s.t. } u(C^T \hat{X})^d + v^d e^T \geq (P^T \hat{Y})^d, \quad d = 1, 2, \dots, D; \\ & u \geq 0, v^d \geq 0, \quad d = 1, 2, \dots, D, \end{aligned}$$

که  $v = (v^1, v^2, \dots, v^D), v^d \in \mathbb{R}$  است. مجموعه جواب شدنی مدل (۱) را با  $\{(u, v) \mid u(C^T \hat{X})^d + v^d e^T \geq (P^T \hat{Y})^d, u \geq 0, v^d \geq 0, d = 1, 2, \dots, D\}$  را با (۱) نشان می‌دهیم. بنابراین برای هر  $\alpha \in [0, 1]$  و هر  $B_1 \geq 0$  و  $B_2 \geq 0$  در  $\Omega$  داریم:

$$\begin{aligned} f(\alpha B_1 + (1 - \alpha)B_2) &= \text{Min}_R[u(\alpha B_1 + (1 - \alpha)B_2) + \sum_{d=1}^D v^d] \\ &= \text{Min}_R[\alpha(uB_1 + \sum_{d=1}^D v^d) + (1 - \alpha)(uB_2 + \sum_{d=1}^D v^d)] \\ &\geq \text{Min}_R[\alpha(uB_1 + \sum_{d=1}^D v^d)] + \text{Min}_R[(1 - \alpha)(uB_2 + \sum_{d=1}^D v^d)] = \alpha f(B_1) + (1 - \alpha)f(B_2). \end{aligned}$$

بنابراین  $f(B)$  یک تابع مقعر است.

برای اثبات  $f(0) = 0$ ، چون تابع هدف مسأله (۲) برابر با  $f(B) = \text{Min}(uB + \sum_{d=1}^D v^d)$  است. بنابراین اگر  $B = 0$ ، داریم:  $f(0) = \text{Min}(u \times 0 + \sum_{d=1}^D v^d) = \text{Min} \sum_{d=1}^D v^d, v \geq 0 \Rightarrow f(0) = 0$ .

**تعریف ۲.۲.** اگر  $f(B)$  نشان‌دهنده مقدار بهینه تابع هدف مدل طراحی سیستم بهینه تحلیل پوششی داده‌های موازی باشد، در این صورت  $B^{**} = \text{Min} \{B^* | \text{Max}_{B \geq 0} f(B) = f(B^*)\}$  را بوجه بهینه مدل (۱) نامیده و آن را چنین تعریف می‌کنیم:

**قضیه ۳.۲.** فرض کنید که  $\text{Max}_{1 \leq j \leq n} P^T \hat{y}_j = P^T \hat{y}_k$  و  $B^* = C^T \hat{x}_k$  و مسئله به صورت رابطه (۱) مفروض باشد. آن‌گاه:

الف) به ازای هر  $B \geq B^*$ ،  $f(B) = f(B^*)$ ، ب) به ازای هر  $B \leq B^*$ ،  $f(B) \leq f(B^*)$ .

اثبات: اثبات قضیه مشابه اثبات قضیه ۲ در [۷] است. □

**لم ۴.۲.** فرض کنید  $B \geq B^*$  باشد در این صورت مجموعه جواب بهینه مدل طراحی سیستم بهینه تحلیل پوششی داده‌های موازی برابر است با:  $\{\sum_{k^d \in K^d} \alpha_k^d e_k^d | \sum_{k^d \in K^d} \alpha_k^d = 1, \alpha_k^d \geq 0, k^d \geq K^d, d = 1, 2, \dots, D\}$  که در این رابطه  $k, e_k^d = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$  امین بردار استاندارد پایه در  $R^n$  است و  $K = \{k = (k^1, k^2, \dots, k^D) | \text{Max}_{1 \leq j \leq n} (P^T \hat{y}_j) = (P^T \hat{y}_k)\}$ .

اثبات: اثبات لم مشابه اثبات لم ۱ در [۷] است. □

**قضیه ۵.۲.** فرض کنید که  $\text{Max}_{1 \leq j \leq n} (P^T \hat{y}_j) = P^T \hat{y}_k$  و  $K = \{k | \text{Max}_{1 \leq j \leq n} (P^T \hat{y}_j) = P^T \hat{y}_k\}$  و  $\text{Min}_{k \in K} (C^T \hat{x}_k) = C^T \hat{x}_k$  آن‌گاه بوجه بهینه برابر است با  $B^{**} = P^T \hat{y}_k$ . اثبات: اثبات قضیه مشابه اثبات قضیه ۳ در [۷] است. □

**قضیه ۶.۲.** اگر  $B^{**}$  بوجه بهینه و  $\bar{\lambda}$  جواب بهینه مسئله (۱) باشد، در این صورت  $\bar{\lambda}$  جواب بهینه مسئله دوگان (۱) نیز هست. از این رو  $C^T \hat{X} \bar{\lambda}$  مقدار بهینه تابع هدف مسئله دوگان نیز خواهد بود. اثبات: اثبات قضیه مشابه اثبات قضیه ۴ در [۷] است. □

**۱.۲.** پدیده تراکم و ناکارآمدی بوجه. اگر در مدل (۱) به جای محدودیت بوجه  $(C^T x \leq B)$ ، محدودیت  $(C^T x = B)$  را قرار دهیم. مدل (۳) را خواهیم داشت، (منظور از قید  $C^T x = B$  این است که بوجه  $B$  باید به طور کامل مصرف شود):

$$\begin{aligned} (3) \quad & \hat{f}(B) = \text{Max } P^T \hat{Y} \lambda - C^T \hat{X} \lambda \\ & \text{s.t. } e^T \lambda^d \leq 1, \quad d = 1, 2, \dots, D \\ & C^T \hat{X} \lambda = B \\ & \lambda^d \geq 0, \quad d = 1, 2, \dots, D \end{aligned}$$

فرض کنید که رابطه (۳) دارای جواب شدنی بوده و بعلاوه  $\bar{\lambda}$  جواب بهینه مدل طراحی سیستم بهینه تحلیل پوششی داده‌های موازی باشد. اگر  $B^* = C^T \hat{X} \bar{\lambda} < B$  فرض شود، به آسانی قابل مشاهده است که مقدار بهینه تابع هدف مسئله (۳) کمتر از مقدار بهینه تابع هدف (۱) می‌باشد. این فرایند موجب تراکم در بوجه‌ریزی می‌گردد. تراکم یا انباشتگی در بوجه، پدیده اقتصادی است، که با ثابت ماندن و حتی کاهش خروجی یا درآمد واحدهای تصمیم‌گیرنده، هزینه حاشیه‌ای به دلیل کاهش بازده، افزایش یابد. در این صورت مصرف کامل بوجه در دسترس  $B(B^* \leq B)$ ، براساس قضیه ۳.۲ لزوماً موجب افزایش سود نخواهد بود. تراکم در بوجه با قضیه زیر بیان شده است.

**قضیه ۷.۲.** فرض کنید  $\bar{\lambda}$  جواب بهینه مدل طراحی سیستم بهینه تحلیل پوششی داده‌های موازی و  $B \geq B^* = C^T \hat{X} \bar{\lambda}$  باشند در این صورت داریم:  $\hat{f}(B) < f(B) = f(B^*)$ .

اثبات: اثبات قضیه مشابه اثبات قضیه ۶ در [۷] است. □

### ۳. کاربرد مدل طراحی سیستم بهینه تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای موازی و مزایای آن نسبت به مدل معمولی

بودجه‌ریزی بهینه از دو مدل طراحی سیستم بهینه تحلیل پوششی داده‌ها از [۷] و طراحی سیستم بهینه تحلیل پوششی داده‌های موازی مدل (۱)، با استفاده داده‌های اولیه از کاو [۶] بدست آمده است. بودجه در دسترس  $B = 60$ ،  $C = (1, 1, 1, 1)$  و  $P = (1, 1, 1, 1)$  در نظر گرفته شده‌اند. بودجه‌ریزی بهینه معمولی از [۷] و بودجه‌ریزی شبکه‌ای موازی از (۱) محاسبه و به ترتیب در

جدول ۱. مقایسه دو فرایند بودجه‌ریزی بر اساس دو مدل معمولی و شبکه‌ای موازی

ردیف	مدل موازی و $B = 60$			معمولی مدل و $B = 60$		
	جواب‌ها	$F(B)$	$B^{**}$	جواب‌ها	$F(B)$	$B^{**}$
۱	$\lambda_{44}, \lambda_{51}, \lambda_{52}$	۱۴	۱۳	$\lambda_5$	۱۴	۱۲
۲	$\lambda_{22}, \lambda_{31}, \lambda_{53}$	۱۲	۱۱	$\lambda_3$	۱۱	۱۲
۳	$\lambda_{22}, \lambda_{32}, \lambda_{41}$	۱۱	۱۱	$\lambda_4$	۱۱	۱۲
۴	$\lambda_{12}, \lambda_{13}, \lambda_{21}$	۱۰	۷	$\lambda_1$	۱۰	۹
۵	$\lambda_{11}, \lambda_{23}, \lambda_{42}$	۸	۱۰	$\lambda_2$	۱۰	۹
—	—	۵۵	۵۲	—	۵۶	۵۴

سمت راست و چپ جدول (۱) نشان داده شده است. در سطر آخر جدول به ترتیب، مجموع کل سود و کل بودجه مصرف شده برای واحدهای تصمیم‌گیرنده نشان داده شده است.

مزایای مدل بودجه‌ریزی شبکه‌ای موازی نسبت به بودجه‌ریزی معمولی عبارتست از: ۱. مهمترین مزیت مدل طراحی سیستم بهینه تحلیل پوششی داده‌های موازی نسبت به مدل معمولی توزیع دقیقتر و جزئی‌تر بودجه در سطح واحدهای تصمیم‌گیرنده است. بودجه‌ریزی شبکه‌ای باعث می‌شود تا در هر سطحی که نیاز باشد بودجه عملیاتی در سطح شبکه توزیع گردد. ۲. در اولین تخصیص بودجه با استفاده از مدل طراحی سیستم بهینه تحلیل پوششی داده‌های موازی مطابق جدول (۱) ملاحظه می‌کنید که در مدل شبکه‌ای موازی برای واحد ۵ فقط فرآیندهای اول و دوم، در اولویت بودجه قرار گرفته‌اند و به جای فرآیند سوم از این واحد، بودجه به فرآیند سوم از واحد ۴ اختصاص یافته است. درحالی‌که در مدل معمولی با توجه به محدودیت انتخاب زیرفرآیندها، بودجه به کل واحد ۵ تخصیص داده شده است و قابل تفکیک در زیرفرآیندهای یک واحد تصمیم‌گیرنده نیست. ۳. در مدل شبکه‌ای موازی در صورت وجود کسری بودجه، می‌توان به صورت جزئی‌تر از بین زیرفرآیندها، کارآترین آن‌ها را انتخاب نمود. ولی در مدل معمولی امکان این انتخاب نیست. ۴. در صورت وجود زیرفرآیندهای جزئی‌تر در فرآیندها برای هرواحد تصمیم‌گیرنده، مدل شبکه‌ای موازی دارای کارآمدی بیشتر خواهد شد و می‌تواند بودجه محدود سازمان را به صورت اثربخش‌تر بین زیرفرآیندها در واحدهای تصمیم‌گیرنده توزیع کند.

#### ۴. نتیجه‌گیری

در این تحقیق، مدل جدیدی برای بودجه‌ریزی بهینه شبکه‌های موازی، با استفاده از تجزیه و تحلیل پوشش داده‌ای شبکه‌ای ارائه گردید. ارتباط مدل پیشنهادی با مدل معمولی بیان و قضایای مربوطه ارائه شد. علاوه بر ارائه بودجه‌ریزی بهینه در داخل شبکه، این مدل می‌تواند کمبود بودجه و مازاد بودجه برای واحدهای تصمیم‌گیرنده را تعیین کند. یک کاربرد نیز برای مدل پیشنهادی ارائه گردید و مزایای آن نیز در مقایسه با مدل معمولی مورد بحث قرار گرفت. در ادامه این تحقیق نیاز است تا مدل جدیدی که هدف آن ارزیابی بودجه بهینه در سیستم‌های پویا باشد، مورد تحقیق و پژوهش قرار گیرد.

#### مراجع

1. Charnes A., Cooper W. W. and Rhodes E., "Measuring the efficiency of decision making units", *European journal of operational research*, **2**, 429-444 (1978).
2. Cook W. D., et al., "Network DEA: Additive efficiency decomposition", *European journal of operational research*, **207**, 1122-1129 (2010).
3. Li H., et al., "Two-stage network DEA: Who is the leader?", *Omega*, **74**, 15-19 (2018).
4. S. Lozano and B. Adenso., "Increasing Sustainability of Logistic Networks by Reducing Product Losses: A Network DEA Approach", *Mathematical Problems in Engineering* Volume, 2018, Article ID 3479251, 21 pages. (2018).
5. Kao C., "Efficiency decomposition for parallel production systems", *Journal of the operational Research Society*, **63**, 64-71 (2012).
6. Kao, C. "Network data envelopment analysis: A review". *European Journal of Operational Research*, **239**(1), 1-16(2014)..
7. Wei Q. and T. S. Chang., "DEA-type models for designing optimal systems and determining optimal budgets", *Mathematical and Computer Modelling*, **54**, 2645-2658 (2011).
8. Wang Q., et al., "Two-stage innovation efficiency of new energy enterprises in China: A non-radial DEA approach", *Technological forecasting and social change*, **112**, 254-261 (2016).

پست الکترونیکی: [m.mojtabaei@sutech.ac.ir](mailto:m.mojtabaei@sutech.ac.ir)

پست الکترونیکی: [A-fakharzadeh@sutech.ac.ir](mailto:A-fakharzadeh@sutech.ac.ir)

## حل مساله مکان‌یابی تدافعی با استفاده از الگوریتم کلونی مورچگان

زهرا ملکی\*

دانشکده ریاضی، دانشگاه صنعتی شیراز، شیراز، ایران

حمید رضا ملکی

دانشکده ریاضی، دانشگاه صنعتی شیراز، شیراز، ایران

و رضا اکبری

دانشکده مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات، دانشگاه صنعتی شیراز، شیراز، ایران

چکیده. مساله مکان‌یابی تدافعی یکی از مسایل مهم در حوزه تسهیلات رقابتی است. این مساله NP-hard است. در این مقاله، از الگوریتم کلونی مورچگان برای حل مساله مکان‌یابی تدافعی استفاده شده است. همچنین در این مقاله، نحوه بدست آوردن اطلاعات ذهنی و فرومونی مورد نیاز این الگوریتم برای حل مساله مکان‌یابی تدافعی بیان شده است. کارایی این الگوریتم با یک مثال عددی نشان داده شده است. واژه‌های کلیدی: مساله مکان‌یابی تدافعی، الگوریتم کلونی مورچگان. طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 90B80.

## ۱. مقدمه

مساله مکان‌یابی تدافعی اولین بار در سال ۲۰۰۸ توسط اونو<sup>۱</sup> و کاتاجیری<sup>۲</sup> معرفی شد [۲]. در مساله مکان‌یابی تدافعی یک تصمیم‌گیرنده (مدافع) تسهیلات دفاعی را برای جلوگیری از دستیابی مهاجم (دشمن) به یک مکان استراتژیک به نام هسته روی راس‌های یک شبکه مکان‌یابی می‌کند. در مساله مکان‌یابی تدافعی، ابتدا مدافع تسهیلات دفاعی خود را بر روی راس‌های شبکه مکان‌یابی می‌کند و سپس مهاجم تصمیم دارد با حرکت درون شبکه، سرانجام در راسی از شبکه قرار گیرد که کوتاهترین فاصله را از هسته داشته باشد. الگوریتم بهینه‌سازی کلونی مورچگان در سال ۱۹۹۱ توسط دوریگو<sup>۳</sup> ارائه شد [۱]. الگوریتم بهینه‌سازی کلونی مورچگان یکی از موارد الگوریتم‌هایی است که بر مبنای زندگی اجتماعی مورچه‌ها ارائه شده است. در این مقاله با توجه به NP-hard بودن مساله مکان‌یابی تدافعی از الگوریتم کلونی مورچگان برای حل مساله مکان‌یابی تدافعی استفاده می‌شود.

## ۲. مساله مکان‌یابی تدافعی

در این بخش، ضمن بررسی مفروضات حاکم بر مساله مکان‌یابی تدافعی یک مدل دو سطحی برای بدست آوردن جواب استکلبرگ این مساله ارائه می‌شود. در این مساله به تصمیم‌گیرنده سطح اول مدافع و به تصمیم‌گیرنده سطح دوم مهاجم گفته می‌شود. برای فرمول‌بندی مساله مکان‌یابی تدافعی جهت به‌دست آوردن جواب‌های استکلبرگ مفروضات زیر در نظر گرفته می‌شود:

- $G(V, E)$  شبکه‌ای است که مدافع تسهیلات دفاعی خود را روی آن مکان‌یابی می‌کند،  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  و  $E$  با  $|E| = r$  مجموعه راس‌ها و یال‌های این شبکه هستند. مهاجم در  $n$  امین راس شبکه قرار دارد و این راس با  $\xi$  نشان داده می‌شود. مدافع حداکثر یک وسیله دفاعی را روی هر راس شبکه (به جز راس  $\xi$ ) می‌تواند قرار دهد؛
- $c \in V$  راسی از شبکه است که هسته در آن قرار دارد و مدافع می‌بایست از آن در برابر مهاجم دفاع کند؛
- $e_{ij}$  یال بین دو راس  $v_i, v_j \in V$  از شبکه و  $w_{ij} > 0$  وزن یال  $e_{ij}$  است؛
- بردار  $q = (q_1, \dots, q_{n-1})$  بردار تصمیم مدافع است. متناظر با راس  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$  اگر یک وسیله دفاعی روی راس  $i$  ام مکان‌یابی شود، مقدار متغیر دودویی  $q_i$  برابر با یک است و در غیر این صورت مقدار آن برابر با صفر است؛ بردار  $p$  بردار تصمیم مهاجم است. این بردار مشخص‌کننده مسیری است که مهاجم برای رسیدن به هسته  $c$  یا نزدیک‌ترین و قابل دسترس‌ترین راس به  $c$  طی کند؛
- $P_{vc}$  مجموعه همه مسیرها از راس  $v$  به هسته  $c$  است. فاصله بین راس  $v$  و هسته  $c$  به صورت مجموع وزن یال‌های کوتاهترین مسیر از راس  $v$  به هسته  $c$  تعریف می‌شود. بنابراین، این فاصله را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$d^c(v) = \min_{p \in P_{vc}} \sum_{e_{ij} \in p} w_{ij}$$

- از طرف دیگر با توجه به این که مهاجم تصمیم دارد مسیری از راس  $\xi$  به راس  $c$  پیدا کند که تا حد ممکن به  $c$  نزدیک شود؛ فرضیاتی به شرح ذیل نیز به مفروضات فوق اضافه می‌شود:
- مهاجم قبل از ترک  $\xi$  دارای انرژی اولیه  $\alpha > 0$  است.
- مهاجم انرژی خود را به دو شکل زیر مصرف می‌کند:
  - (۱) با طی کردن یال  $e_{ij}$  انرژی مهاجم به میزان  $w_{ij}$  کاهش می‌یابد؛
  - (۲) اگر مهاجم از  $v_i$  به  $v_j$  برود به دلیل برخورد با وسیله دفاعی در راس  $j$  انرژی آن به میزان  $\beta q_j$  کاهش می‌یابد که در آن  $\beta$  ظرفیت تسهیل دفاعی است که در راس‌های شبکه مستقر است؛
- بنابراین انرژی مهاجم بر اثر طی کردن یال  $e_{ij}$  بر اساس رابطه  $w(e_{ij}, q) = w_{ij} + \beta q_j$  کاهش می‌یابد. زمانی که انرژی مهاجم به صفر برسد مهاجم از بین خواهد رفت؛
- $\lambda \in V$ ،  $v^\lambda(p)$ ،  $\lambda$  امین راس در مسیر  $p$  است؛ همچنین  $\alpha(v^\lambda(p)|q)$  انرژی مهاجم در  $\lambda$  امین راس از مسیر  $p$  است؛ مهاجم در  $\lambda$  امین راس از مسیر  $p$  خواهد بود، اگر انرژی مهاجم در  $\lambda$  امین راس که از رابطه زیر بدست می‌آید، نامنفی باشد:

$$\alpha(v^\lambda(p)|q) = \bar{\alpha} - \sum_{k=1}^{\lambda} \bar{w}(e^k(p)|q) \geq 0$$

که در آن  $k$ ،  $e^k(p)$ ،  $k$  امین یال در مسیر  $p$  است؛  
از آنجا که هدف مهاجم رسیدن به هسته  $c$  یا نزدیکترین و قابل دسترس‌ترین راس ممکن به  $c$  است؛ بنابراین تابع هدف مهاجم به صورت زیر است:

$$f^I(q, p) = \min\{d^c(v) | \alpha(v|q) \geq 0\}$$

اکنون اگر تابع هدف مدافع را با  $f^d(q, p)$  نمایش دهیم و با توجه به این که مساله مکانیابی تدافعی تک هدفی، یک بازی استکلبرگ با مجموع صفر است، داریم:

$$f^d(q, p) + f^I(q, p) = 0$$

در این مساله فرض می‌کنیم که محدودیت‌ها مساله خطی باشند. لذا اگر  $A \in \mathbb{R}^{m \times n-1}$  و  $b \in \mathbb{R}^m$  ماتریس ضرایب و بردار سمت راست با درایه‌های نامنفی باشد، آنگاه مجموعه شدنی مدافع به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$FD = \{q \in \{0, 1\}^{n-1} | Aq \leq b\}$$

از طرفی مجموعه جواب‌های شدنی مهاجم که با  $SI$  نمایش داده می‌شود، تمام مسیریابی را شامل می‌شود که از  $\xi$  شروع و به  $c$  ختم می‌شوند. لذا فرم کلی مساله مکانیابی تک هدفی را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$\max_q f^d(q, p)$$

where  $p$  solves

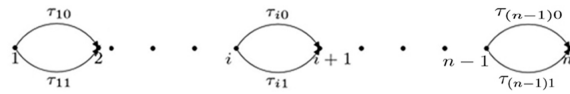
$$\min_p f^d(q, p)$$

$$\text{s.t. } q \in FD, p \in SI$$

برای محاسبه تابع هدف مساله بالا به ازای هر بردار  $q \in FD$  لازم است که طول کوتاهترین مسیر از تمام راس‌ها تا راس  $c$  و از راس  $\xi$  به تمام راس‌ها محاسبه شود. الگوریتم دایکسترا یکی از الگوریتم‌های کارآمد برای پیدا کردن کوتاهترین مسیر در گراف‌های وزن‌دار با وزن نامنفی است؛ این الگوریتم کوتاهترین مسیر از مبدا واحد به هر راس گراف را پیدا می‌کند.

### ۳. الگوریتم مورچه برای حل مساله مکانیابی تدافعی

در این بخش، حل مساله مکانیابی تدافعی با استفاده از الگوریتم کلونی مورچگان بررسی می‌شود. الگوریتم کلونی مورچگان مساله مکانیابی تدافعی را به صورت تکراری حل می‌کند. در هر تکرار  $n_a$  مورچه در دامنه جواب مساله مکانیابی تدافعی برای جستجو بهترین جواب با یکدیگر همکاری می‌کنند. در مساله مکانیابی تدافعی مورچه‌های مصنوعی جواب‌ها را با قدم برداشتن روی گراف مسیریابی توصیف شده در شکل (۱) می‌سازند. هر مورچه با حرکت از راس ۱ به سمت  $n$  امین راس روی گراف مسیریابی یک جواب برای مساله مکانیابی تدافعی می‌سازد. حرکت هر مورچه از راس  $i$  به راس  $i+1$  در گراف مسیریابی از طریق مسیر بالایی  $i$  یا از طریق مسیر پایینی  $i$  خواهد بود. انتخاب مسیر  $i$  از گراف مسیریابی توسط مورچه به معنای قرار نگرفتن تسهیل دفاعی روی  $i$  امین راس از شبکه مساله مکانیابی تدافعی است. همچنین، انتخاب مسیر  $i$  از گراف مسیریابی توسط مورچه به معنای قرار گرفتن تسهیل دفاعی روی  $i$  امین راس از شبکه مساله مکانیابی تدافعی است. به عبارت دیگر در الگوریتم کلونی مورچگان مورچه مسیر انتخاب می‌کند؛ اما نتیجه‌اش



شکل ۱. نمودار مسیریابی برای مورچه‌ها

مکان‌یابی است. در الگوریتم کلونی مورچگان، ابتدا مقدار اولیه فرومون روی مسیرهای  $i_0$  و  $i_1$  مشخص می‌شود؛ سپس دو مرحله ساخت جواب و بروزرسانی فرومون تکرار می‌شود. در مرحله ساخت جواب هر مورچه به‌طور تصادفی و مستقل در تصمیمات متوالی مجموعه‌ای از مسیرهای گراف مسیریابی را برای دستیابی به  $m$  امین راس انتخاب می‌کند. بعد از این‌که همه مورچه‌ها به جواب رسیدند؛ هر مورچه کیفیت جواب خود را با ریزش فرومون روی مسیر حرکتش به دیگران خبر می‌دهد.

۱.۳. ساخت جواب. فرض کنید که  $q' = (q'_1, q'_2, \dots, q'_{n-1})$  یک جواب برای مساله مکان‌یابی تدافعی باشد که توسط یک مورچه در الگوریتم کلونی مورچگان ساخته شده است. این مورچه مقدار مولفه  $q'_i$  را با انتخاب یکی از دو مسیر موجود برای حرکت از راس  $i$  به راس  $i+1$  مشخص می‌کند. مورچه‌ها با استفاده از یک قانون احتمالاتی یکی از دو مسیر  $i_0$  و  $i_1$  را برای حرکت از راس  $i$  به راس  $i+1$  روی گراف مسیریابی انتخاب می‌کنند. برای مشخص کردن قانون احتمالاتی مربوط به انتخاب مسیر برای حرکت از راس  $i$  به راس  $i+1$  نیاز به اطلاعات فرومونی و اطلاعات ذهنی مسیرهای  $i_0$  و  $i_1$  داریم. با توجه به این‌که انتخاب مسیر  $i_1$  در گراف مسیریابی به معنای قرار دادن تسهیل دفاعی در راس  $i$  است؛ اطلاعات ذهنی مربوط به انتخاب مسیر  $i_1$  توسط یک مورچه را که با  $\eta_{i1}$  نشان می‌دهیم به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\eta_{i1} = \frac{d^c(v_i) - \min_i d^c(v_i)}{\max_i d^c(v_i) - \min_i d^c(v_i)}$$

همچنین، با توجه به این‌که انتخاب مسیر  $i_0$  در گراف مسیریابی به معنای قرار ندادن تسهیل دفاعی در راس  $i$  است؛ اطلاعات ذهنی مربوط به انتخاب مسیر  $i_0$  توسط یک مورچه را با  $\eta_{i0}$  نشان داده و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\eta_{i0} = \frac{\sum_{j=1}^m a_{ji} - \min_i \sum_{j=1}^m a_{ji}}{\max_i \sum_{j=1}^m a_{ji} - \min_i \sum_{j=1}^m a_{ji}}$$

$\tau_{i1}$  (معیاری برای قرار نگرفتن (گرفتن) تسهیل دفاعی روی راس  $i$  بر اساس سابقه حرکت در گذشته است. هنگام مکان‌یابی تسهیلات دفاعی در روی راس‌های شبکه احتمال این‌که مورچه  $k$ ام در راس  $i$  تسهیل دفاعی قرار ندهد، از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$(2) \quad p_{i0}^k = \frac{\tau_{i0}^\alpha \eta_{i0}^\beta}{\sum \tau_{i0}^\alpha \eta_{i0}^\beta}$$

همچنین، احتمال این‌که مورچه  $k$ ام در راس  $i$  تسهیل دفاعی قرار دهد، از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$(3) \quad p_{i1}^k = \frac{\tau_{i1}^\alpha \eta_{i1}^\beta}{\sum \tau_{i1}^\alpha \eta_{i1}^\beta}$$

در رابطه‌های (۲) و (۳) ضرایب  $\alpha$  و  $\beta$  دو شاخص تعیین‌کننده تاثیر نسبی اطلاعات فرومونی و اطلاعات ذهنی هستند.

۲.۳. بروزرسانی فرومون. پس از آن‌که جواب‌ها ساخته شدند و مورد ارزیابی قرار گرفتند، فرومون مسیرهای مربوط به جواب‌ها در گراف مسیریابی بروز می‌شود. فرض کنید که  $q = (q_1, q_2, \dots, q_{n-1})$  جواب مساله مکان‌یابی تدافعی باشد که با استفاده از الگوریتم کلونی مورچگان بدست آمده است. در این صورت بروزرسانی فرومون مسیرهای مربوط به جواب  $q$  به صورت زیر خواهد بود: اگر  $q_i = 1$  باشد، آن‌گاه بروزرسانی فرومون برای مسیر  $i_1$  و  $i_0$  در گراف مسیریابی به صورت زیر خواهد بود:

$$\tau_{i1}^{new} = \tau_{i1} + \left(1 - \frac{1}{fd(q, p)}\right), \quad \tau_{i0}^{new} = \tau_{i0}$$

اگر  $q_i = 0$  باشد، آن‌گاه بروزرسانی فرومون برای مسیر  $i_0$  و  $i_1$  در گراف مسیریابی به صورت زیر خواهد بود:

$$\tau_{i0}^{new} = \tau_{i0} + \left(1 - \frac{1}{fd(q, p)}\right), \quad \tau_{i1}^{new} = \tau_{i1}$$

برای جست‌وجوی کافی در بین مسیرهای مختلف گراف شکل (۱)، فرومون روی مسیرها همچون فرومون‌های واقعی تخیل می‌شوند. میزان تخیل از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\tau = (1 - \rho)\tau, \quad \rho \in (0, 1]$$

جدول ۱. تنظیم پارامتر الگوریتم کلونی مورچگان برای مساله مکان‌یابی تدافعی

پارامترها	مقادیر آزمایش شده	مقدار پیشنهادی
$\rho$	۰/۰۱، ۰/۰۵، ۰/۱۰، ۰/۱۵، ۰/۲۰، ۰/۲۵، ۰/۳۰	۰/۲
$\alpha$	۰/۵، ۱، ۱/۵، ۲، ۳	۱/۵
$\beta$	۰/۵، ۱، ۱/۵، ۲، ۳	۲
$n_a$	۱۰، ۱۵، ۲۰، ۲۵، ۳۰	۱۵
$nIt$	۱۰۰، ۱۴۰، ۱۸۰، ۲۲۰، ۲۶۰	۱۸۰
$mu$	۰/۱، ۰/۳، ۰/۵، ۰/۷، ۰/۹	۰/۳

جدول ۲. نتایج بدست آمده از حل مساله مکان‌یابی تدافعی با استفاده از الگوریتم کلونی مورچگان در ۲۰ تکرار

بهترین جواب	بدترین جواب	میانگین جواب‌ها
۱۹۸	۱۲۸	۱۵۳/۷

که در آن  $\rho$  عددی موسوم به ضریب تخییر است.

#### ۴. مثال عددی

در این بخش کارایی الگوریتم کلونی مورچگان برای حل مساله مکان‌یابی تدافعی با یک مثال نشان داده می‌شود. بدین منظور، یک شبکه با ۲۰۰ راس و ۱۹۷۰ یال در نظر گرفته شده است. وزن هر یال از این شبکه به صورت تصادفی از مجموعه  $\{1, \dots, 30\}$  انتخاب شده است. در این مثال، مقدار انرژی اولیه مهاجم برابر با ۲۰۰ قرار داده شده است. همچنین ۵۰ محدودیت برای این مساله در نظر گرفته شده است که در آن درایه‌های ماتریس  $A$ ، یعنی  $a_{ij}$  ( $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$ ) به طور تصادفی از مجموعه  $\{1, \dots, 30\}$  انتخاب شده‌اند. هر یک از عناصر بردار  $b$  یعنی  $b_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) به صورت  $\theta_i \sum_{j=1}^{199} a_{ij}$  تعریف می‌شود که در آن  $\theta_i$  یک مقدار تصادفی در بازه  $[0.8, 0.9]$  است. در این مقاله، مقدار اولیه فرمون روی مسیرهای واصل بین دو راس  $i$  و  $i+1$  روی گراف مسیریابی برابر با ضریبی از عکس تعداد یال‌های خروجی راس  $i$  در شبکه مساله مکان‌یابی تدافعی است. تعداد مورچه‌ها ( $n_a$ )، تعداد تکرارها ( $nIt$ )،  $\alpha$ ،  $\beta$  و ضریب تخییر ( $\rho$ ) پارامترهای معمول در الگوریتم کلونی مورچگان هستند. علاوه بر آن پارامتر دیگری نیز برای الگوریتم کلونی مورچگان تعریف شده است. این پارامتر ( $mu$ ) ضریبی است که در عکس تعداد یال‌های خروجی برای تعیین مقدار اولیه فرمون روی مسیرهای گراف مسیریابی ضرب می‌شود. به منظور بررسی نتایج محاسباتی، پارامترهای الگوریتم کلونی مورچگان به روش تاگوچی<sup>۴</sup> تنظیم شده است. مقادیر آزمایش شده و مقادیر منتخب این پارامترها در جدول (۱) آورده شده است. سپس الگوریتم کلونی مورچگان ۲۰ بار با مقادیر منتخب پارامترها، برای مثال در نظر گرفته شده اجرا شده است و نتایج بدست آمده در جدول (۲) آورده شده است.

#### ۵. نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

در این مقاله برای حل مساله مکان‌یابی تدافعی با استفاده از الگوریتم کلونی مورچگان یک گراف مسیریابی در نظر گرفته شده است که متناظر با شبکه مساله مکان‌یابی تدافعی است. همچنین در این مقاله نحوه بدست آوردن اطلاعات فرمونی و اطلاعات ذهنی مورد نیاز الگوریتم کلونی مورچگان برای حل مساله مکان‌یابی تدافعی شرح داده شده است. برای نشان دادن کارایی این الگوریتم برای حل مساله مکان‌یابی تدافعی از یک مثال عددی که به طور تصادفی بدست آمده، استفاده شده است.

#### مراجع

1. M. Dorigo, *Optimization, learning and natural algorithms*, PhD thesis, Politecnico di Milano, Italy, 1992.
2. T. Uno, *Single and multi-objective defensive location problem on a network*, Eur.J.Oper. Res. 188 (2008), 76-84.

پست الکترونیکی: [zahra.maleki89@yahoo.com](mailto:zahra.maleki89@yahoo.com)

پست الکترونیکی: [maleki@sutech.ac.ir](mailto:maleki@sutech.ac.ir)

پست الکترونیکی: [akbari@sutech.ac.ir](mailto:akbari@sutech.ac.ir)



## منظم سازی تیخونوف تعمیم یافته با به کارگیری فرآیند هسنبگ برای حل معادلات ماتریسی بدو وضع

مهدی نجفی کلانی\*

بخش ریاضی، دانشکده ریاضی، دانشگاه ولی عصر رفسنجان، کرمان، ایران

و فاطمه پنجه علی بیک

بخش ریاضی، دانشکده ریاضی، دانشگاه ولی عصر رفسنجان، کرمان، ایران

چکیده. در این مقاله یک الگوریتم بر مبنای فرآیند هسنبگ جامع برای حل مسئله تیخونوف تعمیم یافته ارائه می شود که در حل معادلات ماتریسی بدو وضع بزرگ کاربرد دارد. در پایان نیز یک مثال بازسازی تصویر ارائه می شود که به بررسی کارآمدی و دقت الگوریتم مذکور می پردازد. واژه های کلیدی: فرآیند هسنبگ جامع، منظم سازی تیخونوف، مسائل بدو وضع، اصل تفاوت. طبقه بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 65F10.

### ۱. پیش گفتار

ابتدا به بیان نمادهایی که در مقاله پیش رو استفاده شده اند، می پردازیم. برای دو ماتریس  $Y$  و  $Z$  در  $\mathbb{R}^{n \times n}$ ، حاصل ضرب داخلی  $\langle X, Y \rangle_F = \text{tr}(X^T Y)$  می باشد که در آن  $\text{tr}(M)$  نشان دهنده مجموع قطری ماتریس مربعی  $M$  است. به دنبال آن  $\|\cdot\|_F$  داده شده توسط  $\|\cdot\|_F = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle_F}$  به نرم معروف فروبنیوس اشاره دارد. یک مجموعه از ماتریس ها  $F$ -متعامد یکه نامیده می شوند اگر نسبت به  $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$  متعامد یکه باشند. نماد  $A \otimes B = [a_{i,j} B]$  نشان دهنده ضرب کرونکر دو ماتریس  $A$  و  $B$  است. معادله ماتریسی زیر را در نظر بگیرید:

$$(1) \quad \sum_{k=1}^p A_k X B_k = C,$$

که در آن  $A_k, B_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، برای  $k = 1, 2, \dots, p$ ، ماتریس هایی بزرگ و بدحالت هستند و معمولاً از گسسته سازی مسائل بدو وضع مانند معادلات انتگرالی فردهم نوع اول بدست می آیند [۳، ۶]. ماتریس سمت راست آغشته به نویز است، به این صورت که  $C = \bar{C} + E$  و در آن  $\bar{C}$  عاری از خطا بوده و  $E$  نشان دهنده نویز ناشی از ابزارهای اندازه گیری یا خطاهای محاسباتی است. وجود نویز و بدحالتی ماتریس ضرایب باعث می شود تا بدست آوردن جواب مسئله مشکل باشد. برای حل چنین مسائلی از روش هایی برای منظم سازی (پایدارسازی) جواب مسئله استفاده می شود. روش منظم سازی تیخونوف تعمیم یافته<sup>۱</sup> مسئله (۱) را با مسئله مینیم سازی زیر

$$(2) \quad \min_{X \in \mathbb{R}^{n \times n}} \left\{ \|\mathcal{M}(X) - C\|_F^2 + \lambda \|\mathcal{L}(X)\|_F^2 \right\},$$

جایگزین می کند که در آن  $\mathcal{M}$  و  $\mathcal{L}$  دو عملگر به صورت زیر هستند:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} : \mathbb{R}^{n \times n} &\rightarrow \mathbb{R}^{n \times n} & \mathcal{L} : \mathbb{R}^{n \times n} &\rightarrow \mathbb{R}^{n \times n} \\ X &\rightarrow \mathcal{M}(X) = \sum_{k=1}^p A_k X B_k, & X &\rightarrow \mathcal{L}(X) = \sum_{k=1}^q L_k X L_k'. \end{aligned}$$

$L_k, L_k' \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ماتریس های منظم ساز هستند و  $\lambda > 0$  پارامتر منظم ساز است. روش منظم سازی تیخونوف (۲)، روشی مستقیم است، بنابراین استفاده از آن برای محاسبات با بُعد بالا هزینه بر است. در اینجا از فرآیند هسنبگ جامع<sup>۲</sup> برای کاهش بعد مسئله و تصویر سازی آن استفاده می کنیم.

<sup>2</sup> Global Hessenberg process

<sup>1</sup> Generalized Tikhonov regularization

\* سخنران

## ۲. روش هسنبرگ جامع (GL-HT)

روش ارائه شده تعمیمی از روش هسنبرگ برای حل معادلات ماتریسی است که اولین بار توسط سادک در [۷] ارائه شد. شکل تنسوری آن برای حل معادلات تنسوری بدووضع با به کارگیری منظم سازی تیخنونوف استاندارد اخیراً در [۴] ارائه شده است. برای توضیحات بیشتر می توان به [۲، ۷، ۴] مراجعه کرد. در اینجا به کاربرد آن در حل معادلات ماتریسی بدووضع با به کارگیری منظم سازی تیخنونوف تعمیم یافته می پردازیم. بعد از  $\ell$  گام از الگوریتم ۳ تقریب بدست آمده به صورت  $X_\ell = V_\ell(y_\ell \otimes I_n)$  خواهد بود که در آن  $V_\ell = [V_1, \dots, V_\ell]$ . با استفاده از شگرد ارائه شده در [۳]، می توان دید:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{M}(X) - C\|_F^2 &= \|\tilde{H}_\ell y_\ell - \|C\|_{Fe}\|_F^2 \\ \|\mathcal{L}(X)\|_F^2 &= \left\| \sum_{k=1}^q L_k X L_k' \right\|_F^2 = \left\| \sum_{i=1}^{\ell} y_\ell^{(i)} \underbrace{\left( \sum_{j=1}^q L_j V_i L_j' \right)}_{M_i} \right\|_F^2 = y_\ell^T N y_\ell \end{aligned}$$

که در آن

$$N = [n_{ij}], \quad n_{ij} = \text{tr}(M_i^T M_j), \quad y_\ell = (y_\ell^{(1)}, \dots, y_\ell^{(\ell)})^T$$

از آنجا که  $N_\ell$  ماتریس گرام و نامنفرد است، می توانیم تجزیه چولکسی آن را محاسبه کنیم. بنابراین داریم:

$$y_\ell^T N y_\ell = y_\ell^T \tilde{L}_\ell \tilde{L}_\ell^T y_\ell = \|\tilde{L}_\ell^T y_\ell\|_F^2.$$

در نتیجه مسئله مینیم سازی (۲) به مسئله مینیم سازی کاهش یافته زیر تبدیل می شود:

$$(۳) \quad \min_{y \in \mathbb{R}^\ell} \left\{ \|\tilde{H}_\ell y - \|C\|_{Fe}\|_F^2 + \lambda \|\tilde{L}_\ell^T y\|_F^2 \right\}$$

لذا با قرار دادن  $\hat{H}_\ell = \tilde{H}_\ell \tilde{L}_\ell^{-T}$  و  $z = \tilde{L}_\ell^T y$  می توان نشان داد مسئله مینیم سازی (۲) به یک مسئله تیخنونوف استاندارد به شکل زیر تبدیل می شود:

$$(۴) \quad \min_{z \in \mathbb{R}^\ell} \left\| \begin{bmatrix} \hat{H}_\ell \\ \lambda^{1/2} I_\ell \end{bmatrix} z - \begin{bmatrix} \|C\|_{Fe} \\ 0 \end{bmatrix} \right\|_F^2.$$

از آنجا که بعد مسئله (۴) نسبتاً کوچک است، حل آن هزینه محاسباتی کمتری دارد. روش های مختلفی برای تخمین پارامتر منظم ساز وجود دارد. در این مقاله از روش اصل تفاوت<sup>۳</sup> برای تعیین پارامتر منظم ساز  $\lambda > 0$  با ثابت  $1/10$  استفاده شده است. برای توضیحات بیشتر به [۵، ۳] مراجعه شود. همچنین می توان از روش ارزیابی تقاطع تعمیم یافته (GCV) [۶، ۱] یا روش  $L$ -منحنی [۱] برای تخمین پارامتر منظم ساز استفاده نمود.

## ۳. نتایج عددی

در این بخش به بیان یک مثال در ارتباط با حل مسئله بدووضع (۱) می پردازیم. ما مسئله را در محیط بازیابی تصاویر بیان کردیم. تمامی محاسبات با استفاده از کامپیوتر شخصی (با مشخصات حافظه ۸ گیگابایتی، پردازشگر ۵ هسته ای) و نرم افزار متلب نسخه 2018a انجام شده است. منظور از تصویر اولیه در مثال ۱.۳ همان  $\hat{X}$  است. ماتریس  $\hat{C} = A\hat{X} + \hat{X}B$  تصویر بدون نویز مرتبط را نشان می دهد. یک تصویر نویز دار  $C = \hat{C} + E$  ایجاد نمودیم که در آن  $E$  ماتریس نویز با ورودی هایی است که به صورت نرمال و تصادفی پراکنده شده و دارای میانگین صفر و واریانس انتخاب شده ای مانند  $\|E\|/\|C\| = \eta$  می باشد.  $\eta > 0$  سطح نویز نامیده می شود. در جدول ۱ خطای نسبی به صورت  $e_\ell = \|X_{\ell, \lambda_\ell} - \hat{X}\|_F / \|\hat{X}\|_F$  گزارش شده است که در آن  $\hat{X}$  جواب واقعی و  $X_{\ell, \lambda_\ell}$ ،  $\ell$ -امین تقریب بدست آمده است. برای نشان دادن کارایی الگوریتم ۳، آن را با [۳]، الگوریتم ۳ (GI-AT) و [۱]، الگوریتم ۱ (GGI-AT) مقایسه نمودیم. تکرارها در هر دو الگوریتم به محض اینکه  $\|X_{\ell, \lambda_\ell} - X_{\ell-1, \lambda_{\ell-1}}\|_F / \|X_{\ell-1, \lambda_{\ell-1}}\|_F \leq \tau$  برقرار شود متوقف می شود. برای مثال ۱.۳،  $\tau = 5 \times 10^{-3}$  انتخاب شده است. حداکثر تعداد تکرار مجاز برای الگوریتم ها ۴۰ می باشد. در جدول ۱، "Iter" نشان دهنده تعداد تکرارهای انجام شده و "CPU-times(sec)" نشان دهنده زمان محاسبه روش است. در مثال ارائه شده ماتریس های منظم ساز به صورت  $L_1 = L_2 = \text{tridiag}(-1, 2, -1)$  انتخاب شده اند. برای نمونه های بیشتر از ماتریس های منظم ساز می توانید به [۱، ۳] مراجعه کنید.

<sup>3</sup> Discrepancy principle

- 1: **Input:**  $A^{(i)}, i = 1, \dots, p; L^{(j)}, j = 1, \dots, q$ ; matrix  $C$ ;
- 2: **Output:** approximation solution  $X_\ell$ ;
- 3: **for**  $\ell = 1, 2, \dots$  until convergence **do**
- 4: Construct  $\mathcal{V}_\ell$  with the column matrices  $V_i$ 's and  $\tilde{\mathcal{H}}_\ell$  by global Hessenberg method in [2, Algorithm 4];
- 5: Compute  $M_i = \sum_{j=1}^q L_j^{(1)} V_i L_j^{(2)} (1 \leq i \leq \ell)$ ;
- 6: Compute  $\mathcal{N}_\ell = [n_{i,j}] \in \mathbb{R}^{\ell \times \ell}$ ,  $n_{i,j} = \langle M_i, M_j \rangle_F$ ;
- 7: Compute Choleski factorization  $\mathcal{N}_\ell = \tilde{L}_\ell \tilde{L}_\ell^T$ ;
- 8: Compute  $\hat{H}_\ell = \tilde{\mathcal{H}}_\ell \tilde{L}_\ell^{-T}$ ;
- 9: Compute regularization parameter  $\lambda$  by the discrepancy principle with user-chosen constant  $\eta = 1.01$  [3];
- 10: Compute  $z_{\lambda,\ell}$  by  $\min_{z \in \mathbb{R}^\ell} \left\| \begin{bmatrix} \hat{H}_\ell \\ \lambda^{1/2} I_\ell \end{bmatrix} z - \begin{bmatrix} \|C\|_F \\ 0 \end{bmatrix} \right\|_2^2$ ,
- 11: and let  $y_\ell = \tilde{L}_\ell^{-T} z_{\lambda,\ell}$ ; Compute  $X = \sum_{i=1}^\ell y_\ell^{(i)} V_i$ , where  $y_\ell = (y_\ell^{(1)}, \dots, y_\ell^{(\ell)})^T$ ;
- 12: **end for**

مثال ۱۰۳. یک مسأله بازیابی تصویر را در نظر بگیرید. تصویر بدون نویز “cameraman” برگرفته از نرم افزار متلب و از بعد  $256 \times 256$  می‌باشد. معادله  $AX + XB = C$  را در نظر بگیرید. در آن  $A = [a_{ij}]$  و  $B = [b_{ij}]$  ماتریس‌های توپلیتر گاوسین به صورت

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(i-j)^2}{2\sigma^2}\right), & |i-j| \leq r, \\ 0, & \text{سایر جاها.} \end{cases} \quad b_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2r-1}, & |i-j| \leq r, \\ 0, & \text{سایر جاها.} \end{cases}$$

هستند و  $r = 17, \sigma = 2$ . تصویر بازسازی شده در شکل ۲ و مقایسه نتایج عددی در جدول ۱ ارائه شده است.



(ب)



(آ)

شکل ۱. آ) تصویر اولیه و بدون نویز؛ ب) تصویر آغشته به نویز.



شکل ۲. تصویر بازسازی شده توسط: (آ) GI-HT، (ب) GI-AT، (ج) GGI-AT، برای  $\eta = 0.01$ .

جدول ۱. مقایسه نتایج برای مثال ۱.۳.

$\eta$	Method	Iter( $\ell$ )	CPU-times(sec)	$e_\ell$
0.01	GI-HT	8	0.29	0.0759
	GI-AT	9	0.35	0.0781
	GGI-AT	16	2.51	0.0825
0.001	GI-HT	10	0.45	0.0594
	GI-AT	9	0.40	0.0593
	GGI-AT	6	0.22	0.0734

## مراجع

1. Bouhamidi, A., Jbilou, K., Reichel, L., & Sadok, H. (2012). A generalized global Arnoldi method for ill-posed matrix equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 236(8), 2078-2089.
2. Heyouni, M. (2001). The global Hessenberg and CMRH methods for linear systems with multiple right-hand sides. *Numerical Algorithms*, 26(4), 317-332.
3. Huang, G., Reichel, L., & Yin, F. (2018). On the choice of subspace for large-scale Tikhonov regularization problems in general form. *Numerical Algorithms*, 1-23.
4. Najafi-Kalyani, M., Beik, F. P. A., & Jbilou, K. (2019). On global iterative schemes based on Hessenberg process for (ill-posed) Sylvester tensor equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2019.03.045>.
5. Reichel, L., Sgallari, F., & Ye, Q. (2012). Tikhonov regularization based on generalized Krylov subspace methods. *Applied Numerical Mathematics*, 62(9), 1215-1228.
6. Reichel, L., & Yu, X. (2015). Matrix decompositions for Tikhonov regularization. *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, 43, 223-243.
7. Sadok, H. (1999). CMRH: A new method for solving nonsymmetric linear systems based on the Hessenberg reduction algorithm. *Numerical Algorithms*, 20(4), 303-321.

پست الکترونیکی: [mehdi.najafi@stu.vru.ac.ir](mailto:mehdi.najafi@stu.vru.ac.ir)

پست الکترونیکی: [f.beik@vru.ac.ir](mailto:f.beik@vru.ac.ir)

## بررسی پایداری و حل عددی یک مدل اپیدمی $SIR$ با عامل واکسیناسیون

علی هادی و محمدایزدی\*

بخش ریاضی کاربردی، دانشکده ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر کرمان، ایران

چکیده. هدف از این مقاله ایجاد یک روش تفاضلات متناهی غیراستاندارد ( $NSFD$ ) برای محاسبه یک مدل اپیدمی با استفاده از روش تفاضلات متناهی غیراستاندارد است. همچنین نشان می‌دهیم برای طول گام  $h < h_0$  روش عددی ارائه شده می‌تواند دینامیک کلی دستگاه پیوسته را حفظ کند.

واژه‌های کلیدی: روش تفاضلات متناهی غیراستاندارد، مدل تأخیر زمانی، حل مدل همه‌گیری.  
طبقه‌بندی موضوعی [ $2010$ ]: (۱ تا ۳ مورد) 13D45, 39B42.

### ۱. پیش‌گفتار

یکی از موارد پیشگیری و کنترل گسترش برخی از بیماری‌های واگیردار واکسیناسیون است. مدل‌های ریاضی اغلب برای ارائه بینش عمیق‌تر نسبت به انتقال پویایی بیماری و ارزیابی کنترل آن استفاده می‌شود. مطالعه مدل‌های اپیدمی با واکسیناسیون یکی از موارد مهم در نظریه ریاضی اپیدمیولوژی است. واکسینه شدن در مقابل یک بیماری خاص مانند آبله مرغان باعث ایجاد یک ایمنی دائم در برابر بیماری می‌شود، با این حال ممکن است پس از مدتی، ایمنی ناشی از واکسن کاهش یابد، در واکسن‌های پیشگیرانه برای جلوگیری از بیماری‌ها عفونی مانند هپاتیت B، فلج اطفال و ... هنگامی که اثر واکسن از بدن فرد واکسینه شده از بین می‌رود، فرد مجدداً مستعد دریافت بیماری می‌شود. از این رو باید شرایطی را که بتواند پیش بینی سطح مطلوب واکسن مورد نیاز برای جلوگیری از گسترش بیماری همه‌گیر می‌شود را ایجاد کنیم [۱، ۲]. در این بخش به بررسی و مطالعه دستگاه معادلات تأخیری زیر با عامل واکسیناسیون می‌پردازیم:

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dS}{dt} = a - dS - pS - \beta SI + pS(t - \tau)e^{-d\tau}, \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - (d + \alpha + \gamma)I, \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I + pS - dR - pS(t - \tau)e^{-d\tau}, \end{cases}$$

که در اینجا فرض می‌شود،  $S(t)$  تعداد افراد حساس،  $I(t)$  تعداد افراد آلوده،  $R(t)$  تعداد افراد بهبود یافته در یک جمعیت هستند. همچنین  $a$ ، نرخ افرادی که متولد شده‌اند،  $d$  نرخ تعداد افرادی که به اثر مرگ طبیعی از دنیا رفته‌اند،  $p$  ضریب نرخ واکسیناسیون برای افراد حساس در جمعیت،  $\beta$  ضریب آلودگی،  $\alpha$  ضریب مرگ و میر ناشی از بیماری و  $\gamma$  ضریب بهبودی افراد بهبود یافته از بیماری است. همچنین دوره ایمن‌سازی را با نماد  $\tau$  نمایش می‌دهیم که به عنوان یک پارامتر تأخیری است. این بدان معنا است، افرادی که در زمان  $t - \tau$  واکسینه می‌شوند، به گروه افراد مستعد به بیماری در زمان  $t$  باز می‌گردند [۳].

### ۲. نتایج اصلی

لم ۱.۲. در دستگاه (۱)،  $(S, I) \in D = \{(S, I) \mid S > 0, I > 0, S + I \leq \frac{a}{d}\}$  قرار دهید:

$$R_0 = \frac{\beta\alpha}{(d + \alpha + \gamma)[d + p(1 - e^{-d\tau})]}.$$

در این صورت داریم:

- (i) اگر  $R_0 \leq 1$ ، آنگاه دستگاه (۱) یک نقطه تعادل بدون بیماری منحصربه‌فرد  $E^0 = (S^0, 0, 0)$  را دارد که پایدار مجانبی کلی در  $D$  است.  
(ii) اگر  $R_0 > 1$ ، آنگاه دستگاه (۱) دارای دو نقطه تعادل بدون بیماری  $E^0$  و نقطه تعادل اندمیک  $E^* = (S^*, I^*, R^*)$  است. نقطه تعادل اندمیک  $E^*$  پایدار مجانبی کلی در درون  $D$  است.

که در آن

$$S^0 = \frac{a}{d + p(1 - e^{-d\tau})}, \quad S^* = \frac{d + \alpha + \gamma}{\beta}, \quad I^* = \frac{a}{d + \alpha + \gamma} \left(1 - \frac{1}{R_0}\right).$$

\* سخنران

از سوی دیگر، مزایای بسیاری برای در نظر گرفتن یک مدل اپیدمی گسسته با واکسیناسیون وجود دارد. در واقع داده‌های آماری همه‌گیری در زمان‌های گسسته مانند روزانه، هفتگی، ماهانه یا سالانه جمع‌آوری و گزارش می‌شود. رویکردهای عددی اغلب در مدل‌های پیوسته استفاده می‌شود. مدل‌های گسسته اغلب رفتارهای پیچیده‌تری نسبت به مدل‌های پیوسته دارند. روش‌های شناخته شده قدیمی مانند اویلر، رونگه کوتا و... گاهی ناپایدار می‌شوند. علاوه بر این، بعضی از روش‌ها علی‌رغم استفاده از طول گام مناسب همچنان ناپایدار هستند. یک جایگزین برای جلوگیری از این کلاس‌های ناپایداری عددی، ساختن روش‌های عددی با استفاده از روش تفاضل متناهی غیراستاندارد است که توسط میکزن توسعه یافته است. این روش‌های عددی جدید موجب حفظ خواص مدل پیوسته می‌شود. اما هنگامی که تعادل اندمیک در دستگاه پیوسته به طور کلی پایدار می‌شود، در اغلب موارد ما صرفاً نشان می‌دهیم مدل گسسته به دست آمده از طریق روش‌های مختلف پایدار است، پایداری اندمیک در مدل گسسته به سختی محاسبه می‌شود که به ندرت پایدار است. بنابراین، انتخاب روش‌های عددی که بتواند پایداری مجانبی کلی را برای تعادل اندمیک مدل‌های گسسته حفظ کند موضوع بسیار مهمی است. در ادامه ما نشان خواهیم داد که مدل اپیدمی گسسته با واکسیناسیون که توسط میکزن با گسسته‌سازی غیر استاندارد به دست آمده دارای پایداری مثبت است.

۱.۲. گسسته سازی مدل همه گیر با واکسیناسیون. در این بخش به ترتیب  $S_n$  دلالت کلاس افراد مستعد،  $I_n$  کلاس افراد آلوده و  $R_n$  کلاس افراد بهبود یافته در مرحله  $n$  است. با اعمال روش غیراستاندارد میکزن مدل پیوسته (۱)، ما مدل همه‌گیری گسسته زیر با عامل واکسیناسیون را نتیجه خواهیم گرفت که یک دستگاه معادلات تفاضلی تأخیری است:

$$\begin{aligned} \frac{S_{n+1} - S_n}{h} &= a - dS_n - pS_{n+1} - \beta S_{n+1}I_n + pS_{n-m}e^{-d\tau}, \\ \frac{I_{n+1} - I_n}{h} &= \beta S_{n+1}I_n - (d + \alpha + \gamma)I_n, \\ \frac{R_{n+1} - R_n}{h} &= \gamma I_n + pS_{n+1} - dR_n - pS_{n-m}e^{-d\tau}, \end{aligned} \quad (2)$$

که در معادله فوق  $h > 0$  طول گام و  $m$  یک مقدار صحیح مثبت است که در رابطه  $\tau = mh$  صدق می‌کند. شرایط اولیه دستگاه (۲) بصورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$S_{-k} = \varphi_1(-kh) \geq 0, \quad S_0 > 0, \quad I_0 > 0, \quad R_0 > 0, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (3)$$

همانطور که در معادله (۲) مشاهده می‌شود متغیر  $R_n$  در دو معادله‌ی اول دستگاه (۲) وجود ندارد، لذا دستگاه (۲) را به صورت زیر بررسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{S_{n+1} - S_n}{h} &= a - dS_n - pS_{n+1} - \beta S_{n+1}I_n + pS_{n-m}e^{-d\tau}, \\ \frac{I_{n+1} - I_n}{h} &= \beta S_{n+1}I_n - (d + \alpha + \gamma)I_n, \end{aligned} \quad (4)$$

شرایط اولیه برای دستگاه (۴) به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$S_{-k} \geq 0, \quad S_0 > 0, \quad I_0 > 0, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

با انجام محاسبات ساده، مقادیر  $S_{n+1}$  و  $I_{n+1}$  در دستگاه (۴) را به فرم زیر به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \frac{ha + (1 - dh)S_n + hpS_{n-m}e^{-d\tau}}{1 + ph + \beta hI_n}, \\ I_{n+1} &= \beta hS_{n+1}I_n + [1 - h(d + \alpha + \gamma)]I_n. \end{aligned} \quad (5)$$

قرار می‌دهیم

$$h_0 = \frac{1}{d + \alpha + \gamma}, \quad (6)$$

به سادگی می‌توان لم زیر را به دست آورد.

لم ۲.۲. هنگامی که  $h < h_0$ ، هر جواب برای  $(S_n, I_n)$  از دستگاه (۴) برای هر  $n \in \mathbb{N}$  مثبت است. قرار دهید  $N_n = S_n + I_n + R_n$  در این صورت:

$$N_{n+1} = ah + (1 - dh)N_n - \alpha hI_n \leq ah + (1 - dh)N_n. \quad (7)$$

۲.۲. پایداری مجانبی کلی نقاط تعادلی. یک نقطه تعادل دستگاه (۴) در روابط زیر صدق می‌کند:

$$\begin{aligned} 0 &= a - (d + p)S - \beta SI + pSe^{-d\tau}, \\ 0 &= \beta SI - (d + \alpha + \gamma)I, \end{aligned} \quad (۸)$$

به راحتی می‌توان نشان داد که نقاط تعادل دستگاه گسسته (۲) همان نقاط تعادل دستگاه (۱)، یعنی نقاط  $E^*$  و  $E^0$  هستند. علاوه بر این

$$R_0 = \frac{\beta S^0}{d + \alpha + \gamma}. \quad (۹)$$

در این بخش ابتدا ما شرایط کافی برای پایداری مجانبی کلی، نقطه تعادل بدون بیماری  $E^0$  از دستگاه (۴) را با استفاده از تابع لیاپانوف به دست می‌آوریم.

قضیه ۳.۲. فرض کنید  $h < h_0$ ، در این صورت داریم:  
الف) اگر  $R_0 \leq 1$ ، تعادل بدون بیماری  $E^0(S^0, 0)$  از دستگاه (۴) پایدار مجانبی کلی در  $D$  است.  
ب) اگر  $R_0 > 1$ ، آنگاه  $E^0$  ناپایدار است.

در ادامه ما، پایداری کلی تعادل بومی دستگاه (۴) را با استفاده از یک تابع لیاپانوف نشان می‌دهیم.

قضیه ۴.۲. اگر  $h < h_0$  و  $R_0 > 1$  آنگاه، تعادل اندمیک  $E^*(S^*, I^*)$  از دستگاه (۴) دارای پایدار مجانبی است [۵].

### ۳. دست‌آوردهای پژوهش

مثال ۱.۳. در این مثال تعداد افراد مستعد  $S(t) = 55$ ، تعداد افراد آلوده  $I(t) = 75$ ، تعداد افراد بهبود یافته  $R(t) = 45$  می‌شود، همچنین نرخ افراد متولد شده  $a = 14$ ، نرخ تعداد افرادی که بر اثر مرگ طبیعی از دنیا رفته‌اند  $d = 0.3$ ، ضریب نرخ واکسیناسیون برای افراد مستعد در جمعیت  $p = 0.6$ ، ضریب آلودگی  $\beta = 0.4$ ، ضریب مرگ و میر ناشی از بیماری  $\alpha = 0.09$ ، ضریب بهبودی افراد بهبود یافته از بیماری  $\gamma = 0.9$  و دوره ایمن سازی  $\tau = 11$  است. با قرار دادن ضرایب فوق در معادله (۱) دستگاه زیر را داریم:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = 14 - 0.3S - 0.6S - 0.4SI + 0.6S(t-11)e^{-0.3 \times 11}, \\ \frac{dI}{dt} = 0.4SI - (0.3 + 0.09 + 0.9)I, \\ \frac{dR}{dt} = 0.9I + 0.6S - 0.3R - 0.6S(t-11)e^{-0.3 \times 11}. \end{cases} \quad (۱۰)$$

با استفاده از پارامترهای داده شده فوق مقادیر  $h_0$  و  $R_0$  با استفاده از روابط (۹) و (۶) را بصورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$h_0 = \frac{1}{d + \alpha + \gamma} = \frac{1}{0.3 + 0.09 + 0.9} = 0.8271$$

و

$$R_0 = \frac{\beta S^0}{d + \alpha + \gamma} = \frac{0.4 \times 15.95}{1.29} = 0.5276 < 1$$

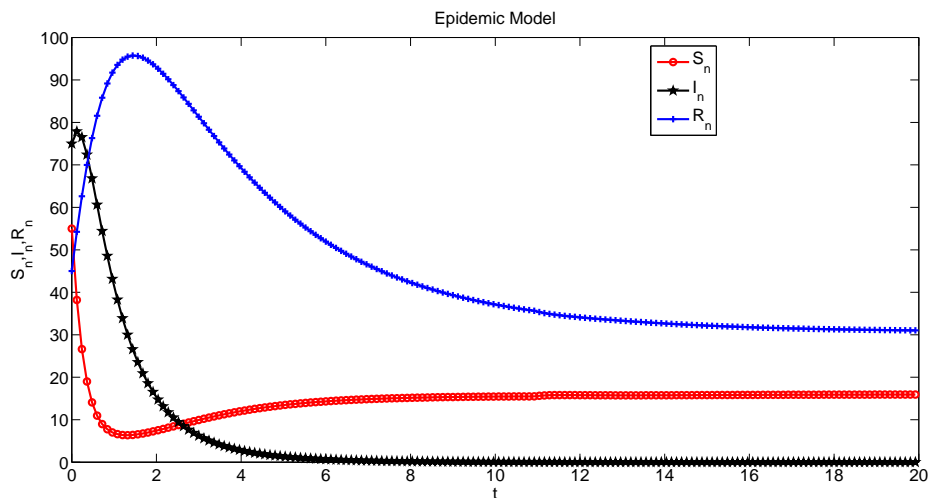
همچنین مقدار

$$S^0 = \frac{a}{d + p(1 - e^{-d\tau})} = 15.95$$

است و معادله (۱۰) دارای نقطه تعادل منحصربه‌فرد

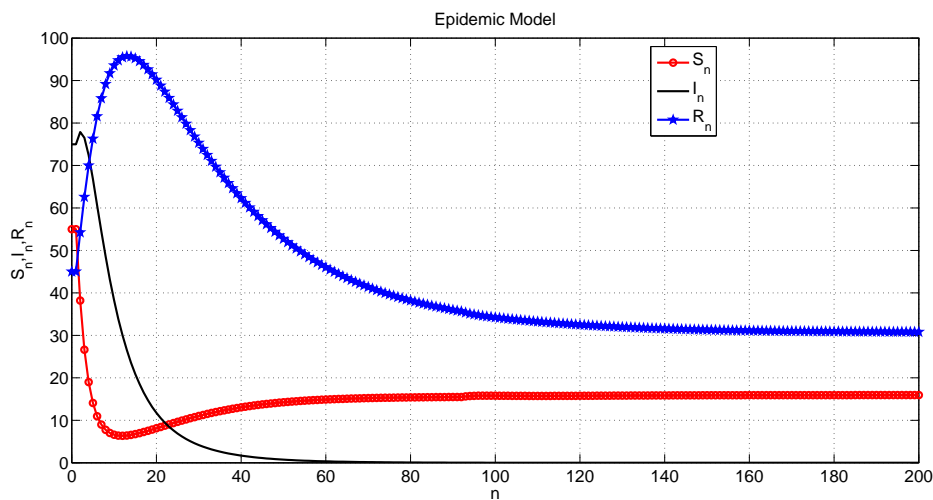
$$E^0 = (S^0, I^0, R^0) = (15.95, 0, 30.72)$$

است. با استفاده از لم ۱-۲-۵ قسمت (i)، نقطه  $E^0$  یک نقطه پایدار مجانبی کلی برای دستگاه (۱۰) است. در شکل (۱) تعداد افراد مستعد، آلوده و بهبود یافته شده (روی محور عمودی) بر حسب گام‌های زمانی  $n$  (روی محور افقی) رسم شده است. در این شکل دستگاه (۱۰) با استفاده از روش تفاضلات متناهی غیر استاندارد (۲) به ازای  $h = 0.12 < h_0$  حل شده است.



شکل ۱. نمودار دستگاه (۱۰) با روش (۲) برای  $h = ۰/۱۲$

همانطور که از شکل (۱) مشاهده می‌شود برای  $h = ۰/۱۲ < h_0$  نقطه تعادل بدون بیماری  $E^0$  در دستگاه (۱۰) یک نقطه پایداری مجانبی کلی است. بنابراین، از شکل (۱) استنباط می‌شود برای  $h < h_0$  روش عددی ارائه شده (۲) می‌تواند دینامیک کلی دستگاه پیوسته را حفظ کند. همچنین در شکل (۲) نمودارهای  $S, I, R$  بر حسب تعداد زیر بازه‌ها  $n$  برای طول گام  $h = ۰/۱۲$  ترسیم شده است.



شکل ۲. نمودار دستگاه (۱۰) با روش (۲) برای  $h = ۰/۱۲$

همانطور که مشاهده می‌شود شکل (۱) که بر حسب زمان  $t$  رسم شده است، زودتر به پایداری می‌رسد [۴].

### مراجع

1. R. M. Anderson and R.M. May, Infectious Diseases of Humans: Dynamics and Control, Oxford University Press, Oxford and New York, (1991).
2. M. Zhien and L. Jia, Dynamical Modeling and Analysis of Epidemics. World Scientific, (2009).
3. Z. Ma, Y. Zhou, W. Wang, and Z. Jing, The Mathematical Modeling and Study of the Dynamics of Infectious Diseases, Science Press, Beijing, (2004).



4. D. Ding, Q. Ma and X. Ding. A non-standard finite difference scheme for an epidemic model with vaccination. Journal of Difference Equations and Applications.19(2013), 179-190.
5. M. Chen and D.P. Clemence, Stability properties of a nonstandard finite difference scheme for a hantavirus epidemic model, Journal of Difference Equations and Applications, 12(2006), 1243-1256.

پست الکترونیکی: [amirali98@gmail.com](mailto:amirali98@gmail.com)

پست الکترونیکی: [izadi@uk.ac.ir](mailto:izadi@uk.ac.ir)

## حل عددی معادله پنتاگراف کسری با استفاده از چندجمله‌ای‌های چبیشف

مرضیه پوریابایی\*  
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران  
عباس سعادتمندی  
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، کشور

چکیده. در مطالعه حاضر با استفاده از ماتریس تبدیل چند جمله‌ای‌های چبیشف جواب عددی معادله دیفرانسیل تاخیری کسری پنتاگراف را در یک بازه بزرگ به دست می‌آوریم. برای مفهوم مشتق کسری از مشتق کسری کاپوتو استفاده می‌شود و با استفاده از آن و جایگذاری در معادله اصلی به یک دستگاه از معادلات جبری خواهیم رسید که با حل آن ضرایب مجهول در بسط تابع به دست خواهند آمد.  
واژه‌های کلیدی: چندجمله‌ای چبیشف، معادله پنتاگراف، مشتق کسری کاپوتو.  
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 65L03, 65L10, 65N35.

## ۱. مقدمه

معادلات دیفرانسیل تاخیری کسری در سیستم‌های مختلفی مانند کنترل اتوماتیک، بیولوژی، شبکه‌های هیدرولیک، اقتصاد و... کاربرد دارند. معادله پنتاگراف یکی از مهمترین نوع از معادلات دیفرانسیل تاخیری است و نقش مهمی در توضیح پدیده‌های مختلف دارد که در سال‌های اخیر چندین روش عددی برای حل معادلات دیفرانسیل تاخیری پنتاگراف از مرتبه صحیح به کارگرفته شده است. از جمله چندجمله‌ای‌های چبیشف [۶]، چندجمله‌ای‌های برنولی [۸]، و... اما برای حل معادله دیفرانسیل تاخیری پنتاگراف از مرتبه کسری کارهای کمی انجام شده است که از این جمله روش موجک هرمیتی [۵]، روش هم مکانی موجک چندگانه لژاندر [۹]، روش توابع ژاکوبی شیفیت یافته [۱] و موجک لژاندر مونتر [۲] است. ما در این مقاله سعی داریم معادله دیفرانسیل تاخیری پنتاگراف کسری را که به شکل زیر نمایش داده می‌شود [۷] با استفاده از ماتریس تبدیل چندجمله‌ای‌های چبیشف حل کنیم.

$$(1) \quad D^\alpha u(t) = u(t) + \sum_{r=1}^l D^{\alpha_r} u(q_r t), \quad m-1 < \alpha \leq m, \quad t \in [0, L].$$

تحت شرایط  $u^{(i)}(0) = \mu_i, \quad i = 0, 1, \dots, m-1$  در اینجا  $0 \leq \alpha_r < \alpha \leq m, \quad r = 1, 2, \dots, l$  و  $0 < q_r < 1$  تابعی مجهول است.

## ۲. مقدمات و پیش نیازها

در این قسمت برخی از خواص مشتق کسری که در این مقاله مورد استفاده قرار می‌گیرد را بررسی می‌کنیم. در عمل مشتق کسری کاپوتو قابل فهم تر است و بنابراین ما در این مقاله از این نوع مشتق استفاده می‌کنیم.

تعریف ۱.۰۲. مشتق کسری کاپوتو از مرتبه  $\alpha$  به فرم زیر تعریف می‌شود. [۲]

$$(2) \quad D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(s)}{(t-s)^{\alpha+1-n}} ds, \quad n-1 < \alpha \leq n, \quad n \in \mathbb{N}$$

به طوری که  $\alpha > 0$  مرتبه مشتق و  $n = [\alpha]$  نیز کوچکترین عدد صحیح بزرگتر یا مساوی با  $\alpha$  و  $\Gamma(\cdot)$  نشان دهنده تابع گاما است. برای مشتق کسری روابط زیر برقرار است.

$$(3) \quad D^\alpha C = 0, \quad D^\alpha t^m = \begin{cases} 0 & m < [\alpha] \\ \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1-\alpha)} t^{m-\alpha} & m \geq [\alpha] \end{cases}, \quad m \in \mathbb{N}$$

چندجمله‌ای‌های چبیشف  $\{T_i(t), i = 0, 1, \dots\}$  در بازه  $(-1, 1)$  تعریف می‌شوند. به منظور استفاده از این چندجمله‌ای‌ها در بازه  $t \in (0, L)$  ما چندجمله‌ای‌های چبیشف شیفیت یافته را که با تغییر متغیر  $t = \frac{Lx}{2} - 1$  ساخته می‌شوند تعریف می‌کنیم. فرض

کنید چندجمله‌ای‌های چیشف شیفت یافته  $T_i(\frac{yx}{L} - 1)$  به صورت  $T_{L,i}(x)$  نشان داده می‌شوند که در شرط تعامد زیر صدق می‌کنند.

$$(4) \quad \int_0^L T_{L,j}(x) T_{L,k}(x) w_L(x) dx = \delta_{kj} h_k$$

به طوری که  $1 \leq k$ ,  $\epsilon_k = 1$ ,  $\epsilon_0 = 2$ ,  $h_k = \frac{\epsilon_k}{\sqrt{Lx-x^2}} \pi$ ,  $w_L(x) = \frac{1}{\sqrt{Lx-x^2}}$  فرم تحلیلی چندجمله‌ای‌های چیشف شیفت یافته  $T_{L,i}(x)$  از درجه  $i$  به فرم زیر نمایش داده می‌شود.

$$(5) \quad T_{L,i}(x) = i \sum_{k=0}^i \frac{(-1)^{i-k} (i+k-1)! 2^k}{(i-k)! (2k)! L^k} x^k$$

که  $T_{L,i}(L) = 1$ ,  $T_{L,i}(0) = (-1)^i$ . که در این فرم  $T_{L,i}(x)$  از فرمول بازگشتی زیر ساخته می‌شود.

$$(6) \quad T_{L,i+1}(x) = 2\left(\frac{yx}{L} - 1\right) T_{L,i}(x) - T_{L,i-1}(x), \quad i = 1, 2, \dots$$

که  $T_{L,0}(x) = 1$ ,  $T_{L,1}(x) = \frac{yx}{L} - 1$ .

### ۳. بیان روش و تقریب تابع

هر تابع  $u(x)$  که در  $(0, L)$  مربع انتگرال پذیر باشد را می‌توان به صورت بسط چندجمله‌ای‌های چیشف شیفت یافته به صورت زیر نوشت که  $u(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j T_{L,j}(x)$  که ضرایب  $c_j$  بدین شکل به دست می‌آیند.

$$c_j = \frac{1}{h_j} \int_0^L u(x) T_{L,j}(x) w_L(x) dx, \quad j = 0, 1, \dots$$

در عمل تنها  $N+1$  جمله اول چندجمله‌ای‌های چیشف شیفت یافته در نظر گرفته می‌شود. از این رو ما می‌نویسیم

$$(7) \quad u_N(x) = \sum_{j=0}^N c_j T_{L,j}(x) = C^T \Phi(x),$$

به طوری که  $C^T = [c_0, c_1, \dots, c_N]$ ,  $\Phi(x) = [T_{L,0}(x), T_{L,1}(x), \dots, T_{L,N}(x)]$ .

مشتق بردار  $\Phi(x)$  به صورت  $\frac{d\Phi(x)}{dx} = D^{(1)} \Phi(x)$  به دست می‌آید به طوری که  $D^{(1)}$  ماتریس  $(N+1) \times (N+1)$  است که به فرم زیر نشان داده می‌شود:

$$D^{(1)} = d_{ij} = \begin{cases} \frac{\epsilon_i}{\epsilon_j L}, & j = 0, 1, \dots, i = j+k, \\ 0, & \text{در غیر این صورت.} \end{cases} \quad \begin{cases} k = 1, 3, \dots, N, & \text{برای } N \text{ فرد} \\ k = 1, 3, \dots, N-1, & \text{برای } N \text{ زوج} \end{cases}$$

فرم ماتریسی چندجمله‌ای‌های چیشف به صورت زیر بیان می‌شود که [۱۰]

$$\Phi(x) = A T_N(x)$$

به طوری که

$$(8) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 2(-1)^2 \frac{1!}{1!} & 2(-1)^1 \frac{2^2 2!}{1!} & 2(-1)^0 \frac{2^2 3!}{1!} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N(-1)^N \frac{(N-1)!}{N!} & N(-1)^{N-1} \frac{2^2 (N)!}{1!(N-1)!} & N(-1)^{N-2} \frac{2^2 (N+1)!}{1!(N-2)!} & \dots & N(-1)^0 \frac{2^2 N (2N-1)!}{1! N!} \end{pmatrix}.$$

و  $T_N(x) = [1, x, x^2, \dots, x^N]^T$  در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha(u(x))}{dx^\alpha} &= \frac{d^\alpha(C^T \Phi(x))}{dx^\alpha} = C^T \frac{d^\alpha(\Phi(x))}{dx^\alpha} \\ &= C^T \frac{d^\alpha}{dx^\alpha}(AT_N(x)) = C^T A \frac{d^\alpha}{dx^\alpha}(T_N(x)) \\ &= C^T A \begin{bmatrix} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} x^{1-\alpha} & \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} x^{2-\alpha} & \dots & \frac{\Gamma(N+1)}{\Gamma(N+1-\alpha)} x^{N-\alpha} \end{bmatrix} \\ &= C^T AM_{\alpha,x} T_N(x) \end{aligned}$$

که در آن ماتریس  $M_{\alpha,x}$  به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$(9) \quad M_{\alpha,x} = \begin{bmatrix} \circ & \circ & \circ & \dots & \circ \\ \circ & \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} x^{-\alpha} & \circ & \dots & \circ \\ \circ & \circ & \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} x^{-\alpha} & \dots & \circ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \frac{\Gamma(N+1)}{\Gamma(N+1-\alpha)} x^{-\alpha} \end{bmatrix}$$

با جایگذاری  $u(x)$ ,  $D^\alpha u(x)$ ,  $D^{\alpha_r} u(x)$  در معادله اصلی داریم:

$$(10) \quad C^T AM_{\alpha,x} T_N(x) - C^T AT_N(x) - \sum_{r=1}^l C^T AM_{\alpha_r,x} T_N(q_r x) = \circ$$

با جایگذاری نقاط چبیشف در بازه  $[\circ, L]$  در معادله (10) که به صورت

$$(11) \quad x_i = \frac{L}{2} + \frac{L}{2} \cos\left(\frac{(\gamma i - 1)\pi}{2N}\right), \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

به دست می‌آیند به رابطه زیر خواهیم رسید.

$$(12) \quad C^T AM_{\alpha,x_i} T_N(x_i) - C^T AT_N(x_i) - \sum_{r=1}^l C^T AM_{\alpha_r,x_i} T_N(q_r x_i) = \circ$$

و با در نظر گرفتن شرایط مرزی با حل دستگاه جبری حاصل تعداد  $N+1$  مجهول  $c_i$  به دست می‌آیند.

#### ۴. مثال‌ها

مثال ۱۰۴. معادله دیفرانسیل تاخیری کسری پنتاگراف زیر را در نظر بگیرید. [۴]

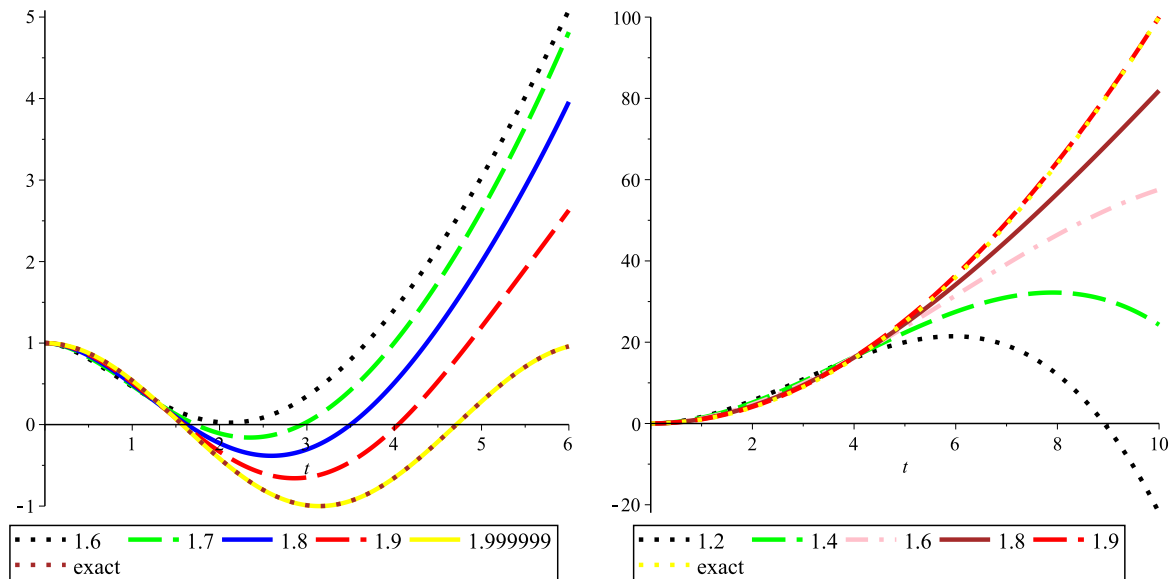
$$(13) \quad D^\alpha u(x) = \frac{\gamma}{\gamma} u(x) + u\left(\frac{x}{\gamma}\right) - x^2 + \gamma, \quad 1 < \alpha \leq 2, \quad u(\circ) = \circ, \quad u'(\circ) = \circ$$

در این مساله به ازای  $\alpha = 2$  جواب دقیق به صورت  $u(x) = x^2$  است. در شکل (۱) نمودار راست، جواب مساله در بازه  $[\circ, 1\circ]$  به ازای مقادیر مختلف  $\alpha$  و  $N = 3$  نمایش داده می‌شود. در این نمودار مشاهده می‌شود وقتی  $\alpha$  به 2 نزدیک می‌شود جواب کسری مساله به جواب مساله در حالت  $\alpha = 2$  نزدیک می‌شود و در  $\alpha = 2$  جواب به دست آمده با این روش با جواب واقعی که با جایگذاری مقدار  $u(x)$  داده شده در مساله و  $\alpha = 2$  به دست می‌آید برابر است.

مثال ۲۰۴. در این مساله معادله دیفرانسیل کسری غیرخطی پنتاگراف را در نظر می‌گیریم. [۷]

$$(14) \quad D^\alpha u(x) = 1 - 2u^2\left(\frac{x}{\gamma}\right), \quad 1 < \alpha \leq 2, \quad f(\circ) = \circ, \quad f'(\circ) = \circ$$

در این مساله به ازای  $\alpha = 2$  جواب دقیق به صورت  $u(x) = \cos(x)$  است. شکل (۱) نمودار چپ، جواب مساله به ازای  $N = 12$  و مقادیر مختلف  $\alpha$  نمایش داده می‌شود. همانطور که مشاهده می‌شود وقتی مقدار  $\alpha$  افزایش پیدا می‌کند جواب‌های به دست آمده به جواب مساله به ازای  $\alpha = 2$  نزدیک می‌شود.



شکل ۱. شکل راست نمودار مثال (۱۰۴) برای  $N = 3$  و شکل چپ نمودار مثال (۲۰۴) برای  $N = 12$  و  $\alpha$  های مختلف

جدول ۱. مقایسه نرم دو خطا برای  $\alpha = 2$  و مقادیر مختلف  $N$  برای مثال ۲۰۴

$N$	۵	۷	۱۰	۱۲	۱۴
نرم دو خطا	$9/2178$	$1/312$	$1/1333 \times 10^{-3}$	$2/5990 \times 10^{-5}$	$1/2998 \times 10^{-6}$

همچنین به ازای  $\alpha = 2$  در جدول (۱) مشاهده می‌شود که با افزایش  $N$  نرم دو خطا نیز کاهش پیدا می‌کند.

## مراجع

1. H. Ebrahimi, K. Sadri, An operational approach for solving fractional pantograph differential equation, IJNAO, 9 (2019) 37-68.
2. M Pourbabaee, A Saadatmandi, A novel Legendre operational matrix for distributed order fractional differential equations, Appl. Math. Comput. 361 (2019) 215-231.
3. P. Rahimkhani, Y. Ordokhani, E. Babolian, Müntz-Legendre wavelet operational matrix of fractional-order integration and its applications for solving the fractional pantograph differential equations, Numer. Algorithms, 77 (2018) 1283-1305.
4. P. Rahimkhani, Y. Ordokhani, E. Babolian, Numerical solution of fractional pantograph differential equations by using generalized fractional-order Bernoulli wavelet, J. Comput. Appl. Math. 309 (2017) 493-510.
5. U. Saeed, M.ur. Rehman, Hermite wavelet method for fractional delay differential equations, J. Diffe. Equ. 2014 (2014) Article ID 359093.
6. S. Sedaghat, Y. Ordokhani, M. Dehghan, Numerical solution of the delay differential equations of pantograph type via Chebyshev polynomials, Commun. Nonl. Sci. Numer. Simul. 17 (2012) 4815-4830.

7. A. Shaikh, F. Hanif, M. S. Ali Khan, A. Jamal, H. Khan, S. ur Rehamn, Series solution of fractional Pantograph equations via Taylor series, 3C Tecnología, (2019) 12-43.
8. E. Tohidi, A.H. Bhrawy, K.A. Erfani, A collocation method based on Bernoulli operational matrix for numerical solution of generalized pantograph equation, Appl. Math. Model. 37 (2013) 4283–4294.
9. S.A. Yousefi, A. Lotfi, Legendre multiwavelet collocation method for solving the linear fractional time delay systems, Cent. Eur. J. Phys. 11(10) (2013) 1463–1469.
10. Y. Zhongshu, Z. Hongbo, Chebyshev polynomials for approximation of solution of fractional partial differential equations with variable coefficients, 3rd International Conference on Material, Mechanical and Manufacturing Engineering, (2015).

پست الکترونیکی: [mr.pourbabaee@gmail.com](mailto:mr.pourbabaee@gmail.com)

پست الکترونیکی: [a.saadatmandi@gmail.com](mailto:a.saadatmandi@gmail.com)

سخنرانی‌ها

ترکیبیات و علوم کامپیوتر

## کران بالایی برای عدد احاطه گری گراف $G(2, 3, v)$

مژگان امامی  
دانشکده ریاضی، دانشگاه زنجان، زنجان، ایران  
ابوالفضل بهمنی  
دانشکده ریاضی، دانشگاه زنجان، زنجان، ایران  
و عدرا ناصریان\*  
گروه ریاضی، واحد زنجان، دانشگاه آزاد اسلامی، زنجان، ایران

چکیده. فرض کنید  $V$  یک مجموعه  $v$ -عضوی باشد. تمام زیرمجموعه های  $i$ -عضوی  $V$  با  $P_i(V)$  نشان داده می شود. گرافی با مجموعه رئوس  $P_k(V)$  که هر دو رأس با  $t$  نقطه مشترک، با هم مجاور باشند گراف  $G(t, k, v)$  نامیده می شود. در این مقاله عدد احاطه گری این گراف به ازای  $t = 2$  و  $k = 3$  مورد بررسی قرار می گیرد و با استفاده از دستگاه سه تایی اشتاینری از مرتبه  $v$  کران بالایی برای عدد احاطه گری  $G(2, 3, v)$  برای  $v \equiv 1, 3 \pmod{6}$  ارائه می شود. واژه های کلیدی: دستگاه سه تایی اشتاینری، گراف، عدد احاطه گری. طبقه بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 05B05, 05B07, 05C69.

### ۱. پیش گفتار

فرض کنید  $t, k, v$  و  $\lambda$  اعداد صحیح مثبتی باشند به طوری که  $0 \leq t \leq k \leq v$  و  $\lambda > 0$ . همچنین فرض کنید  $V$  یک مجموعه  $v$ -عضوی باشد. تمام زیرمجموعه های  $i$ -عضوی  $V$  با  $P_i(V)$  نشان داده می شود.

**تعریف ۱.۱.** [۱] دو تایی  $D = (V, \beta)$  که  $\beta$  زیرمجموعه ای از  $P_k(V)$  است یک  $t - (v, k, \lambda)$  طرح نامیده می شود هرگاه هر عضو از  $P_t(V)$  دقیقاً  $\lambda$  بار در  $\beta$  ظاهر شده باشد.

اعضای  $\beta$ ، بلوک نامیده می شوند. اگر  $D$  فاقد بلوک تکراری باشد آن را یک طرح ساده نامند. از این پس همواره فرض بر این است که  $D = (V, \beta)$  یک  $t - (v, k, \lambda)$  طرح ساده است مگر این که خلاف آن فرض شود. به سادگی می توان نشان داد  $(V, P_k(V))$  یک  $t - (v, k, \lambda_{max})$  طرح است که  $\lambda_{max} = \binom{v-t}{k-t}$ . این طرح، طرح کامل نامیده می شود. طرح بلوکی با پارامترهای  $t = 2$  و  $\lambda = 1$ ، دستگاه اشتاینری و یک دستگاه اشتاینری با  $k = 3$  دستگاه سه تایی اشتاینری نامیده می شود. دستگاه سه تایی اشتاینری روی مجموعه  $V$  با  $STS(v)$  نشان داده می شود.

**قضیه ۲.۱.** [۱]  $STS(v)$  وجود دارد اگر و تنها اگر  $v \equiv 1, 3 \pmod{6}$ .

**تعریف ۳.۱.** زوج  $G = (V, E)$  که در آن هر عنصر از  $E$  عضوی از  $P_2(V)$  است، یک گراف با مجموعه رئوس  $V(G)$  و مجموعه یال های  $E(G)$  می نامیم.

اگر  $e = \{u, v\} \in E$ ، آنگاه  $u$  و  $v$  مجاور نامیده می شوند. برای هر رأس مانند  $v$ ، تعداد رئوس مجاور با  $v$  درجه  $v$  نامیده می شود و با  $deg(v)$  نمایش داده می شود. بیشترین مقدار برای  $deg(v)$  با  $\Delta$  نشان داده می شود.

**تعریف ۴.۱.** گرافی با مجموعه رئوس  $P_k(V)$  که هر دو رأس با  $t$  نقطه مشترک، مجاور باشند گراف  $G(t, k, v)$  می نامیم.

اگر  $t = k - 1$ ، آنگاه گراف  $G(k - 1, k, v)$  را گراف جانسون نامیده می شود و با نماد  $J(n, k)$ ، نمایش داده می شود که  $n = \binom{v}{k}$  است.

**تعریف ۵.۱.** [۴] در گراف  $G$ ، زیرمجموعه  $S \subseteq V(G)$  یک مجموعه احاطه گر نامیده می شود اگر هر رأس  $G$  یا در  $S$  باشد یا با رئوس  $S$  مجاور باشد.

اندازه کوچکترین مجموعه احاطه گر گراف  $n$ -راسی  $G$ ، عدد احاطه گری نامیده می شود و با  $\gamma(G)$  نمایش داده می شود. به سادگی ثابت می شود

$$\left\lceil \frac{n}{\Delta + 1} \right\rceil \leq \gamma(G) \leq n - \Delta.$$



قضیه ۶.۱. [۴] فرض کنید  $G$  یک گراف  $n$  راسی باشد آنگاه

$$\gamma(G) \leq n \frac{1 + \ln(\Delta + 1)}{\Delta + 1}.$$

با در نظر گرفتن برخی ویژگی ها برای مجموعه های احاطه گر، انواع خاصی از مجموعه های احاطه گر به دست می آید.

تعریف ۷.۱. [۲] زیر مجموعه ای از رئوس گراف  $G$  که یک مجموعه احاطه گر برای گراف  $G$  و مکملش باشد مجموعه احاطه گر سراسری می نامیم.

تعریف ۸.۱. [۲] احاطه گری مانند  $S$  از گراف  $G$ ، احاطه گر عادلانه نامیده می شود اگر تمام رئوسی که در  $S$  قرار ندارند با تعداد یکسانی از رئوس  $S$  مجاور باشند. به عبارت دیگر هر دو راسی که در  $S$  قرار ندارند تعداد یکسانی همسایه در  $S$  دارند.

## ۲. مجموعه احاطه گر $G(2, 3, v)$

در این مقاله مجموعه احاطه گر گراف  $G(2, 3, v)$  مورد بررسی قرار می گیرد و کران بالای قضیه ۶.۱ بهبود می یابد.

قضیه ۱۰.۲. هر  $(v, k, \lambda) - t$  طرح یک مجموعه احاطه گر برای  $G(t, k, v)$  می باشد.

اثبات. مجموعه بلوک های  $(v, k, \lambda) - t$  طرح را  $S$  بنامید. فرض کنید  $x \in P_k(V)$  و  $x \notin S$ . هر  $t$  تایی از  $x$  در دقیقاً  $\lambda$  بلوک از  $S$  ظاهر شده است لذا توسط این بلوک ها احاطه می شود.  $\square$

از قضیه فوق، نتیجه زیر به سادگی حاصل می شود.

نتیجه ۲۰.۲. فرض کنید  $v \equiv 1, 3 \pmod{6}$ . قرار دهید  $G = G(2, 3, v)$ . آنگاه

$$\gamma(G) \leq \frac{v(v-1)}{6}.$$

در قضایای بعدی ابتدا کران ارائه شده در نتیجه ۲۰.۲ بهبود می یابد سپس ثابت می شود این کران از کران مربوط به قضیه ۶.۱ نیز بهتر می باشد.

فرض کنید  $I_v = \{1, 2, \dots, v\}$ ،  $X = \{1, 2, \dots, \alpha\}$ ،  $Y = \{\alpha, \dots, v\}$  که  $\alpha \equiv 1, 3 \pmod{6}$ . بنابراین  $I_v = X \cup Y$ . طرح های  $STS(\alpha)$  و  $STS(v - \alpha + 1)$  را در نظر بگیرید. تعداد بلوک های این دو طرح را به ترتیب با  $b_X$  و  $b_Y$  نمایش دهید. قرار دهید  $G = G(2, 3, v)$ .

قضیه ۳۰.۲. با در نظر گرفتن مفروضات فوق

- الف) اگر  $v = 12m + 1$ ، آنگاه  $b_1 = 12m^2 + 2m$  کران بالایی برای  $\gamma(G)$  است.
- ب) اگر  $v = 12m + 7$ ، آنگاه  $b_2 = 12m^2 + 14m + 7$  کران بالایی برای  $\gamma(G)$  است.
- ج) اگر  $v = 12m + 3$ ، آنگاه  $b_3 = 12m^2 + 6m + 1$  کران بالایی برای  $\gamma(G)$  است.
- د) اگر  $v = 12m + 9$ ، آنگاه  $b_4 = 12m^2 + 18m + 8$  کران بالایی برای  $\gamma(G)$  است.

اثبات.

الف) قرار دهید  $\alpha = 6m + 1$ . پس  $|X| = |Y| = 6m + 1$ . روی مجموعه های  $X$  و  $Y$  طرح های  $STS(6m + 1)$  رادر نظر بگیرید اجتماع بلوک های این دو طرح یک احاطه گر برای  $G(2, 3, v)$  است. لذا  $\gamma(G)$  کوچکتر از مجموع بلوک های این طرح ها است.

$$\gamma(G) \leq b_X + b_Y = 12m^2 + 2m.$$

ب) قرار دهید  $\alpha = 6m + 1$ . پس  $|X| = 6m + 1$ ،  $|Y| = 6m + 7$ . بنابراین  $STS(6m + 1)$  و  $STS(6m + 7)$  را به ترتیب روی مجموعه های  $X$  و  $Y$  در نظر بگیرید.

ج) قرار دهید  $\alpha = 6m + 3$ . پس  $|X| = 6m + 3$ ،  $|Y| = 6m + 1$ .

د) قرار دهید  $\alpha = 6m + 3$ . پس  $|X| = 6m + 3$ ،  $|Y| = 6m + 7$ .

$\square$

به این ترتیب با مقایسه کران های مربوط به قضایای ۶.۱ و ۳۰.۲ نتیجه می شود

$$\gamma(G) \leq 12m^2 + 18m + 8 \leq n \frac{1 + \ln(\Delta + 1)}{\Delta + 1}$$

نتیجه ۴.۲. فرض کنید  $(v \equiv 1, 3 \pmod{6}, v \neq 7)$  و  $G = G(2, 3, v)$  آنگاه  $STS(v)$  یک احاطه گر عادلانه، مستقل و سراسری برای  $G$  می باشد.

### مراجع

1. I. Anderson, *Combinatorial designs and tournaments*, Clarendon Press, Oxford, 1997.
2. Y. Caro, A. Hansberg and M. Henning, *Fair domination in graphs*, Discrete math. 312, (2012) 2905–2914.
3. M. Doost Ali, M. Alishahi, *Outer independent global dominating set of trees and unicyclic graphs*, Electronic Journal of Graph Theory and Applications. 7, (2019) 121–145.
4. D.B. West, *Introduction to graph theory*, Prentice-Hall/CRC, 1996.

پست الکترونیکی: [emami@znu.ac.ir](mailto:emami@znu.ac.ir)

پست الکترونیکی: [abolbahmani@yahoo.com](mailto:abolbahmani@yahoo.com)

پست الکترونیکی: [o.naserian@gmail.com](mailto:o.naserian@gmail.com)

## پیچیدگی درخت تصمیم توابع بولی و چندجمله ای خوشه ای

حسین تیموری فعال\*

دانشکده علوم ریاضی و رایانه، دانشگاه علامه طباطبائی، تهران، ایران

چکیده. در این مقاله ابتدا به معرفی نظریه ی پیچیدگی درخت تصمیم توابع بولی به عنوان یک محک کیفی برای سختی محاسبه ی توابع بولی می پردازیم. سپس رده های توابع بولی گریزان و ناگریزان را مطرح کنیم. در ادامه برای به دست آوردن معیاری برای تشخیص توابع بولی گریزان، چندجمله ای شمارنده ی وزن یک تابع بولی را مطرح می کنیم. با استفاده از این ملاک می توان نشان داد که هر تابع بولی با تعداد فردی از نقاط درست (مثبت) حتما تابعی گریزان است. همچنین، به هر تابع بولی یکنوا یک ساختار هندسی زیبا به نام همبافت سادگی نسبت می دهیم. حدس تعمیم یافته ی باز کارپ بیان می دارد که هر تابع بولی غیر بدیهی یکنوا به طور ضعیف متقارن یک تابع گریزان می باشد. همبافت سادگی نظیر تابع بولی داده شده، در اثبات حدس تعمیم یافته ی کارپ برای توانهای عدد اول به کار می رود. در ادامه، نشان می دهیم که چندجمله ای خوشه ای یک گراف را می توان به عنوان چندجمله ای شمارنده ی یک تابع بولی در نظر گرفت. این مدلسازی بولی از چندجمله ای های خوشه ای منجر به نتایج و حدس های جالبی در مورد ریشه های حقیقی آن ها می شود. در پایان نیز چندین مساله ی و حدس باز را در رابطه با گراف های ناگریزان و ریشه های خوشه ای آن ها مطرح می کنیم.

واژه های کلیدی: پیچیدگی درخت تصمیم، توابع بولی گریزان، حدس کارپ، چندجمله ای شمارنده ی وزن، ریشه ی خوشه ای. طبقه بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 06E30, 05C31, 65H04.

### ۱. پیش گفتار

توابع بولی از اهمیت و جایگاه ویژه ای در علوم ریاضی و رایانه برخوردار هستند. پیچیدگی درخت تصمیم توابع بولی یک معیار کیفی مناسب برای تعیین سختی محاسبه ی یک تابع بولی می باشد. برای تابع بولی  $\{0, 1\}^n \mapsto \{0, 1\}$ :  $f$  داده شده، درخت تصمیم نظیر تابع  $n$  - متغیره ی  $f$  بدین صورت تعریف می شود که راس های درونی این درخت نظیر اندیس های متغیرهای ورودی آن (اندیس  $i$  نظیر متغیر  $x_i$ ) بوده و هرگاه مقدار  $x_i$  برابر با ۱ (درست) باشد، زیردرخت سمت راست را برمی گزینیم و در غیراین صورت زیردرخت چپ را اختیار می کنیم. برگ های درخت نیز می توانند مقادیر ۱ و ۰ اتخاذ کنند. مقدار تابع  $f$  برابر با ۱ است اگر به برگ با برچسب ۱ برسیم، در غیراین صورت مقدار آن برابر ۰ است. پیچیدگی درخت تصمیم یک تابع بولی  $f$  که با نماد  $D(f)$  نمایش می دهیم به عنوان کمترین عمق در میان تمام درخت های تصمیم ممکن نظیر  $f$  تعریف می شود. به وضوح برای تابع ثابت (بدیهی)  $f$  مقدار  $D(f)$  برابر صفر خواهد بود. همچنین مقدار  $D(f)$  همواره عددی بین ۰ تا  $n$  برای یک تابع  $n$  - متغیره ی داده شده خواهد بود.

تابع  $n$  - متغیره ی  $f$  را «گریزان»<sup>۱</sup> [۴] گوئیم اگر  $D(f) = n$ ، در غیر این صورت آن را «ناگریزان» می نامیم. برای مثال، می توان به سادگی نشان داد که تابع بولی ۵ متغیره ی  $f$  که تنها زمانی درست است که ورودی شامل سه متغیر پشت سرهم برابر با ۱ باشد تابعی ناگریزان است. در عوض تابع بولی زوجیت ۵ متغیره ی  $f$  با ضابطه ی  $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$  (در پیمانه ی ۲) یک تابع گریزان است.

در حالت کلی، تعیین اینکه یک تابع مفروض گریزان است یا نه کاری ساده نیست. اما می توان از روی یک سری خواص جبری، محک های ساده ی جالبی برای تشخیص گریزانی بودن یک تابع بولی به دست آورد. برای این منظور، به هر تابع بولی  $f$  یک چندجمله ای به نام «شمارنده ی وزن»<sup>۲</sup> که با نماد  $P_f(t)$  نسبت می دهیم که به صورت  $P_f(t) = \sum_{x \in \{0,1\}^n} f(x)t^{|x|}$  تعریف می شود که در آن  $|x|$  تعداد ۱ های موجود در رشته ی ورودی  $x = x_1x_2 \dots x_n$  می باشد. در مرجع [۹] نشان داده می شود که  $(1+t)^{n-D(f)} |P_f(t)|$  یک نتیجه ی بلافاصله ی این خاصیت بخش پذیری چندجمله ای شمارنده ی وزن این است که اگر تعداد نقاط درست (مثبت)  $f$  عددی فرد باشد، آنگاه تابع  $f$  گریزان است. تابع بولی  $f$  را «یکنوا»<sup>۳</sup> گوئیم، هرگاه برای  $x \preceq y$  داشته باشیم  $f(x) \leq f(y)$ . برای زیرگروه  $\Gamma$  از گروه جایگشتی  $S_n$ ، تابع بولی  $f$  را  $\Gamma$  - ناورد گوئیم، هرگاه برای هر  $g \in \Gamma$ ، داشته باشیم

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_{g(1)}, x_{g(2)}, \dots, x_{g(n)}).$$

\* Monotone

<sup>2</sup> Weight Enumerator

<sup>1</sup> Evasive

\* سخنران

یک تابع بولی  $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$  : « به طور ضعیف متقارن »<sup>۴</sup> نامند هرگاه یک زیرگروه  $\Gamma$  از گروه جایگشتی  $S_n$  موجود باشد به قسمی که تابع بولی  $f \in \Gamma$  - ناوردا بوده و روی  $\{1, 2, \dots, n\}$  تراگذاری عمل کند. حدس تعمیم یافته ی معروف کارپ [۴] در علوم کامپیوتر نظری بیان می دارد که هر تابع بولی یکنوای غیر بدیهی و به طور ضعیف متقارن یک تابع گریزان است. این حدس که در دهه ۱۹۷۰ میلادی مطرح شد، هنوز باز است. یکی از ابزارهای جالب برای اثبات آن، « ابزار توپولوژیکی » [۲] می باشد. بدین منظور، لازم است تا یک ساختار هندسی به تابع بولی یکنوا موردنظر نسبت دهیم. می توان نشان داد که نقاط درست یک تابع بولی یکنوای  $f$  دارای یک ساختار هندسی زیبا به نام « همبافت سادگی » می باشند. به بیان دقیق تر، به هر تابع بولی یکنوای  $f$ ، می توان یک همبافت سادگی  $\Delta(f)$  به صورت زیر نسبت داد. یادآوری می کنیم که « تابع مشخصه ی » مجموعه ی متناهی  $S$  را که با نماد  $\chi_S$  نشان می دهیم با ضابطه ی زیر تعریف می شود:

$$\chi_S(i) = \begin{cases} 1 & \text{if } i \in S, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

راس های این همبافت سادگی مجموعه ی متناهی  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$  است و مجموعه ی  $S \subseteq [n]$  یک « سادک »  $\Delta(f)$  است، هرگاه  $f(\chi_S) = 1$ . به عنوان مثال، سادک نظیر تابع بولی معروف  $f: \{0, 1\}^2 \rightarrow \{0, 1\}$  :  $OR$  برابر با  $1$  - سادک  $\Delta(f) = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$  می باشد. طبق تعریف، همبافت سادگی  $\Delta(f)$  نظیر تابع بولی  $f$  را گریزان گویند اگر  $f$  گریزان باشد و در غیراین صورت آن را ناگریزان می نامیم. در اثبات حالت خاص حدس تعمیم یافته ی کارپ که برای توابع بولی  $n$  - متغیره که در آن  $n$  توانی از یک عدد اول است، از همبافت سادگی ناگریزان و قضیه نقطه ثابت الیور [۱] استفاده شده است. در این مقاله قصد داریم تا با استفاده از ایده ی توابع بولی ناگریزان، به رده بندی بعضی از رده های گرافی بپردازیم که چندجمله ای های خوشه ای آن ها تنها ریشه ی حقیقی دارند. یادآوری می کنیم که حاجی ابوالحسن و مرحوم مهرآبادی [۳] نشان دادند که هر چندجمله ای خوشه ای یک گراف ساده همواره یک ریشه ی حقیقی در بازه ی  $(-1, 0)$  دارد. علاوه بر این، آن ها نشان دادند که تمام ریشه های چندجمله ای خوشه ای گراف های خالی از مثلث حقیقی می باشند. در راستای نشان دادن ارتباط میان توابع بولی و چندجمله ای خوشه ای یک گراف، برای یک گراف داده شده ی ساده، غیرجهت دار و متناهی  $G$  روی  $n$  - راس و  $i$  - خوشه ی (زیرگراف کامل  $i$  راسی) آن که با مجموعه ی راسی  $S$  مشخص شده است، تابع بولی  $n$  - متغیره ی  $f$  را به گونه ای تعریف می کنیم که  $f(\chi_S)$  برابر با  $1$  باشد. به سادگی می توان نشان داد که چندجمله ای خوشه ای گراف  $G$  با تعریف  $C(G; x) = \sum_{i=0}^{\omega(G)} c_i(G) x^i$ ، که در آن  $c_i(G)$  تعداد  $i$  - خوشه های  $G$  را نشان داده و  $\omega(G)$  نیز اندازه بزرگترین خوشه ی آن می باشد، با چندجمله ای شمارنده ی وزن تابع بولی  $f$  (نظیر آن) یکی است. همچنین یادآوری می کنیم که در مرجع [۴] نشان داده می شود که یک همبافت سادگی  $\Delta$  ناگریزان است اگر و تنها اگر راسی  $v \in V(\Delta)$  موجود باشد، به قسمی که زیرهمبافت های حذف-راس  $v - \Delta$  و لینک  $Lk_v(\Delta)$  هر دو ناگریزان باشند. در حالت خاص، یک گراف ناگریزان  $n$  - راسی را به (طور بازگشتی) می توان به صورت زیر را تعریف کرد:

- گراف شامل یک راس تنها، یک گراف ناگریزان است.
- برای  $n \geq 1$ ، گراف  $G$  ناگریزان گویند، هرگاه راس  $v \in V(G)$  وجود داشته باشد به قسمی که هر دوی  $G - v$  و  $G[N(v)]$  ناگریزان باشند.

## ۲. نتایج اصلی

در سرتاسر این مقاله فرض خواهیم کرد که گراف های ما ساده، غیرجهت دار و متناهی می باشند. همچنین فرض می کنیم که گراف های مورد بحث همبند نیز هستند.

گزاره ۱.۰۲. رده ی گراف های وتری گراف های ناگریزان هستند.

نتیجه ۲.۰۲. چندجمله ای خوشه ای گراف وتری  $G$  دارای ریشه ی  $r = -1$  است.

نتیجه ۳.۰۲. برای گراف داده شده ی  $G$  اگر مجموعه ی ضرایب چندجمله ای خوشه ای آن عددی فرد باشد، آنگاه  $G$  یک گراف وتری نیست.

قضیه ۴.۰۲. اگر گراف  $G$  ناگریزان باشد، آنگاه چندجمله ای خوشه ای  $C(G; x)$  (حداقل) یک ریشه ی حقیقی  $r = -1$  دارد.

قضیه ۵.۰۲. تمام ریشه های چندجمله ای خوشه ای گراف وتری خالی از مثلث حقیقی هستند.

قضیه ۶.۰۲. تمام ریشه های چندجمله ای خوشه ای گراف وتری خالی از  $K_4$  حقیقی هستند.

<sup>4</sup> Weakly Symmetric

### ۳. مسایل و حدس های باز

یکی از مسایل به ظاهر ساده ولی در واقع سخت، رده بندی تمام رده های گرافی است که دارای چندجمله ای خوشه ای با ریشه ی حقیقی  $r = -1$  هستند. از این پس، ریشه ی حقیقی چندجمله ای خوشه ای گراف  $G$  را « ریشه ی خوشه ای »  $G$  می نامیم.

سوال ۱۰۳. رده ی تمام گراف هایی که یک ریشه ی خوشه ای آن ها برابر با  $r = -1$  است را شناسایی کنید.

حدس ۱۰۳. گراف  $G$  دارای ریشه ی خوشه ای  $r = -1$  است اگر و تنها اگر گراف  $G$  ناگريزان باشد. از آن جا که « مشتق » چندجمله ای های گرافی در نظریه ی گراف جبری از اهمیت ویژه ای برخوردارند، سوال باز زیر را مطرح می کنیم.

سوال ۲۰۳. یک تعبیر ترکیبیاتی برای مشتق چندجمله ای شمارنده ی وزن یک تابع بولی  $f$  داده شده به دست آورید.

حدس ۲۰۳. برای تابع بولی  $\{0, 1\}^n \mapsto \{0, 1\}$ ،  $f$  داریم

$$t \frac{d}{dx} P_f(t) = \sum_{i=1}^n P_{f_i}(t),$$

که در آن  $f_i$  عبارت است از  $f_i(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$ . بر پایه ی حدس قبلی، ما حدس جالب زیر را داریم.

حدس ۳۰۳. اگر گراف  $G$  ناگريزان باشد، آنگاه تمام ریشه های  $G$  از نوع خوشه ای است.

سوال ۳۰۳. آیا گراف غیر وتری وجود دارد که تمام ریشه های آن از نوع ریشه های خوشه ای باشند؟

برای یال مفروض  $e = \{u, v\}$ ، ارزش آن عبارت از تعداد همسایگی های مشترک دو راس انتهایی آن یعنی  $u$  و  $v$  می باشد. گراف  $G$  را ۱ - دور مثلث بندی نامیم هرگاه هر دور غیر القایی آن مثلث بوده و شامل تنها یک دور القایی غیرمثلثی باشد. ارزش هر یال حداکثر ۲ بوده و یال های واقع در دور القای دارای ارزش برابر با یک باشند. توجه کنید که گراف مورد نظر وتری نیست.

حدس ۴۰۳. اگر گراف  $G$  یک گراف ۱ - دور مثلث بندی باشد، آنگاه تمام ریشه های  $G$  از نوع خوشه ای هستند. به ویژه، عدد  $r = -1$  یک ریشه ی خوشه ای  $G$  می باشد.

### مراجع

1. R. Oliver, *Fixed-point sets of group actions*, Comment. Math. Helvetici. 50 (1974), no. 1, 155-177.
2. J. Kahn, M. Saks and D. Sturtevant, *A topological approach to evasiveness*, Combinatorica. 4 (1984), no. 4, 297-306.
3. H. Hajiabolhassan and M.L. Mehrabadi, *On Clique Polynomials*, Australasian J. of Combinatorics, 18 (1998), pp. 313-316.
4. C. A. Miller, *Evasiveness of graph properties and topological fixed-point theorems*, Foundations and Trends in Theoretical Computer Science, 7 (2011), No. 4, 337-415.

پست الکترونیکی: [hossein.teimoori@atu.ac.ir](mailto:hossein.teimoori@atu.ac.ir)

## یک مساله زمانبندی آنلاین: بررسی نسبت رقابتی

مریم سیف الدینی\*

دانشکده ریاضی، دانشگاه گیلان، گیلان، ایران

چکیده. در این مقاله مساله زمانبندی بر روی یک ماشین زمانی که کار ضروری در حین انجام زمانبندی رخ می دهد، بررسی می شود. در این وضعیت برنامه ریز بایستی کارها را به گونه ای زمانبندی کند که تابع هدف مورد نظر، مینیمم سازی ماکزیمم تأخیر بهینه شود. اهمیت مساله در این است که هیچ اطلاعی از زمان وقوع کار ضروری و طول مدت آن وجود ندارد و این موضوع، چالشی مهم برای افرادی است که در تصمیمات زمانبندی کارها در یک سیستم زمانبندی درگیر هستند. در این مقاله ابتدا قانون جکسون به هنگام وقوع یک کار ضروری آنالیز خواهد شد و سپس نشان داده می شود هیچ الگوریتم برخط (آنلاین) با نسبت رقابتی  $\frac{\sqrt{3}+2}{4}$  برای این مساله وجود ندارد. در نهایت نتایج تجربی ارائه می شود که اجرای این قانون را برای مساله مورد نظر در عمل ارزیابی می کند.

واژه های کلیدی: زمانبندی آنلاین، الگوریتم های تقریب، نسبت رقابتی.

طبقه بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 68W25, 90B35, 68W27.

## ۱. پیش گفتار

مسائل زمانبندی بصورت گسترده ای مورد توجه محققین در حوزه های مختلف است. اهمیت این مسائل به دلیل کاربرد در صنعت، تولید، مدیریت و حوزه های دیگر باعث شده است از دهه های قبل در ادبیات و مطالعات گوناگون به این مسائل و روش های حل آنها پرداخته شود.

در مدل های کلاسیک این مسائل، همواره فرض بر این بوده است که هیچ رخداد غیر قابل پیش بینی در هنگام زمانبندی مجموعه ی کارها پیش نمی آید و به همین دلیل تا همین اواخر تمرکز محققین بر روی مسائلی بوده که محدودیت های دسترسی ماشین از نظر طول محدودیت و زمان وقوع محدودیت از قبل ثابت و مشخص بوده است. اما در عمل و واقعیت چنین فرضی برقرار نیست زیرا مواردی چون خرابی غیر منتظره ماشین یا همان منبع اجرای کار و یا وقوع یک کار ضروری یا اورژانسی<sup>۱</sup> می تواند از جمله رویدادهای غیر قابل پیش بینی باشد که برنامه ریز را دچار چالش جدی کند و سیستم زمانبندی را به یک سیستم آنلاین تبدیل کند. اهمیت این مساله زمانی بیشتر می شود که هیچ اطلاعی از زمان شروع این رخ داد غیر منتظره و طول دوره وقوع آن وجود نداشته باشد. بعبارت دیگر برنامه ریز باید کارها را در یک نسخه آنلاین بر روی ماشین اجرا کند. در این مقاله به مساله زمانبندی بر روی یک تک ماشین زمانی که یک کار ضروری (کاری که نیاز فوری به اجرا دارد) اتفاق می افتد، می پردازیم. برای نمونه در سیستم های عامل با یک یا چند پردازنده زمانیکه بعضی از کارها از اولویت بیشتری نسبت به کارهایی که از قبل وجود دارند، برخوردارند می توان این مساله را بوضوح دید.

در این مقاله تابع هدف، مینیمم سازی ماکزیمم تأخیر است و از آنجایی که وقوع کار اورژانس بر روی تابع هدف مساله تأثیر گذار است بررسی آن مورد توجه قرار گرفت. با استفاده از نماد گذاری مرسوم، مساله را به صورت  $OEJ|q_j|L_{max}$ ، ۱ نمایش می دهیم. نسخه کلاسیک (آفلاین) مساله بصورت گسترده ای مورد توجه قرار گرفته است. لی [۴] قانون جکسون را ارائه کرد و نشان داد خطای جواب بدست آمده از بکارگیری این قانون نسبت به جواب بهینه از مقدار  $\max\{p_i\}$  تجاوز نمی کند. (  $p_i$  زمان اجرای کار  $i$  ام است).

لی [۴] ثابت کرد مساله زمانبندی روی یک تک ماشین تحت بازه ثابت غیر قابل دسترسی و تابع هدف مینیمم سازی ماکزیمم تأخیر یک مساله  $NP$  سخت است. قاسم و ها آوی [۳] مساله را با زمان های ورود برای هر کار<sup>۲</sup> در نظر گرفتند و نشان دادند قانون جکسون، کران بدترین حالت با مقدار ۲ را برای این مساله نتیجه می دهد. یان و همکاران [۶] طرح تقریبی با زمان اجرای چند جمله ای (PTAS) برای این مساله پیدا کردند. قاسم [۲] یک طرح تقریبی قویاً چند جمله ای (FPTAS) برای این مساله مطرح کرد. تان و هی [۵] مساله آنلاین مینیمم سازی ماکزیمم اتمام کار را بر روی دو ماشین همسان تحت بازه غیر قابل دسترسی مورد مطالعه قرار دادند. هو و همکاران [۱] مساله مینیمم سازی زمان اتمام وزن دار با دو مدل کار ضروری و مدل خرابی ماشین (حالتی که ماشین در یک زمان پیش بینی نشده و برای مدت زمان نامشخصی به دلیل خرابی از دسترس خارج می شود) را در نظر گرفتند و نشان دادند هیچ الگوریتم آنلاینی با

\* 2 Release date

1 Emergence job

\* سخنران

نسبت رقابتی  $\frac{\sqrt{\delta}+1}{4}$  برای مدل خرابی ماشین و هیچ الگوریتم آنالینی با نسبت رقابتی  $\frac{11-\sqrt{2}}{4}$  برای مدل کار اورژانس موجود نیست. این مقاله بصورت زیر بخش بندی می شود: در بخش اول به آنالیز ترتیب جکسون در زمان وقوع کار اورژانسی می پردازیم و نشان می دهیم این قانون یک الگوریتم ۲- تقریب برای مساله مورد مطالعه است. در بخش دوم کران پایین برای نسبت رقابتی این مساله ارائه می دهیم. در بخش سوم نتایج تجربی خود را ارائه خواهیم کرد و بخش آخر به نتایج و دستاوردهای مقاله می پردازیم.

## ۲. فرمول بندی مساله

می خواهیم مجموعه ای از  $n$  کار  $\{1, 2, \dots, n\}$  را بر روی یک تک ماشین زمانبندی کنیم به طوری که هر کار زمان اجرای  $p_i$  و زمان تحویل  $q_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) را دارد. ماشین در هر زمان حداکثر یک کار می تواند انجام دهد و همه کارها در زمان شروع به کار ماشین آماده برای اجرا می باشند. فرض کنید کار اورژانسی زمان اجرا با طول نامشخص  $\Delta = f - s$  که  $s$  زمان شروع و  $f$  زمان پایان آن است را دارا باشد. فرض بر این است که هیچ اطلاعاتی در مورد  $f$  و  $s$  در اختیار نیست. همچنین فرض کنید این کار زمان تحویل  $q_e$  را داراست. مساله را با  $P$  و به صورت  $OEJ|q_j|L_{max}$ ، نمایش می دهیم و نسخه شکست کار این مساله ( نسخه ای که در آن کاری که نمی تواند قبل از  $s$  به اتمام برسد در زمان  $f$  مجدداً انجام می شود) را با  $P'$  نشان می دهیم. فرض کنید  $C_j(S)$  زمان انجام کار  $i$  ام در زمانبندی  $S$  و  $\varphi^*(P)$  جواب بهینه مساله  $P$  باشد.

## ۳. آنالیز قانون جکسون

فرض کنید تمامی داده ها اعداد صحیح هستند و کارها بر اساس قانون جکسون اندیس گذاری شده اند. قانون جکسون بر اساس ترتیب نزولی زمان های تحویل کارها تعریف می شود ( یعنی  $q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_n$  ). بنا به این قانون جواب بهینه ترکیبی از دو دنباله از کارها است که در ترتیب غیر نزولی اندیس هایشان زمانبندی شده اند. در ادامه به آنالیز این قانون زمانی که یک کار اورژانسی پیش می آید می پردازیم. فرض کنید  $H$  الگوریتمی باشد که کارها را بر اساس قانون جکسون زمانبندی می کند، نشان می دهیم این الگوریتم یک نسبت تقریبی با مقدار ۲ را برای مساله مورد مطالعه ارائه می کند.

**قضیه ۱۰۳.** الگوریتم  $H$ ، یک الگوریتم ۲- تقریب برای مساله  $OEJ|q_j|L_{max}$ ، می باشد.

**اثبات.** فرض کنید  $H$  الگوریتمی باشد که کارها را بر اساس قانون جکسون بر روی ماشین برای اجرا قرار می دهد و  $B$  الگوریتمی که کارها را بر اساس ترتیب جکسون در نسخه شکست کار مساله  $P$  بر روی ماشین زمانبندی می کند. همچنین فرض کنید ماکزیمم تأخیر در نقطه ای با اندیس  $u$  اتفاق افتاده است و  $u'(H)$  ماکزیمم تأخیر بر اساس زمانبندی الگوریتم  $B$  باشد. فرض کنید  $K = \{1, 2, \dots, g\}$  مجموعه کارهایی باشد که قبل از کار اورژانسی زمانبندی شده اند. حالت های زیر را در نظر بگیرید: اگر  $u \in K$  آنگاه زمانبندی حاصل بهینه است. اگر کار اورژانسی ماکزیمم تأخیر را حاصل کند در این صورت هم زمانبندی بدست آمده بهینه است. اگر  $u \in \{g+1, \dots, n\}$  در این صورت مقدار تابع هدف مساله بصورت زیر است:

$$\varphi_H(P) = \sum_{i=1}^u p_i + \delta + \Delta + q_u$$

( $\delta$  فاصله کار اورژانسی تا آخرین کار زمانبندی شده قبل از کار اورژانسی است) . از طرف دیگر داریم:

$$\varphi_B(P') \geq \sum_{i=1}^u p_i + \Delta + q_u$$

بنابراین

$$\varphi_H(P) - \varphi_B(P') \leq \delta$$

لذا

$$\varphi_H(P) - \varphi_B(P') \leq \varphi^*(P')$$

در نتیجه خواهیم داشت:  $\varphi_H(P) \leq 2\varphi^*(P')$

□

قضیه ۲.۳. نسبت تقریبی ۲ برای الگوریتم  $H$  بسته ۲ است.

اثبات. دو کار با داده های زیر را در نظر می گیریم:  $p_1 = \varepsilon, p_2 = 1, q_1 = \varepsilon, q_2 = 0$  (  $\varepsilon$  : یک عدد مثبت بسیار کوچک است ) مقادیر  $q_e = 0$  و  $s = 1, f = 1 + \varepsilon$  را در نظر می گیریم. اگر کارها را بر اساس ترتیب جکسون قرار دهیم ماکزیمم تأخیر برابر  $2 + \varepsilon$  است. در حالیکه جواب بهینه زمانی حاصل می شود که  $J_2$  ابتدا در زمان صفر بر روی ماشین قرار گیرد و سپس  $J_1$  در زمان  $t = 1 + \varepsilon$  زمانبندی شود که در این حالت ماکزیمم تأخیر برابر  $1 + 3\varepsilon$  است. اگر  $\varepsilon$  به صفر نزدیک شود آنگاه نسبت تقریب این دو نمونه کار به ۲ نزدیک می شود.

□

#### ۴. کران پایین برای نسبت های رقابتی

در این بخش مسأله از نقطه نظر آنالیز رقابتی مورد مطالعه قرار گرفته است. نسبت رقابتی یک الگوریتم آنالین نسبت بدترین حالت بین مقدار جواب الگوریتم و مقدار جواب بهینه است. ثابت می کنیم هیچ الگوریتم آنالینی با نسبت رقابتی  $\frac{\sqrt{3}+2}{9}$  برای مسأله مورد مطالعه وجود ندارد.

قضیه ۱.۴. الگوریتمی آنالین با نسبت رقابتی  $\frac{\sqrt{3}+2}{9}$  برای  $OEJ|q_j|L_{max}$  نمی توان یافت.

اثبات. دو کار  $J_1$  و  $J_2$  را در نظر بگیرید به طوری که  $p_1 = x, p_2 = \alpha x, q_1 = x, q_2 = \alpha x$  (  $0 < \alpha < 1$  ). هر الگوریتمی چون  $A$  باید بتواند در مورد زمانبندی این دو نمونه کار تصمیم گیرد. اگر الگوریتم  $A$  ابتدا کار  $J_1$  را زمانبندی کند در این صورت کار اورژانسی با طول دوره اجرای  $[\alpha x, \alpha x + \varepsilon]$  و زمان تحویل  $q_e$  می تواند رخ دهد و برنامه ریز را دچار چالش کند. در این حالت کار  $J_1$  بایستی مجدداً بعد از کار اورژانسی شروع شود. بنابراین ماکزیمم تأخیر در کار  $J_1$  یا  $J_2$  اتفاق می افتد. در حالیکه در جواب بهینه  $J_2$  ابتدا زمانبندی می شود لذا داریم :

$$C_1(OPT) + q_1 = 2x + \alpha x + \varepsilon$$

$$C_2(OPT) + q_2 = 2\alpha x$$

$$C_e(OPT) + q_e = x + 2\varepsilon$$

که ماکزیمم تأخیر در کار  $J_1$  اتفاقی می افتد. در این حالت نسبت تقریب با مقدار ۱ یا مقدار  $\frac{(2\alpha+1)}{(1+\alpha)}$  ( زمانی که طول کار اورژانسی به صفر میل می کند ) بدست می آید.

حالت دوم : اگر الگوریتم  $A$  کار  $J_2$  در زمان صفر و لحظه آغاز به کار ماشین زمانبندی کند آن گاه کار اورژانسی می تواند با دوره ی اجرای  $[x, x + \varepsilon]$  و زمان تحویل  $q_e = \varepsilon$  پیش بینی شود که در این صورت کار  $J_1$  بایستی بعد از کار اورژانسی اجرا شود. ماکزیمم تأخیر در کار  $J_1$  رخ می دهد در حالیکه در جواب بهینه کار  $J_1$  ابتدا اجرا می شود و بنابراین داریم :

$$C_1(OPT) + q_1 = 2x$$

$$C_2(OPT) + q_2 = x + 2\alpha x + \varepsilon$$

$$C_e(OPT) + q_e = \alpha x + 2\varepsilon$$

که ماکزیمم تأخیر در کار  $J_1$  یا  $J_2$  رخ می دهد لذا نسبت رقابتی با مقدار  $\frac{3}{(1+2\alpha)}$  یا مقدار  $\frac{3}{2}$  بدست می آید. باحل معادله

$$(3\alpha + 1)(1 + 2\alpha) = 6 + 3\alpha$$

داریم  $\alpha = \frac{-1+\sqrt{37}}{6} \cong 0.76$ . لذا نسبت اجرای هر زمانبندی باید از مقدار  $\frac{9}{2+\sqrt{37}} = \frac{3}{1+2\alpha}$  بزرگتر مساوی باشد.

□

#### ۵. نتایج تجربی

در این بخش نتایج تجربی بدست آمده از ترتیب جکسون و جواب بهینه را بر روی داده های تصادفی ارائه شده است. جواب بهینه توسط الگوریتم ارائه شده توسط قاسم [۲] بر اساس رویکرد برنامه ریزی پویا بدست آمده است. داده های خود را بر اساس روند زیر تولید می کنیم. تعداد کارها،  $n$  از مجموعه  $\{50, 100, 150, 200, 300, 500\}$  و زمان اجرای هر کار بصورت تصادفی از بازه  $[1, 50]$  انتخاب شده است. فرض کنید  $\theta = 25n$ . دوره اجرای کار اورژانسی بصورت زیر تولید شده است:



$$s \in \{\theta, \frac{1}{4}\theta, \frac{1}{4}\theta, \frac{3}{4}\theta\}$$

و  $f = s + 25$  و زمان تحویل کار اورژانسی از بازه  $[1, 100]$  انتخاب شده است. در نتایج ارائه شده میانگین مقدار جواب بهینه  $\overline{opt}$  و میانگین جواب زمانبندی جکسون  $\overline{L_{max}}$  به ازای هر مقدار  $n$  و مقدار فاصله بین دو مقدار  $\overline{opt}$  و  $\overline{L_{max}}$  محاسبه شده است. این مقادیر برای 30 نمونه تصادفی بدست آمده است. جدول 1 برای نمونه و سایر جداول به دست آمده، نشان می دهند زمانی که طول دوره اجرای کار اورژانسی کوتاه باشد زمان اجرای بهتری خواهیم داشت. عبارتی زمانبندی تحت تأثیر طول دوره ی اجرای کار اورژانسی قرار می گیرد. زمانی که  $n$  افزایش می یابد مقادیر  $\overline{opt}$  و  $\overline{L_{max}}$  کاهش می یابند و هرچه نقطه شروع کار اورژانسی دیرتر باشد زمانبندی جکسون بهتر و نزدیک تر به جواب بهینه است.

جدول 1. مقایسه قانون جکسون و جواب بهینه

$S = \theta$			
$n$	$\overline{opt}$	$\overline{L_{max}}$	$100\rho$
5	202/133	205/866	2/011
10	327/066	330/933	1/16
15	451/833	455/666	0/035
50	1337/433	1341/9	0/326
100	2605/166	2611/9	0/250
150	3865/067	3870/866	0/150
200	5106/867	5112/8	0/115
300	7608/7	7615	0/082
500	12609/4	12614/666	0/04

### نتیجه گیری

در این مقاله مساله زمانبندی کار روی یک تک ماشین با هدف مینیم سازی ماکزیمم تأخیر و وقوع یک کار پیش بینی نشده (اورژانسی) مورد مطالعه قرار گرفت. مساله مورد نظر، زمانبندی کارها را بدون هیچ اطلاعی از زمان شروع کار اورژانسی و دوره اجرای آن در بر می گیرد. در این مقاله نشان داده شد هیچ الگوریتم آنلاینی با نسبت رقابتی  $\frac{\sqrt{31}+2}{9}$  برای این مساله یافت نمی شود همچنین ثابت شد قانون جکسون نسبت تقریبی با مقدار 2 را برای این مساله نتیجه می دهد. نتایج بدست آمده در تحقیقات آینده می تواند بهبود پیدا کند و برای مسائل زمانبندی دیگر مورد بررسی قرار گیرد.

### مراجع

1. Y. Huo, B. Reznichenko, and H. Zhao, *Minimizing total weighted completion time with an unexpected machine unavailable interval*, Journal of Scheduling 17, no. 2 (2014), 161–172.
2. I. Kacem, *Approximation algorithms for the makespan minimization with positive tails on a single machine with a fixed non-availability interval*, Journal of Combinatorial Optimization 17, no. 2 (2009), 117–133.
3. I. Kacem, and M. Haouari, *Approximation algorithms for single machine scheduling with one unavailability period*, 4OR 7, no. 1 (2009), 79.
4. C.Y. Lee, *Machine scheduling with an availability constraint*, Journal of global optimization 9, no. 3-4 (1996), 395–416.
5. Z. Tan, and Y. He, *Optimal online algorithm for scheduling on two identical machines with machine availability constraints*, Information Processing Letters 83, no. 6 (2002), 323–329.
6. J. Yuan, L Shi, and J. Ou, *Single machine scheduling with forbidden intervals and job delivery times*, Asia-Pacific Journal of Operational Research 25, no. 03 (2008), 317–325.

پست الکترونیکی: [m.seifaddini@guilan.ac.ir](mailto:m.seifaddini@guilan.ac.ir)

## طرح های تقریب برای یک مسأله زمانبندی

مریم سیف الدینی\*

دانشکده ریاضی، دانشگاه گیلان، گیلان، ایران

چکیده. این مقاله به مرور طرح های تقریب کارا بر روی مسأله زمانبندی روی تک ماشین با هدف مینیم سازی ماکزیمم زمان تحویل کارها می پردازد. از آنجایی که این تابع هدف، مورد توجه گسترده محققان بوده و همواره سعی بر این بوده تا زمان اجرای الگوریتم های ارائه شده برای مسائل بهینه سازی ترکیبیاتی و در ذیل آن مسائل زمانبندی بهبود یابد، تمرکز این تحقیق بر روی این تابع هدف خاص بنا شده است. طرح های تقریب با زمان چند جمله ای و طرح تقریب دیفرانسیلی که بر اساس مقایسه جواب الگوریتم مطرح شده برای حل مسأله با جواب بهینه و جواب بدترین حالت بنا شده است، معیارهایی برای سنجش کارایی الگوریتم حل یک مسأله خاص می باشند. این مطالعه با ارائه نتایج مربوط به طرح های تقریبی راهنمای خوبی برای افرادی است که برای مطالعات آینده جهت یافتن طرح تقریبی مسأله مورد نظر برنامه ریزی می کنند.

واژه های کلیدی: طرح تقریب، الگوریتم ابتکاری، زمانبندی.  
طبقه بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 68R05, 90B35, 68W27.

## ۱. پیش گفتار

مسائل زمانبندی به دلیل کاربرد فراوان در صنعت، تولید، مدیریت و سایر حوزه ها مورد توجه محققان قرار دارند. شروع این تحقیقات در دهه پنجاه با انگیزه کاربردی بودن این مسائل در زمینه های علوم کامپیوتر، بهینه سازی ترکیبیاتی، تحقیق در عملیات و مدیریت بوده است. این مسائل در رده مسائل NP- سخت مسائل بهینه سازی ترکیبیاتی و علوم کامپیوتر قرار می گیرند. از این رو پیدا کردن جواب بهینه دقیق برای آنها در زمان اجرای معقول (زمان چند جمله ای) امکان پذیر نیست. بنابراین محققین همواره تلاش دارند با رویکردهای مناسب روش های کارایی برای حل این مسائل ارائه کنند. یکی از این رویکردها ارائه راه حل های تقریبی و نزدیک به جواب بهینه است. رویکردی که به لحاظ زمان اجرا سریع تر و در حین حال جواب های با کیفیتی را ارائه می کند. روش های تقریب در تمامی مسائل بهینه سازی، نظریه گراف و کلیه مسائل الگوریتم محور استفاده می شوند و به طور معمول به صورت الگوریتم های تقریب (APX)<sup>۱</sup> و طرح تقریب با زمان چند جمله ای (PTAS)<sup>۲</sup>، طرح تقریب با زمان کاملاً چند جمله ای (FPTAS)<sup>۳</sup> و طرح تقریب دیفرانسیلی با زمان چند جمله ای (DFPTAS)<sup>۴</sup> مطرح می شوند. اساس این طرح ها بر مبنای مقایسه جواب الگوریتم ابتکاری<sup>۵</sup> مطرح شده و جواب بهینه مسأله مورد نظر است. ضمن این که در طرح تقریب دیفرانسیلی جواب الگوریتم ابتکاری مطرح شده، با جواب بهینه و جواب بدترین حالت مقایسه می شود که نسبت به طرح های قبلی کارا تر است. مسأله مورد مطالعه در این تحقیق، زمانبندی روی یک ماشین با هدف مینیمم سازی ماکزیمم زمان تحویل کارها است. در این مسأله می خواهیم مجموعه ای از  $n$  کار  $J = \{1, 2, \dots, n\}$  را بر روی یک تک ماشین زمانبندی کنیم به طوری که هر کار زمان اجرای  $p_j$  و زمان تحویل<sup>۶</sup>  $q_j$  ( $1 \leq j \leq n$ ) را دارد. ماشین در هر زمان حداکثر یک کار می تواند انجام دهد و همه کارها در زمان شروع به کار ماشین آماده برای اجرا می باشند. هدف، مینیمم سازی تابع زیر است:

$$(1) \quad L_{max} = \max_{1 \leq j \leq n} (C_j(S) + q_j)$$

که در آن  $C_j(S)$  زمان اتمام<sup>۷</sup> کار  $j$ ام در زمانبندی شدنی  $S$  برای مسأله  $P$  است. در [۲] ثابت شد این مسأله با مسأله مینیمم سازی ماکزیمم تاخیر با زمان های موعده<sup>۸</sup> معادل است. این مسأله در ادبیات مختلف مورد مطالعه قرار گرفته است. در سال ۱۹۸۲ [۱] قانون جکسون بر اساس ترتیب نزولی زمان های تحویل کارها تعریف شد (یعنی  $q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_n$ ) و نشان داده شد این قانون منجر به

\* سخنران <sup>۱</sup> Approximation algorithms <sup>۲</sup> Polynomial time approximation scheme <sup>۳</sup> Fully Polynomial time approximation scheme <sup>۴</sup> Differential fully Polynomial time approximation scheme <sup>۵</sup> Heuristic <sup>۶</sup> Delivery time <sup>۷</sup> Completion time <sup>۸</sup> Due date

حل بهینه مسأله می شود اما زمانی که محدودیت هایی از قبیل بازه دسترسی ماشین به مسأله اضافه می شود این مسأله در دسته مسائل NP- سخت قرار می گیرد و حل بهینه مسأله در زمان چند جمله ای امکان پذیر نیست. بخش اول این مقاله به تعریف طرح های تقریبی اختصاص دارد. بخش دوم به نتایج به دست آمده در سال های اخیر روی مسأله مورد نظر می پردازد و در بخش آخر پیشنهادات ارائه می شود.

## ۲. تعاریف

مسائل زمانبندی به جهت محیط سیستم زمانبندی یا همان منبع اجرای کار، محدودیت های واقع بر محیط، محدودیت های واقع بر کار و توابع هدف مختلف، تنوع گسترده ای دارند. به همین دلیل برای سادگی در ادامه از نماد گذاری مرسوم در حوزه زمانبندی برای نمایش مسأله مورد مطالعه به صورت  $\alpha|\gamma|\beta$  استفاده می کنیم.  $\alpha$ ، محدودیت های واقع بر محیط ماشین،  $\gamma$ ، محدودیت های واقع بر کار و  $\beta$ ، تابع هدف مورد نظر را نشان می دهند. مسأله زمانبندی  $n$  کار بر روی یک ماشین با هدف مینیمم سازی ماکزیمم زمان تحویل بدون هیچ محدودیتی،  $1||L_{max}$ ، به صورت گسترده ای در ادبیات مربوطه مورد توجه قرار گرفته است. برای مطالعه این مسأله می توان به [۱] مراجعه کرد. اما آنچه که در واقعیت می تواند مورد توجه قرار گیرد عدم دسترسی به ماشین در بازه ای مشخص است. به هر حال ماشین می تواند به دلایل مختلف از جمله خرابی، تعمیر و یا موارد دیگر در بازه ای مشخص از دسترس خارج شود. لی [۹] ثابت کرد مسأله زمانبندی روی یک تک ماشین تحت بازه ثابت غیر قابل دسترس و تابع هدف مینیمم سازی ماکزیمم تأخیر،  $1, h_1||L_{max}$ ، یک مسأله NP سخت است.  $h_1$ ، نماد محدودیت دسترسی ماشین در یک بازه ثابت است. از این رو بررسی این مسأله و ارائه راه حل برای آن بسیار مورد توجه قرار گرفته است. برای درک بهتر از این مسأله مثال زیر را در نظر بگیرید:

مثال ۱۰۲. فرض کنید داده های زیر از چهار کار در اختیار است:  
 $p_1 = 3, q_1 = 5, p_2 = 4, q_2 = 4, p_3 = 2, q_3 = 3, p_4 = 1, q_4 = 1$  و همچنین فرض کنید ماشین در بازه  $[5, 7]$  در دسترس نیست. در این صورت یک راه حل، زمانبندی کارها بر اساس قانون جکسون (دنباله S در شکل ۱) با مقدار تابع هدف  $\varphi(S) = 16$  است که از رابطه (۱) به دست می آید. در حالی که جواب بهینه مقدار  $\varphi^*(S) = 15$  است.



شکل ۱. تصویری از مثال ۱

در ادامه به بیان چند تعریف در زمینه طرح های تقریب می پردازیم.

**تعریف ۲.۰۲.** الگوریتم A برای یک مسأله مینیمم سازی با تابع هدف  $\varphi$  را یک الگوریتم  $\rho$ -تقریب برای مسأله  $P$  می نامیم هرگاه برای هر نمونه  $I$  از مسأله، رابطه زیر برقرار باشد:

$$\frac{\varphi(A(I))}{\varphi(opt(I))} \leq \rho$$

که در آن  $opt(I)$  مقدار بهینه برای نمونه  $I$  می باشد.

$\rho$  را کران بدترین حالت الگوریتم تقریب A نیز می نامند که برای مسأله مینیمم سازی بزرگتر مساوی ۱ با مقدار  $\rho = 1 + \varepsilon$  است، که از نامساوی زیر حاصل می شود

$$\varphi(A(I)) \leq (1 + \varepsilon)\varphi(opt(I)).$$

که در آن  $0 \leq \varepsilon$  است. برای مسأله ماکزیمم سازی مقدار  $\rho$  در بازه  $[0, 1]$  است، که از نامساوی زیر به دست می آید:

$$\varphi(A(I)) \geq (1 - \varepsilon)\varphi(opt(I)).$$

**تعریف ۳.۰۲.** یک طرح تقریب برای یک مسأله مینیمم سازی  $P$ ، یک خانواده از الگوریتم های  $(1 + \varepsilon)$ -تقریب برای هر مقدار  $\varepsilon > 0$  است.

**تعریف ۴.۰۲.** طرح تقریب را PTAS می گوئیم هرگاه پیچیدگی زمانی آن، چندجمله ای بر حسب اندازه ورودی باشد.

**تعریف ۵.۰۲.** طرح تقریب را FPTAS می گوئیم هرگاه پیچیدگی زمانی آن، چندجمله ای بر حسب اندازه ورودی و  $1/\varepsilon$  باشد.

تعریف ۶.۲. طرح تقریب را DFPTAS می‌گوییم هرگاه برای هر نمونه  $I$  از مسأله  $P$  داشته باشیم

$$\varphi(A(I)) \leq \varphi(opt(I)) + (1 - \gamma)\varphi(wst(I)).$$

که در آن  $wst(I)$  مقدار بدترین حالت برای نمونه  $I$  می‌باشد.  $\gamma$ ، نسبت دیفرانسیلی نامیده می‌شود. در میان این طرح‌ها، DFPTAS بهترین نتیجه ممکن برای یک مسأله NP-سخت تحت فرض  $P \neq NP$  است. در ادامه به نتایج تقریب برای مسأله زمانبندی روی یک ماشین با هدف مینیمم سازی ماکزیمم زمان تحویل کارها می‌پردازیم.

### ۳. طرح‌های تقریب

پیدا کردن یک طرح تقریب برای یک مسأله بهینه سازی از رده NP-سخت به چگونگی طراحی و آنالیز الگوریتم تقریب مربوط می‌شود. عبارتی ساختار این الگوریتم را باید به گونه ای بهبود داد تا منجر به یک طرح تقریب شود. راهکارهای رسیدن به یک طرح تقریب با زمان اجرای چند جمله ای، متفاوت هستند. تغییر در ساختار الگوریتم یکی از این روش‌ها است. این تغییر در ساختار به دقت  $\varepsilon$  مورد نظر در تقریب وابسته است و تغییر در ساختار باید به گونه ای باشد که زمانی که  $\varepsilon$  به صفر نزدیک می‌شود میزان این تغییرات نیز کاهش یابد و عبارتی از بین برود. این بخش نتایج مربوط به طرح‌های تقریب مسأله زمانبندی روی یک ماشین با محدودیت دسترسی ماشین و زمان دسترسی کار<sup>۹</sup> با هدف مینیمم سازی ماکزیمم زمان تحویل را در بر می‌گیرد.

لی [۹] قانون جکسون را برای مسأله  $||L_{max}$ ، ارائه کرد و نشان داد خطای جواب بدست آمده از بکارگیری این قانون نسبت به جواب بهینه از مقدار  $\max\{p_i\}$  تجاوز نمی‌کند ( $p_i$  زمان اجرای کار  $i$  ام است). قاسم و ها آوری [۷] مسأله را با زمان‌های دسترسی برای هر کار،  $|r_j|L_{max}$  در نظر گرفتند و نشان دادند قانون جکسون، کران بدترین حالت با مقدار ۲ را برای این مسأله نتیجه می‌دهد. یان و همکاران [۱۰] طرح تقریبی با زمان اجرای چند جمله ای (PTAS) برای این مسأله پیدا کردند. قاسم [۴] یک طرح تقریبی قویا چند جمله ای (FPTAS) برای این مسأله مطرح کرد. در [۵] یک طرح تقریبی با زمان چند جمله ای با استفاده از روش تغییر در ساختار ورودی مسأله و سپس استفاده از روش برنامه ریزی پویا مطرح شد. نویسندگان تلاش کردند نمونه سخت مسأله را از طریق ترکیب کارهای کوچک به یک نمونه ساده تبدیل کنند. سپس با کمک رویکرد برنامه ریزی پویا و تکنیک اصلاح ساختار اجرای الگوریتم، طرح تقریب مناسب را ارائه کردند. ایده این روش بدین صورت است که یک الگوریتم دقیق اما با سرعت کند که برای حل مسأله مطرح شده است، به گونه ای اصلاح شود تا مقداری از داده‌های ورودی حذف شود و داده‌های کمتری برای پردازش باقی ماند تا سرعت الگوریتم بالا رود.

در [۶] مسأله زمانبندی روی یک ماشین با زمان دسترسی و زمان تحویل برای هر کار با هدف مینیمم سازی ماکزیمم تاخیر در نظر گرفته شد. چهار سناریو برای این مسأله مطرح شد:

در سناریوی اول برای هر کار یک مهلت مشخص تعریف شد. بدین معنی که کار بایستی قبل از زمان تعیین شده به اتمام برسد. این مسأله با  $|r_j|, C_{max} \leq d|L_{max}$  نشان داده شد و برای آن یک طرح تقریب، PTAS ارائه شد. نویسندگان در سناریوی دوم، مسأله را با دو تابع هدف در نظر گرفتند،  $|r_j|L_{max}, C_{max}$  و یک طرح تقریب با زمان  $O(\ln(n).n^{(1+\frac{\varepsilon}{2})})$  برای مسأله ارائه کردند. در سناریوهای سوم و چهارم محدودیت دسترسی برای ماشین در نظر گرفته شد. محدودیت اول در یک بازه ثابت و مشخص است که به دلیل خرابی، نگهداری و سایر دلایل ممکن است برای یک ماشین رخ دهد. این مسأله با  $|r_j|L_{max}, h_1$  نمایش داده شد. محدودیت دوم مربوط به عاملی<sup>۱۰</sup> است که وظیفه اجرای کارها را به عهده دارد. این عامل یک بازه زمانی است که یک کار می‌تواند در آن اجرا شود اما نمی‌تواند شروع شود یا به اتمام برسد. این مسأله با  $|r_j|L_{max}, ONA$  نشان داد شد. برای هر دوی این سناریو ها یک PTAS مطرح شد. معیار استفاده شده در این پژوهش‌ها صرفاً به جواب بهینه توجه می‌کند و نمی‌تواند موقعیت جواب حاصل از الگوریتم را در مقایسه با جواب بهینه و بدترین جواب بسنجد. معیار دیگری وجود دارد که نسبت تفاوت بین مقدار جواب تولید شده توسط الگوریتم و جواب بدترین حالت به اختلاف مقدار بهینه و مقدار بدترین حالت را در نظر می‌گیرد. این معیار به معیار نسبت تقریب دیفرانسیلی معروف است. در واقع این معیار نشان می‌دهد جواب حاصل از الگوریتم چقدر از بدترین جواب دور است و چقدر به جواب بهینه نزدیک است. براساس تحقیق نگارنده، از میان این تحقیقات، تنها پژوهش [۸] به بررسی طرح تقریب دیفرانسیلی با زمان چند جمله ای، (DFPTAS) برای مسئله زمانبندی روی یک ماشین با تابع هدف مینیمم سازی زمان اتمام وزن دار پرداخته است. خلاصه نتایج به دست آمده برای مسأله مورد نظر در این پژوهش تحت محدودیت‌های مختلف در جدول ۱ ارائه شده است.

<sup>10</sup> Operator Nonavailability Interval

<sup>9</sup> Release date

مرجع	نتیجه	مسأله
[۹]	۲-تقریب (قانون جکسون)	$\lambda, h_{\lambda}    L_{max}$
[۱۰]	$O(n \ln(n) + n\lambda^{1/\varepsilon}) : PTAS$	$\lambda, h_{\lambda}    L_{max}$
[۴]	$O(n^3/\varepsilon^3) : FPTAS$	$\lambda, h_{\lambda}    L_{max}$
[۵]	$O(n \ln(n) + (\lambda/\varepsilon)^{2^{O(1/\varepsilon)}}) : PTAS$	$\lambda, h_{\lambda}    L_{max}$
[۵]	$O(n \ln(n) + \min\{n, 3/\varepsilon\}^3/\varepsilon^3) : FPTAS$	$\lambda, h_{\lambda}    L_{max}$
[۳]	$O(n \ln(n) + n(\frac{\lambda}{\varepsilon})^{\frac{3}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon}}) : PTAS$	$\lambda  r_j  L_{max}$
[۶]	$O(2^{\frac{1}{\varepsilon}} (\frac{\lambda}{\varepsilon})^{\frac{1}{\varepsilon}} \ln(n) (n^{\lambda + \frac{1}{\varepsilon}} + n^{\lambda + \frac{1}{\varepsilon}})) : PTAS$	$\lambda, h_{\lambda}  r_j  L_{max}$

جدول ۱. خلاصه نتایج

#### ۴. پیشنهادات

به نظر می رسد طرح تقریب دیفرانسیلی که معیار بهتری برای سنجش الگوریتم های ابتکاری است، برای مسائل زمانبندی با توابع هدف مختلف بررسی شود. همچنین مسائل زمانبندی چند هدفه و یا مسائل زمانبندی با چندین ماشین نیز می تواند موضوع پژوهش های بعدی باشد.

#### مراجع

1. J. Carlier, *The one-machine sequencing problem*. Eur J Oper Res 11, (1982) , 42–47.
2. M. Dessouky, C.R. Margenthaler, *he One-Machine Sequencing Problem with Early Starts and Due Dates*, AIIE Trans 4(3), 2007, 214–222.
3. L.A. Hall, D.B. Shmoys, *Jackson's rule for single machine scheduling: making a good heuristic better*, Math. Oper. Res. 17, (1992), 22–35.
4. I. Kacem, *Approximation algorithms for the makespan minimization with positive tails on a single machine with a fixed non-availability interval.*, Journal of Combinatorial Optimization 17, no. 2 (2009), 117–133.
5. I. Kacem, H. Kellerer, M. Seifaddini, *Efficient approximation schemes for the maximum lateness minimization on a single machine with a fixed operator or machine non-availability interval*, J. Comb. Optim. 32, (2016), 970–981.
6. I. Kacem, and Hans Kellerer. *Approximation schemes for minimizing the maximum lateness on a single machine with release times under non-availability or deadline constraints*, Algorithmica (2018), 1–19.
7. I. Kacem, M. Haouari, *Approximation algorithms for single machine scheduling with one unavailability period*, J. Oper. Res. 7(1),(2009), 79–92.
8. I. Kacem, V. T. Paschos, *Weighted completion time minimization on a single-machine with a fixed non-availability interval: Differential approximability*, Discrete Optimization, 10(1),(2013), .68–61
9. C.Y. Lee, *Machine scheduling with an availability constraint*, Journal of global optimization 9, no. 3-4 (1996), 395–416.
10. J. Yuan, L Shi, and J. Ou, *Single machine scheduling with forbidden intervals and job delivery times*, Asia-Pacific Journal of Operational Research 25, no. 03 (2008), 317–325.

پست الکترونیکی: [m.seifaddini@guilan.ac.ir](mailto:m.seifaddini@guilan.ac.ir)

سخنرانی‌ها

هندسه و توپولوژی

## خاصیت قطری نگاشت تکانی و فروکاست خمینه‌های همیلتونی حاصلضربی

محمد دارا\*  
دانشکده ریاضی، دانشگاه علم و صنعت، تهران، ایران

چکیده. در حوزه دستگاه‌های همیلتونی تقارن‌ها روی فضای فاز از اهمیت زیادی برخوردار هستند که منجر به کمیت‌های پایستگی روی این دستگاه‌ها می‌شود. کمیت‌های پایستار، اشیایی هستند که برای خرد کردن بُعد فضای دستگاه‌های دینامیکی مورد استفاده قرار می‌گیرند. به این روش که با استفاده از تقارن‌های موجود در یک دستگاه راه حل‌های اصلی آن را در یک فضا با بُعد کمتر مورد بررسی قرار می‌دهند، فروکاست گفته می‌شود. نگاشت تکانی یک بیان ریاضی از مفهوم کمیت‌های پایستگی مرتبط با تقارن‌های یک دستگاه دینامیکی و یک ابزار اساسی برای مطالعه فروکاست روی خمینه‌های همثافته به حساب می‌آید. در این مقاله نشان می‌دهیم اگر دو خمینه‌ی همثافته دارای نگاشت تکانی باشند، خمینه حاصلضربی آن‌ها نیز به طور طبیعی دارای نگاشت تکانی است و در ادامه فروکاست بر روی این خمینه‌ها را مورد بررسی قرار خواهیم داد.

واژه‌های کلیدی: هندسه همثافته، دستگاه‌های همیلتونی، نگاشت تکانی، فروکاست.  
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 53D20, 53D05.

### ۱. پیشگفتار

یکی از نخستین مسائل در علوم طبیعی، مطالعه‌ی پدیده حرکت است. اولین فرمول‌بندی ریاضی از قوانین حرکت توسط گالیله و نیوتون انجام شده است که به عنوان مکانیک کلاسیک شناخته می‌شود. در بررسی حرکت اجسام به کمک قوانین نیوتون اجسام به صورت ذره‌هایی در نظر گرفته می‌شوند. این امر سبب می‌شود زمانی که تعداد ذرات یک دستگاه مکانیکی بیشتر شود، استفاده از قوانین نیوتون به سختی صورت بگیرد. تحلیل‌گران بسیاری از جمله لاگرانژ و همیلتون به ادامه موضوع پرداختند، به گونه‌ای که دستاوردهای آن‌ها فاقد اشکال هندسی بود و هر دو توانستند فرمول‌بندی جدیدی از مکانیک برای حل این مشکلات پیشنهاد کنند.

۱.۱. هندسه همثافته و دستگاه‌های همیلتونی. مفهوم کلیدی در هندسه‌ی اقلیدس فاصله است. برای تجسم جبری فاصله، از ضرب داخلی استفاده می‌شود که به کارگیری آن می‌توان تمام مفاهیم هندسه اقلیدس را بدست آورد. ضرب داخلی یک فرم دوخطی است، جانشین کردن این فرم دوخطی با فرم دوخطی دیگر انواع هندسه جدید را به وجود می‌آورد. هندسه همثافته متناسب با یک فرم دوخطی پادمتقارن، ناتباهیده و وابسته به نقاط است. اگر بخواهیم به دنبال تاریخچه این هندسه باشیم باید آن را در اواخر قرن نوزدهم و اوایل قرن بیستم در آثار ریاضیدان‌ها و فیزیکدان‌ها در پس پیشرفت مکانیک جستجو کنیم. مکانیک همیلتونی نمایشی جدید از مکانیک کلاسیک است. این رویکرد جدید این امکان را فراهم می‌کند تا بتوانیم بدون اعتنا به هندسه‌ی اقلیدسی حاکم بر دستگاه، معادله‌ی حرکت آن را توصیف کنیم. تعمیم مفاهیم مکانیک همیلتونی بر روی خمینه‌ها با استفاده از هندسه‌ای به نام همثافته امکانپذیر است؛ به عبارت دیگر، فضای فاز یک دستگاه همیلتونی یک فضای همثافته می‌باشد.

تعریف ۱.۱. [۱] یک ساختار همثافته روی خمینه‌ی هموار  $M$ ، ۲-فرمی دیفرانسیلی  $\omega$  با ویژگی‌های زیر است:

(۱) برای هر  $q \in M$ ، فرم همثافته روی  $T_q M$  است.

(۲)  $d\omega = 0$ ؛ به عبارت دیگر،  $\omega$  بسته است.

در این صورت زوج  $(M, \omega)$  را خمینه همثافته می‌نامیم. یک نگاشت همثافته بین دو خمینه‌ی هموار همثافته  $(M_1, \omega_1)$  و  $(M_2, \omega_2)$ ، نگاشتی هموار مانند  $M_1 \rightarrow M_2$   $\varphi$  است به طوری که،  $\varphi^* \omega_2 = \omega_1$ .

برای هر تابع حقیقی مقدار روی خمینه همثافته یک میدان برداری که شار آن نسبت به فرم همثافته پایاست، نظیر می‌کنیم. حرکت در دستگاه‌های همیلتونی به وسیله فضای فاز شار متناظر با این میدان برداری توصیف می‌گردد. به عبارت دیگر، با ناتباهیده و بسته بودن ۲-فرم دیفرانسیلی  $\omega$  روی خمینه همثافته  $M$ ، برای هر  $q \in M$  نگاشت  $q \in M \mapsto \omega_q(X, \cdot) \in T_q^* M$  یک یکریختی خطی بین  $T_q M$  و  $T_q^* M$  تعریف می‌کند. در حالت خاص اگر  $H : M \rightarrow \mathbb{R}$  یک تابع هموار روی  $M$  باشد، آنگاه  $dH$  یک ۱-فرمی روی  $M$  است که می‌توان با استفاده از  $\omega$  و یا یک میدان برداری در  $M$  آن را مشخص نمود. در این صورت به این تابع هموار، تابع همیلتون و به میدان برداری معرفی شده، میدان برداری همیلتونی می‌گوییم.

**تعریف ۲.۱.** (میدان برداری همیلتونی) [۱] فرض کنید  $(M, \omega)$  یک خمینه همثافته باشد. میدان برداری هموار  $X$  را میدان برداری همیلتونی می‌گوییم، هرگاه به ازای تابعی هموار مانند  $H : M \rightarrow \mathbb{R}$  رابطه  $\iota_X \omega = dH$  برقرار باشد. در این حالت میدان برداری  $X$  را با  $X_H$  نمایش می‌دهیم و تابع  $H$  را تابع همیلتون می‌نامیم. با انتخاب تابع همیلتون  $H$ ، اگر فرض کنیم میدان برداری  $X_H$  وجود داشته باشد، آنگاه از ناتباهدگی فرم همثافته  $\omega$  منحصر به فرد بودن آن تضمین خواهد شد.

**۲.۱. نگاشت تکانی.** در توصیف طبیعت، تقارن نقش مهم و بنیادی ایفا می‌کند. در مکانیک کلاسیک تقارن‌ها، تبدیلات هندسی هستند که روی فضای شامل متغیرهای مستقل و وابسته عمل می‌کنند. از طرفی وجود کمیت‌های پایستار، از دیرباز مورد توجه بوده و اهمیت فراوانی داشته است. کمیت‌های پایستار توسط بنیانگذاران مکانیک کلاسیک برای خرد کردن بُعد فضای دستگاه‌های دینامیکی مورد استفاده قرار می‌گرفتند. به این روش که با استفاده از تقارن‌های موجود در یک دستگاه راه حل‌های اصلی آن را در یک فضا با بُعد کمتر مورد بررسی قرار می‌دهند، فروکاست گفته می‌شود. فروکاست یک روش بسیار معمول مشتمل بر روش‌های ترکیبی از تکنیک‌های مختلف مانند استفاده از تقارن و کمیت‌های پایستار می‌باشد و برای کاهش بُعد فضای فاز دستگاه‌های دینامیکی متقارن به کار گرفته می‌شود. نگاشت تکانی یک بیان ریاضی از مفهوم کمیت‌های پایستگی مرتبط با تقارن‌های یک دستگاه دینامیکی و یک ابزار اساسی برای مطالعه فروکاست روی خمینه‌های همثافته به حساب می‌آید. برای تعریف نگاشت تکانی نیاز به تعریف عمل همثافته خواهیم داشت که ابتدا به آن خواهیم پرداخت.

**تعریف ۳.۱.** (عمل همثافته) [۱] فرض کنید  $(M, \omega)$  خمینه‌ای همثافته و  $G$  یک گروه لی باشد. عمل هموار  $\psi : G \times M \rightarrow M$  را همثافته گوییم، هرگاه به ازای هر  $g \in G$ ، هموارریختی  $\psi_g$  همثافته باشد.

مفهوم نگاشت تکانی تعمیمی برای تابع همیلتون است. از لحاظ تاریخی اولین کسی که نگاشت تکانی را بدین صورت معرفی کرد، کسنت<sup>۱</sup> در کنفرانسی در ژاپن در سال ۱۹۶۵ بود [۲]. او نامی برای آن انتخاب نکرد و تنها آن را برای اثبات قضیه خود به کار برد. تنها چند هفته بعد سوریو<sup>۲</sup>، به طور مستقل آن را معرفی کرد و این نام را برای آن انتخاب نمود [۵]. او همچنین اهمیت فیزیکی آن را درک کرد و آن را با مفاهیم تکانه خطی و زاویه‌ای مرتبط ساخت.

**تعریف ۴.۱.** (عمل همیلتونی) [۴] فرض کنید  $(M, \omega)$  یک خمینه همثافته،  $G$  یک گروه لی و  $\mathfrak{g}$  جبر لی آن باشد. عمل همثافته  $\psi : G \times M \rightarrow M$  را همیلتونی گوییم هرگاه نگاشت  $\mu : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$  وجود داشته باشد به گونه‌ای که در شرایط زیر صدق کند:

- (۱) به ازای هر  $X \in \mathfrak{g}$ ، اگر:
- تابع  $\mu^X : M \rightarrow \mathbb{R}$  را با ضابطه  $\mu^X(q) := \mu(q)(X)$  داشته باشیم. یا به عبارت دیگر، نگاشت  $\mu$  به صورت زیر تعریف شود:

$$\mu : M \rightarrow \mathfrak{g}^* \\ q \mapsto \begin{cases} \mu(q) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R} \\ X \mapsto \mu(q)(X) := \mu^X(q) \end{cases}$$

- $X^M$  مولد بسیار کوچک متناظر با  $X$  از عمل  $\psi$  در  $M$  باشد که به ازای هر  $q \in M$  به صورت زیر تعریف شود:

$$X^M(q) = \left. \frac{d}{dt} (\psi_{\exp(tX)}(q)) \right|_{t=0},$$

آنگاه  $\iota_{X^M} \omega = d\mu^X$  یعنی  $\mu^X$  یک تابع همیلتون برای میدان برداری  $X^M$  است.

- (۲)  $\mu$  با توجه به عمل  $\psi$  از  $G$  به  $M$  و عمل هم‌الحاقی  $Ad^\#$  از  $G$  به  $\mathfrak{g}^*$  همورد می‌باشد. به عبارت دیگر؛ به ازای هر  $g \in G$ ، نمودار زیر جابه‌جایی است.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\mu} & \mathfrak{g}^* \\ \psi_g \downarrow & & \downarrow Ad_g^\# \\ M & \xrightarrow{\mu} & \mathfrak{g}^* \end{array}$$

در این صورت  $(M, \omega, G, \mu)$  را یک  $G$ -خمینه همیلتونی گوییم و  $\mu$  را نگاشت تکانی می‌نامیم.

<sup>2</sup> Jean-Marie Souriau(1922-2012)

<sup>1</sup> Bertram Kostant(1928-2017)



## ۲. خاصیت قطری نگاشت تکانی

**قضیه ۱.۰۲.** فرض کنید  $(M_1, \omega_1, G_1, \mu_1)$  و  $(M_2, \omega_2, G_2, \mu_2)$  دو خمینه همیلتونی، به ترتیب با عمل‌های  $\varphi$  و  $\psi$  باشند. خمینه  $M_1 \times M_2$  با ۲-فرم  $\omega_1 \oplus \omega_2 := \pi_1^* \omega_1 + \pi_2^* \omega_2$  یک خمینه هم‌تافته است که  $\pi_i : M_1 \times M_2 \rightarrow M_i$  نگاشت تصویر می‌باشد. با در نظر گرفتن نگاشت  $F$  به صورت زیر:

$$F : (G_1 \times G_2) \times (M_1 \times M_2) \longrightarrow (G_1 \times M_1) \times (G_2 \times M_2) \\ ((g_1, g_2), (q_1, q_2)) \longmapsto ((g_1, q_1), (g_2, q_2))$$

عمل هموار گروه لی حاصلضربی  $G_1 \times G_2$  روی خمینه  $M_1 \times M_2$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{array}{ccc} (G_1 \times G_2) \times (M_1 \times M_2) & & \\ \downarrow F & \searrow \Psi := (\varphi \times \psi) \circ F & \\ (G_1 \times M_1) \times (G_2 \times M_2) & \xrightarrow{\varphi \times \psi} & (M_1 \times M_2) \end{array}$$

در این صورت خمینه هم‌تافته  $M_1 \times M_2$  همراه با عمل  $\Psi$  یک  $(G_1 \times G_2)$ -خمینه همیلتونی با نگاشت تکانی  $\mu_1 \oplus \mu_2$  است که به ازای هر  $q_i \in M_i$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_1 \oplus \mu_2 : (M_1 \times M_2) \longrightarrow (\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2)^* = \mathfrak{g}_1^* \oplus \mathfrak{g}_2^* \\ (q_1, q_2) \longmapsto \mu_1(q_1) + \mu_2(q_2)$$

**اثبات.** با توجه به ۲-فرم‌های هم‌تافته  $\omega_1$  و  $\omega_2$ ، ۲-فرم دیفرانسیلی  $\omega_1 \oplus \omega_2$  روی خمینه  $M_1 \times M_2$  بسته و ناتباهیده می‌باشد و لذا خمینه  $(M_1 \times M_2, \omega_1 \oplus \omega_2)$  هم‌تافته است. عنصر دلخواه  $X = (X_1, X_2) \in \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$  را در نظر می‌گیریم. فرض کنید به ازای هر  $i = 1, 2$ ،  $X^{M_i}$  میدان برداری همیلتونی متناظر با  $X_i$  در  $M_i$  برای تابع همیلتون  $\mu_i^{X_i}$  باشد. در این صورت نشان می‌دهیم  $X^{M_1 \times M_2} := (X^{M_1}, X^{M_2})$  میدان برداری همیلتونی مورد نظر ما برای تابع همیلتون  $(\mu_1 \oplus \mu_2)^X$  است، زیرا به ازای هر میدان برداری دلخواه  $Y = (Y_1, Y_2)$  از  $M_1 \times M_2$  خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \iota_{X^{M_1 \times M_2}}(\omega_1 \oplus \omega_2)(Y) &= (\pi_1^* \omega_1 + \pi_2^* \omega_2)(X^{M_1 \times M_2}, Y) = \omega_1(X^{M_1}, Y_1) + \omega_2(X^{M_2}, Y_2) \\ &= d\mu_1^{X_1}(Y_1) + d\mu_2^{X_2}(Y_2) = d(\mu_1 \oplus \mu_2)^X(Y). \end{aligned}$$

اکنون ثابت می‌کنیم به ازای هر  $(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$  نمودار زیر جابه‌جایی است:

$$\begin{array}{ccc} M_1 \times M_2 & \xrightarrow{\mu_1 \oplus \mu_2} & \mathfrak{g}_1^* \oplus \mathfrak{g}_2^* \\ \downarrow \Psi_{(g_1, g_2)} & & \downarrow Ad_{g_1}^\# \oplus Ad_{g_2}^\# \\ M_1 \times M_2 & \xrightarrow{\mu_1 \oplus \mu_2} & \mathfrak{g}_1^* \oplus \mathfrak{g}_2^* \end{array}$$

به ازای هر  $X = (X_1, X_2) \in \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$  و  $(q_1, q_2) \in M_1 \times M_2$  داریم:

$$\begin{aligned} (\mu_1 \oplus \mu_2) \circ \Psi_{(g_1, g_2)}(q)(X) &= (\mu_1 \oplus \mu_2) \circ ((\varphi \times \psi) \circ F(q_1, q_2))(X_1, X_2) \\ &= (\mu_1 \oplus \mu_2)(\varphi_{g_1}(q_1), \psi_{g_2}(q_2))(X_1, X_2) \\ &= (\mu_1 \oplus \mu_2)(\varphi_{g_1}(q_1), \psi_{g_2}(q_2))(X_1, X_2) \\ &= (\mu_1 \circ \varphi_{g_1}(q_1) + \mu_2 \circ \psi_{g_2}(q_2))(X_1, X_2) \\ &= \mu_1 \circ \varphi_{g_1}(q_1)(X_1) + \mu_2 \circ \psi_{g_2}(q_2)(X_2). \end{aligned} \tag{۱}$$

چون  $\mu_1$  و  $\mu_2$  نگاشت‌های تکانی هستند، پس:

$$Ad_{g_1}^\# \circ \mu_1 = \mu_1 \circ \varphi_{g_1} \quad ; \quad Ad_{g_2}^\# \circ \mu_2 = \mu_2 \circ \psi_{g_2}.$$

بنابراین (۱) به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} Ad_{g_1}^\# \circ \mu_1(q_1)(X_1) + Ad_{g_2}^\# \circ \mu_2(q_2)(X_2) &= (Ad_{g_1}^\# \circ \mu_1(q_1) + Ad_{g_2}^\# \circ \mu_2(q_2))(X_1, X_2) \\ &= (Ad_{g_1}^\# \oplus Ad_{g_2}^\#) \circ (\mu_1 \oplus \mu_2)(q_1, q_2)(X) \\ &= (Ad_{g_1}^\# \oplus Ad_{g_2}^\#) \circ (\mu_1 \oplus \mu_2)(q)(X). \end{aligned}$$

در این صورت نگاشت  $\mu_1 \oplus \mu_2$  تکانی است و  $(M_1 \times M_2, \omega_1 \oplus \omega_2, G_1 \times G_2, \mu_1 \oplus \mu_2)$  یک خمینه همیلتونی می‌باشد.  $\square$

۱.۲. فروکاست. نظریه فروکاست یک مفهوم دیرینه است که ریشه آن به مکانیک کلاسیک باز می‌گردد. مفاهیم این نظریه در بسیاری از کتب مکانیک هندسی یا هندسه همثافته وجود دارد. در این نظریه، با داشتن یک عمل گروه لی روی یک  $G$ -خمینه همیلتونی و با در نظر گرفتن یک سطح تراز از نگاشت تکانی و یک عمل آزاد و سره از زیرگروه پایاگر روی آن، یک خمینه خارجی قسمتی جدید معرفی می‌شود که به صورت زیر است:

قضیه ۲.۲. (فروکاست همثافته)  $G$ -خمینه همیلتونی  $(M, \omega, G, \mu)$  را در نظر بگیرید. فرض کنید  $\xi \in \mathfrak{g}^*$  یک مقدار منظم از نگاشت هموار  $\mu$  باشد. اگر زیرگروه پایاگر  $G_\xi$  تحت عمل هم‌الحاقی  $Ad^\#$  روی  $\mathfrak{g}^*$  به صورت آزاد و سره بر  $\mu^{-1}(\xi)$  عمل کند، آنگاه فضای مداری  $M_\xi$  که به صورت زیر تعریف می‌شود، یک خمینه همثافته است.

$$M_\xi := \frac{\mu^{-1}(\xi)}{G_\xi}$$

اثبات. برهان این قضیه در منبع [۳] آمده است.  $\square$

با استفاده از قضیه فوق که در سال ۱۹۷۴ توسط مارسدن<sup>۳</sup> و وینشتین<sup>۴</sup> ارائه شد، می‌توان دینامیک یک دستگاه همیلتونی را کاهش داد که این موضوع خارج از بحث این مقاله می‌باشد. برای اطلاعات تکمیلی می‌توان به منابع [۳]، [۶] مراجعه نمود.

نتیجه ۳.۲. فرض کنید  $(M_1, \omega_1, G_1, \mu_1)$  و  $(M_2, \omega_2, G_2, \mu_2)$  دو خمینه همیلتونی باشند. بنابر قضیه ۱.۲ خمینه همثافته  $M_1 \times M_2$  یک  $(G_1 \times G_2)$ -خمینه همیلتونی با نگاشت تکانی  $\mu_1 \oplus \mu_2$  است. فرض کنید  $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathfrak{g}_1^* \oplus \mathfrak{g}_2^*$  یک مقدار منظم از نگاشت تکانی  $\mu_1 \oplus \mu_2$  به گونه ای باشد که  $G_{1\xi_1} \times G_{2\xi_2}$  تحت عمل  $Ad^\# \oplus Ad^\#$  روی  $\mathfrak{g}_1^* \oplus \mathfrak{g}_2^*$  به صورت آزاد و سره بر  $(\mu_1 \oplus \mu_2)^{-1}$  عمل کند. در این صورت خمینه  $(M_1 \times M_2)_\xi$  دارای بُعد زیر است:

$$(\dim M_1 + \dim M_2) - (\dim G_1 + \dim G_2) - (\dim G_{1\xi_1} + \dim G_{2\xi_2}).$$

در حالت خاص اگر مقدار منظم  $\xi$  از  $\mathfrak{g}_1^* \oplus \mathfrak{g}_2^*$  تحت عمل  $Ad^\# \oplus Ad^\#$  ثابت باشد، بُعد  $(M_1 \times M_2)_\xi$  برابر است با:

$$(\dim M_1 + \dim M_2) - 2(\dim G_1 + \dim G_2)$$

### سپاس‌گزاری

بدینوسیله بر خود لازم می‌دانم از استاد راهنمای خویش، جناب آقای دکتر دهقان نژاد برای راهنمایی‌های ارزنده، مطالعه و شکل‌گیری مقاله تشکر نمایم. همین‌طور از جناب آقای دکتر هادی زارع عضو هیات علمی دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر دانشگاه تهران به خاطر ایده اولیه انجام این پژوهش سپاس‌گزارم.

### مراجع

1. A.C. Da Silva, *Lectures on symplectic geometry*, Vol. 3575. Berlin: Springer, (2001).
2. B. Kostant, *Orbits, symplectic structures and representation theory*, Proc. US-Japan Seminar on Diff. Geom. Kyoto, Nippon Hyronsha, Tokyo, 77, (1965).
3. J.E. Marsden and A. Weinstein, *Reduction of symplectic manifolds with symmetry*, Reports on mathematical physics 5.1 (1974): 121-130.
4. J.E. Marsden and T.S. Ratiu, *Introduction to Mechanics and Symmetry: A Basic Exposition of Classical Mechanical Systems*, Texts in Applied Mathematics, 17, Springer-Verlag, New York, (1994).
5. J.M. Souriau, *Structure des systèmes dynamiques*, Dunod, Paris, (1970).
6. K.R. Meyer, *Symmetries and integrals in mechanics*, Dynamical systems. Academic Press, (1973): 259-272.

پست الکترونیک: [m\\_dara@mathdep.iust.ac.ir](mailto:m_dara@mathdep.iust.ac.ir)

<sup>4</sup> Alan David Weinstein (1943)

<sup>3</sup> Jerrold Eldon Marsden (1942-2010)

سخنرانی‌ها

سایر

کدهای دوتایی ناشی از چهارتایی‌ها روی  $k$ -تایی‌ها

ابوالفضل بهمنی\*  
بخش ریاضی، دانشگاه زنجان، زنجان، ایران  
و مژگان امامی  
بخش ریاضی، دانشگاه زنجان، زنجان، ایران

چکیده. فرض کنید  $\Omega$  یک مجموعه  $n$  عضوی باشد. ماتریس  $W$  را به گونه‌ای در نظر می‌گیریم که سطرهايش زیرمجموعه‌های چهارعضوی از  $\Omega$  و ستون‌هایش زیرمجموعه‌های  $k$  عضوی ( $1 \leq k \leq 3$ ) از  $\Omega$  باشند به گونه‌ای که درایه سطرها و ستون‌ها یک است هرگاه این زیرمجموعه‌ها  $k$  اشتراک داشته باشند و در غیر این صورت صفر می‌باشد. به ازای مقادیر مختلف  $k$  کدهای دوتایی ناشی از ماتریس  $W$  را مورد بررسی قرار داده و پارامترهای آن‌ها را به دست می‌آوریم. همچنین در نهایت کدهای دوتایی ناشی از  $W^t$  را نیز به دست می‌آوریم. واژه‌های کلیدی: فاصله همینگ، کدهای دوتایی، مینیم وزن، کدخطی. طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: (کد) 13D45, 39B42.

## ۱. مقدمه

$F_q$  را یک مجموعه متناهی (الفبا)  $q$ -عضوی بگیریم. اگر  $q$  توانی از یک عدد اول باشد، آنگاه  $F_q$  را میدان  $q$ -عضوی  $GF_q$  در نظر می‌گیریم.  $(F_q)^n$  مجموعه تمامی  $n$ -تایی‌های مرتب  $a = a_1 a_2 \dots a_n$  می‌باشد، که هر  $a_i \in F_q$  است. هر عنصر  $(F_q)^n$  یک بردار به طول  $n$  نامیده می‌شود. اندازه مجموعه  $(F_q)^n$  برابر  $q^n$  است. یک کد  $q$ -تایی به طول  $n$  زیرمجموعه‌ای از  $(F_q)^n$  می‌باشد که آن را با  $C$  نمایش می‌دهیم. تعداد عناصر  $C$  را با  $|C| = M$  نمایش داده و به آن اندازه کد  $C$  گوئیم. هر عضو  $C$  را یک کلمه کدی می‌نامیم. بنابراین برای کد  $C$  به طول  $n$  همواره  $M \leq q^n$  است. یک کد  $C$  با  $M$  کلمه کدی به طول  $n$ ، به صورت یک آرایه  $M \times n$  نوشته می‌شود که سطرهايش کلمات کدی  $C$  هستند.

فرض کنید  $x$  و  $y$  دو کلمه کدی به طول  $n$  روی میدان  $F_q$  باشند. منظور از فاصله (همینگ) بین  $x$  و  $y$  که آن را با  $d(x, y)$  نمایش می‌دهیم، تعداد محل‌هایی است که  $x$  و  $y$  در آن‌ها متفاوتند. به عبارتی اگر  $x = x_1 x_2 \dots x_n$  و  $y = y_1 y_2 \dots y_n$  باشند در این صورت

$$d(x, y) = |\{i : x_i \neq y_i\}|.$$

مینیم فاصله برای برای کد  $C$  را با  $d(C)$  نمایش می‌دهیم و به صورت

$$d(C) = \min\{d(x, y) | x, y \in C, x \neq y\}$$

تعریف می‌کنیم. وزن یک کلمه کدی برابر فاصله همینگ آن کلمه با کلمه صفر است. یک کد خطی روی  $F_q$  یک زیرفضای برداری از  $(F_q)^n$  است. اگر  $C$  یک زیرفضای برداری  $k$  بعدی  $(F_q)^n$  باشد و مینیم فاصله  $d$  از  $C$  را مشخص کنیم، آن را یک  $[n, k, d]_q$  کد می‌نامیم. یک ماتریس  $k \times n$  که مجموعه سطرهايش پایه‌ای برای کد خطی  $C$  باشد را ماتریس مولد آن کد نامیده و با  $G$  نمایش می‌دهیم. اطلاعات کامل‌تر را در مرجع [۲] ببینید.

## ۲. نتایج اصلی

فرض کنید  $\Omega$  یک مجموعه  $n$  عضوی و بزرگتر از ۸ باشد. ماتریس  $W$  را به گونه‌ای در نظر می‌گیریم که سطرهايش آن با زیرمجموعه‌های چهارعضوی از  $\Omega$  و ستون‌های آن با زیرمجموعه‌های  $k$  عضوی ( $1 \leq k \leq 3$ ) از  $\Omega$  اندیس گذاری شده باشند به گونه‌ای که داریم:

$$w_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر سطر } i \text{ ام و ستون } j \text{، } k \text{ اشتراک داشته باشند} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

با استفاده از فضای سطر این ماتریس روی میدان  $GF(2)$  به ساخت کدهای دوتایی در حالت‌های مختلف  $k$  می‌پردازیم و این کدها را با  $C_{BW}$  نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱.۲. به ازای نقاط متمایز  $a, b, c \in \Omega$  روی میدان  $GF(2)$  تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} w(a) &= \sum_{x,y,z \in \Omega-a} v^{\{a,x,y,z\}}, \\ w(a,b) &= \sum_{x,y \in \Omega-a,b} v^{\{a,b,x,y\}}, \\ w(a,b,c) &= \sum_{x \in \Omega-a,b,c} v^{\{a,b,c,x\}}, \end{aligned}$$

که منظور از  $v^{\{i,j,k,p\}}$  جایگاه‌هایی از بردار مورد نظرمان است که در آن جایگاه‌ها یک یا صفر دارد که تعداد کل این جایگاه‌ها  $\binom{n}{4}$  است. برای مثال برای  $w(a)$  داریم:

$$v^{\{i,j,k,z\}} = \begin{cases} 1 & \text{اگر } a \text{ با } \{i,j,k,z\} \text{ اشتراک داشته باشد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

به‌طوریکه بردارهای  $w(a)$ ،  $w(a,b)$  و  $w(a,b,c)$  دارای طول  $\binom{n}{4}$  و وزن آن‌ها به ترتیب برابر  $\binom{n-1}{3}$ ،  $\binom{n-1}{2}$  و  $\binom{n-1}{1}$  است. هم‌چنین تعریف می‌کنیم

$$W_1 := \langle w(a) \rangle, \quad W_2 := \langle w(a,b) \rangle, \quad W_3 := \langle w(a,b,c) \rangle.$$

لم ۲.۲. با توجه به تعریف قبل

$$(1) \quad W_1 \subseteq W_2 \text{ و } \dim(W_1) = n-1, \quad W_1 \subseteq W_3$$

$$(2) \quad \dim(W_2) = \binom{n}{2} - 1$$

$$(3) \quad \dim(W_3) = \binom{n-1}{3} - 1$$

اثبات. (۱) فرض می‌کنیم  $j$  بردار تماماً یک باشد. به سادگی دیده می‌شود که

$$\begin{aligned} w(a) = \sum_{x \in \Omega-a} w(a,x) &\implies W_1 \subseteq W_2 \\ w(a) = \sum_{x,y \in \Omega-a} w(a,x,y) &\implies W_1 \subseteq W_3 \end{aligned}$$

برای به دست آوردن بعد  $W_1$ ، ابتدا توجه داریم که  $j$  پس  $\sum_{a \in \Omega} w(a) = 4j$  و می‌توان فرض کرد  $\sum_{i=1}^n a_i w(i) = 0$  یعنی برابر صفر قرار دهیم.  $w(n) = \sum_{a \neq n} w(a)$  اگر یک ترکیب خطی از این  $n$  بردار را با فرض  $a_n = 0$ ، برابر صفر قرار دهیم یعنی  $\sum_{i=1}^n a_i w(i) = 0$ ، ضریب  $v^{\{i,j,k,l\}}$  به ازای تمام  $i, j, k, l \in \Omega$  برابر  $a_i + a_j + a_k + a_l = 0$  خواهد بود. ضریب  $v^{\{i,j,k,n\}}$  به صورت  $a_i + a_j + a_k = 0$  به دست می‌آید و این ایجاب می‌کند  $a_l = 0$  و در نتیجه تمام ضرایب مساوی صفر به دست می‌آیند، پس  $\dim(W_1) = n-1$ .

(۲) این بند مشابه بند یک اثبات می‌شود.

(۳) تعداد بردارهای به فرم  $w(a,b,c)$  برابر  $\binom{n}{3}$  است. ماتریسی به ابعاد  $\binom{n-1}{3} \times \binom{n}{4}$  به گونه‌ای در نظر می‌گیریم که ستون‌های آن با نظم خاصی از نقاط، اندیس گذاری شده باشند و سطرها آن به وسیله ترتیب معینی از برخی  $w(a,b,c)$  ها ساخته شوند. ستون‌ها را به صورت زیر منظم می‌کنیم:

$$\{1, 2, 3, n\}, \{1, 2, 4, n\}, \dots, \{1, 2, n-1, n\}, \{1, 3, 4, n\}, \dots, \{n-3, n-2, n-1, n\}$$

و سایر ستون‌ها به صورت دلخواه هستند. سطرها را نیز با ترتیب زیر در نظر می‌گیریم:

$$w(1, 2, 3), w(1, 2, 4), \dots, w(1, 2, n-1), w(1, 3, 4), \dots, w(n-3, n-2, n-1)$$

واضح است که ماتریس حاصل به فرم همانی است، پس  $\dim(W_3) \geq \binom{n-1}{3}$ . سایر بردارهای  $W_3$  به شکل  $w(a,b,n)$

هستند و دیده می‌شود که  $w(a,b,n) = \sum_{x \neq a,b,n} w(a,b,x)$  پس  $\dim(W_3) = \binom{n-1}{3}$  خواهد بود [۱]. □

گزاره ۳.۲.  $C_{B_W}(n, 4, 3, 3)$  یک  $\left[ \binom{n}{4}, \binom{n-1}{3}, 4(n-4) \right]_2$  کد است.

اثبات. طبق لم قبل بعد کد  $C_{BW}(n, 4, 3, 3)$  برابر  $\binom{n-1}{3}$  است. وزن هر سطر از ماتریس مولد کد  $C_{BW}(n, 4, 3, 3)$  برابر  $4(n-4)$  است. حال نشان می‌دهیم وزن کمتر از  $4(n-4)$  نداریم. با برهان خلف فرض می‌کنیم که ترکیبات خطی  $r$  تا از بردارهای هم‌وقوع کمتر از  $4(n-4)$  باشد. بردارهای هم‌وقوع به شکل  $\{w(a, b, x) | x \in \Omega - \{a, b, n\}\}$  هستند که تعداد آن‌ها برابر  $(n-3)$  است. داریم

$$4r(n-4) - 2 \binom{r}{2} < 4(n-4)$$

که باید  $n-3 \geq r$  یا  $r < 1$  باشد که تناقض است. بنابراین مینیم وزن  $C_{BW}(n, 4, 3, 3)$  برابر  $4(n-4)$  است [۳].

گزاره ۴.۲.  $C_{BW}(n, 4, 1, 1)$  یک  $\left[ \binom{n}{4}, n-1, \binom{n-1}{3} \right]_2$  کد است.

اثبات. طبق لم قبل، بعد این کد برابر  $(n-1)$  است. اگر هر  $r$  تایی از بردارهای  $W_1$  را باهم جمع بزنیم، وزن این  $r$  بردار  $(3 \leq r \leq n)$  برابر  $y = \binom{r}{3} \binom{n-2}{1} + \binom{r}{1} \binom{n-r}{3}$  است. با کمی محاسبات ریاضی به این نتیجه می‌رسیم که به ازای  $r = \frac{n}{4}$  و  $r = 3$  مقدار  $y$  کمینه می‌شود. با قرار دادن این مقادیر  $r = 1$  و  $r = 3$  در  $y$  مشخص می‌شود بازای  $r = 1$  کمترین مقدار نسبت به  $r = 3$  و  $r = \frac{n}{4}$  و  $r = 2$  به دست می‌آید. بنابراین مینیم وزن  $\binom{n-1}{3}$  است.

□

گزاره ۵.۲.  $C_{BW}(n, 4, 2, 2)$  یک  $\left[ \binom{n}{4}, n-1 \right]_2$  کد است.

□

اثبات. مشابه قبل.

تعریف ۶.۲. به ازای نقاط متمایز  $a, b, c, d, f \in \Omega$  تعریف می‌کنیم:

$$v^{\{a,b,c,d\}}_1 = w(a) + w(b) + w(c) + w(d) \quad (1)$$

$$v^{\{a,b,c,d\}}_2 = w(a,b) + w(a,c) + w(a,d) + w(b,c) + w(b,d) + w(c,d) \quad (2)$$

$$v^{\{a,b,c,d\}}_3 = w(a,b,c) + w(a,c,d) + w(a,b,d) + w(b,c,d) \quad (3)$$

گزاره ۷.۲.  $C_{BW}^t(n, 4, 1, 1)$  یک  $[n, n-1, 2]_2$  کد و  $C_{BW}^t(n, 4, 2, 2)$  یک  $\left[ \binom{n}{2}, \binom{n}{2} - 1, 4 \right]_2$  کد است.

اثبات. چون بعد فضای سطری و ستونی  $W$  برابر است پس  $\dim(W_1) = \dim(W_1^t) = n-1$  همچنین داریم  $\dim(W_2) = \dim(W_2^t)$ . حال به بررسی مینیم وزن کدها می‌پردازیم.  $C_{BW}^t(n, 4, 1, 1)$  دارای مینیم وزن ۲ است، زیرا با جمع دو بردار وقوع  $v^{\{a,b,c,d\}}$  و  $v^{\{a,b,c,e\}}$  داریم:

$$v^{\{a,b,c,d\}} + v^{\{a,b,c,e\}} = w(e) + w(d)$$

بردارهای پایه  $C_{BW}^t(n, 4, 2, 2)$  دارای وزن ۴ هستند و از آنجایی که وزن هر کد کلمه  $C_{BW}^t(n, 4, 2, 2)$  زوج است، وزن ۳ نداریم و به وضوح وزن ۲ هم نداریم، پس مینیم وزن کد  $C_{BW}^t(n, 4, 2, 2)$  برابر ۴ است.

□

گزاره ۸.۲.  $C_{BW}^t(n, 4, 3, 3)$  یک  $\left[ \binom{n}{3}, \binom{n-1}{3}, 4 \right]_2$  کد است.

□

اثبات. مشابه قبل اثبات می‌شود.

## مراجع

1. W.R. Fish and E. Fray and E. Mwambene, *Binary codes and partial permutation decoding sets from the odd graphs*, Eur. j. math. 12(9). 1362-1371, (2014).
2. R. Hill, *A first course in coding theory oxford university*, Press, (1986).
3. J.D. Key, J. Moori and B.G. Rodrigues, *Binary codes from graphs on triples*, Discrete Math. 309(14) 171-182(2004).

پست الکترونیکی: [abolbahmani@yahoo.com](mailto:abolbahmani@yahoo.com)

پست الکترونیکی: [emami@znu.ac.ir](mailto:emami@znu.ac.ir)

## روشی برای جلوگیری از حمله ۵۱٪ در سکه‌بیتی و مدل کردن آن با زنجیره‌ی مارکوف

دکتر سید حمید حاجی سید جوادى\*  
بخش ریاضی، دانشگاه شاهد، تهران، ایران  
و محدثه شفیعی سروسنانی  
دانشکده ریاضی، دانشگاه شاهد، تهران، ایران

چکیده. سکه بیتی<sup>۱</sup> یک ارز رمز شده براساس تکنولوژی زنجیره بلوکی<sup>۲</sup> است. که تراکنش‌ها براساس شبکه همتا به همتا بدون کنترل مرکزی صورت می‌گیرد. سکه بیتی مشکلاتی مانند یک سکه را دوبار خرج کردن رفع می‌کند؛ زیرا وقتی استخراج کننده در فاصله زمانی نزدیک دو بلوک را منتشر می‌کند طبق پروتکل زنجیره بلوکی طولانی ترین زنجیره به عنوان زنجیره اصلی انتخاب می‌شود. یکی از معروف ترین حمله‌ها به زنجیره بلوکی حمله ۵۱٪ است. اگر یک مهاجم که قدرت محاسبه نرخ درهم‌ساز<sup>۳</sup> آن بیش از نصف قدرت محاسبه نرخ درهم‌ساز کل گره‌های شبکه باشد می‌تواند حمله دوبار خرج کردن<sup>۴</sup> انجام دهد. روشی برای جلوگیری از حمله ۵۱٪ ارائه شده است که در این مقاله این روش با استفاده از زنجیره مارکوف زمان پیوسته<sup>۵</sup> مدل شده است؛ که با انتخاب تصادفی گره‌های استخراج کننده و مقایسه کلید عمومی آن‌ها با درهم‌ساز بلوک فعلی انجام می‌شود و در صورت تطابق اجازه استخراج بلوک بعد را می‌دهد. در این روش اگر تعداد گره‌ها برابر یا بزرگتر از دو باشد احتمال آن که مهاجم بلوک بعدی را استخراج کند کمتر از ۵۰٪ است.

واژه‌های کلیدی: سکه‌بیتی، زنجیره بلوکی، استخراج کنندگان، حمله ۵۱٪.  
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: (68computer science) 39B42, 13D45.

## ۱. پیش‌گفتار

در عصر تکنولوژی داده‌ها و اطلاعات بسیار مهم هستند. روزانه انبوهی از اطلاعات در دنیای تکنولوژی تولید می‌شود، که ثبت آن‌ها اهمیت زیادی دارد و تکنولوژی زنجیره بلوکی نقش بزرگی در این راه ایفا می‌کند. این تکنولوژی اولین بار در سال ۲۰۰۹ در یک برنامه نویسی سکه‌بیتی توسط ساتوشی ناکاموتو معرفی شد؛ زیرا اولین نفری بود که مسئله‌ی ژنرال‌های بی‌زانتین را به صورت عملی حل کرد. در مقابل، این باعث شد که حمله‌ی دوبار خرج کردن نیز حل شود، که اجازه می‌دهد یک سکه با یک ارزش دوبار صرف شود [۱]. اطلاعات در فناوری زنجیره بلوکی داخل یک سری بلوک‌هایی قرار می‌گیرد که این بلوک‌ها زنجیره‌وار به هم وصل هستند؛ از این رو این فناوری زنجیره بلوکی نام‌گذاری شد. اما مرکزیت خاصی ندارد و توسط نهاد یا سازمان خاصی کنترل نمی‌شود؛ برای این که تمام گره‌های دیگر بلوک (تراکنشی) جدیدی قبول کنند، یک سکه که تولید آن سخت اما تأیید آن آسان است باید ارائه شود. فرآیند به‌دست آوردن این سکه اثبات کار<sup>۶</sup> (POW) گفته می‌شود. سکه بیتی از درهم‌ساز<sup>۷</sup>  $SHA-256$  به همراه یک عدد تصادفی<sup>۸</sup> استفاده می‌کند که چنین طرحی را ارائه کند. اگر استخراج کننده<sup>۹</sup> بتواند این نوع درهم‌ساز را پیدا کند، باید راه‌حل خود را منتشر کرده و در مقابل سکه بیتی به عنوان پاداش دریافت می‌کند. درهم‌ساز تولید شده نه تنها از تراکنش‌ها محافظت می‌کند، بلکه همچنین درهم‌ساز بلوک قبل را نیز پوشش می‌دهد. بنابراین زنجیره بلوکی تشکیل می‌شود [۲]. مهاجمی که قدرت محاسبه نرخ درهم‌ساز آن بیش از نصف قدرت محاسبه نرخ درهم‌ساز کل گره‌های شبکه باشد می‌تواند حمله دوبار خرج کردن انجام دهد. برای جلوگیری از حمله ۵۱٪ که منجر به حمله دوبار خرج کردن می‌شود، روشی ارائه شده است؛ که در این مقاله با استفاده از زنجیره مارکوف زمان پیوسته مدل شده است. در این روش اگر تعداد گره‌هایی که به طور تصادفی برای استخراج سکه بیتی انتخاب شده اند برابر یا بزرگتر از دو باشد احتمال استخراج بلوک بعدی توسط مهاجم کمتر از ۵۰٪ می‌باشد.

## ۲. حمله ۵۱٪

یکی از معروف‌ترین حمله‌ها در زنجیره بلوکی حمله ۵۱٪ است. یک گروه از استخراج کنندگان که قدرت محاسبه‌ی آن‌ها بیش از ۵۰٪ افراد شبکه می‌باشد توانایی حمله به شبکه را دارند. در این حمله مهاجم قدرت جلوگیری از تراکنش‌های به‌وجود آمده را دارد. و بین گیرنده و فرستنده وقفه ایجاد می‌کند. مهاجم می‌تواند POW را سریع‌تر از استخراج کنندگان درست‌کار انجام دهد. در نتیجه طبق

\* Miner 9

Nonce 8

Hash 7

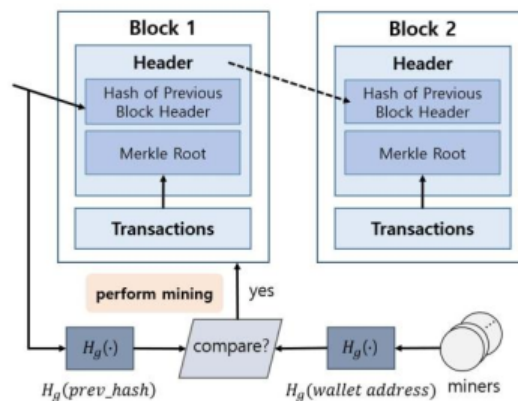
Proof of work 6

سخنران

پروتکل زنجیره بلوکی تراکنش‌ها به طولانی‌ترین زنجیر متصل می‌شود. این حمله همچنین می‌تواند تراکنش‌ها را معکوس کند؛ و یک سکه را چندین بار خرج کند [۳].

### ۳. انتخاب تصادفی گروه‌های استخراج کننده

استخراج کنندگان را به گروه‌هایی تقسیم می‌کند و استخراج کنندگانی که در گروه‌های مشخص شده هستند مجاز به استخراج هستند. (شکل ۱) انتخاب استخراج گروه‌های تصادفی را نشان می‌دهد. هنگامی که یک بلوک تولید شد در مقدار درهم‌ساز آن که با  $H_g(\circ)$  نشان داده شده است گروه‌های استخراج کنندگان مشخص شده اند، وقتی که یک بلوک در کل شبکه منتشر می‌شود سایر گروه‌ها می‌توانند بررسی کنند و بین آدرس کلید عمومی سازنده بلوک بعد با درهم‌ساز بلوک فعلی مقایسه انجام دهند. در صورت تطابق مجوز ساخت بلوک بعد صادر می‌شود [۴].



شکل ۱. نمایش کلی از انتخاب تصادفی گروه‌های استخراج

۱.۳. راهکار مقابله با حمله. در این روش با مقایسه درهم‌ساز بلوک فعلی با کلید عمومی سازنده بلوک بعد، در صورت تطابق اجازه استخراج بلوک بعد به آن را می‌دهند؛ زیرا در درهم‌ساز بلوک فعلی افرادی که استخراج کننده هستند و توسط شبکه قابل شناسایی هستند، مشخص شده اند. پس اگر استخراج کننده بخواهد دوبار یک سکه را خرج کند در مقایسه با کلید عمومی مطابقت ندارد. و حمله دوبار خرج کردن شکست می‌خورد؛ همچنین از حمله ۵۱٪ جلوگیری می‌شود. با توجه به انتخاب تصادفی تعداد استخراج کنندگان از مخزن‌ها مجوز استخراج بیش از ۵۰٪ از شبکه را به استخراج کنندگان نمی‌دهد.

۲.۳. تحلیل عملکرد.  $Q_z$  احتمال به دست آوردن زنجیره بلوکی توسط مهاجم در عبارت (۳-۱) نشان داده شده است:

$$Q_z = \begin{cases} 1 & \text{if } q \geq p \\ \left(\frac{p}{q}\right)^z & O.W \end{cases} \quad (1-3)$$

$q$  احتمال یافتن بلوک توسط مهاجم می‌باشد. معادله  $p + q = 1$  نشان می‌دهد اگر قدرت مهاجم از استخراج کنندگان باصداقت بیشتر باشد حمله به شبکه موفقیت آمیز خواهد بود، در غیراین صورت با شکست مواجه می‌شود.  $q$  نسبت قدرت درهم‌ساز مهاجم ( $h$ ) به کل قدرت درهم‌ساز شبکه ( $H$ ) از همه گره‌ها ( $N$  گره) است احتمال یافتن بلوک بعد توسط گره‌های مهاجم برابر است با:

$$q = \frac{h}{H}$$

طبق فرضیات مذکور همه گروه‌ها به طور میانگین تعداد اعضای یکسانی دارند. اگر  $m$  گروه داشته باشیم  $q'$  در (۳-۲) تعریف می‌شود:

$$q' = \frac{1}{m} \frac{h}{h + \left(\frac{N}{m-1}\right) \left(\frac{H-h}{N-1}\right)} \quad (2-3)$$



برای  $N$  های بزرگ  $q'$  در (۳-۳) تعریف می‌شود:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} q' = \frac{q}{(m-1)(q-1)} \quad (3-3)$$

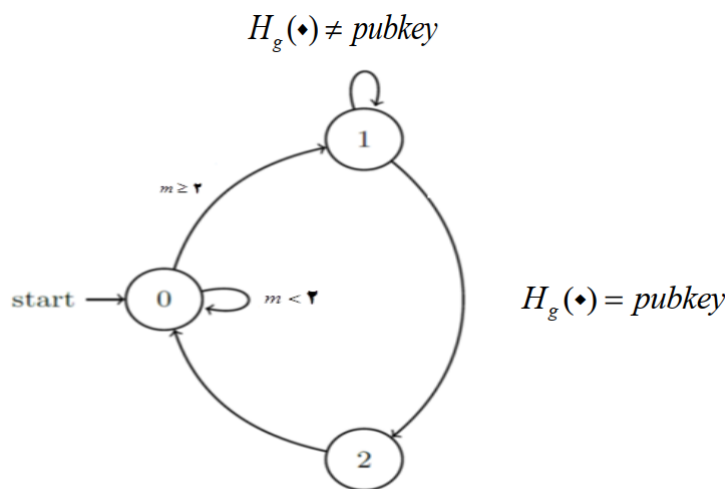
معادله (۳-۳) نشان می‌دهد که اگر حداقل دو گروه برای  $m \geq 2$  وجود داشته باشد،  $q'$  نمی‌تواند بیش از ۵۰٪ باشد؛ برای  $m < 2$  مبنی بر عدم وجود گروه بندی استخراج کنندگان است [۴].

#### ۴. زنجیره مارکوف زمان پیوسته

زنجیره مارکوف زمان پیوسته حالت خاصی از فرآیند مارکوف است، پارامتر زمان پیوسته و فضای حالت گسسته است در زنجیره مارکوف با فضای گسسته فقط در انتهای هر مرحله وضعیت سیستم قابل مشاهده است در زنجیره مارکوف با فضای حالت پیوسته چنین چیزی وجود ندارد، وضعیت سیستم در هر لحظه می‌تواند تغییر کند. چون در زنجیره بلوکی تراکنش هر یک از استخراج کنندگان احتمالی است می‌توان آن‌ها را به صورت زنجیره‌های مارکوف زمان پیوسته نشان داد. زنجیره مارکوف زمان گسسته، یک مدل ریاضی است از وضعیت‌هایی که در سیستم می‌تواند وجود داشته باشد. سیستم در صورتی می‌تواند از یک وضعیت به وضعیت دیگر تغییر حالت دهد که تراکنشی وجود داشته باشد. همچنین سیستم می‌تواند از یک وضعیت به چند وضعیت دیگر تغییر حالت دهد، که هر کدام دارای احتمال خاصی هستند و رفتار آن ممکن است به رفتار قبلی مدل وابستگی نداشته باشد، که ویژگی مارکوف نامیده می‌شود. زنجیره مارکوف زمان پیوسته به سیستم اجازه می‌دهد زمانی را در یک وضعیت سپری کنند، همچنین در سیستم زنجیره بلوکی برای هر تراکنش، مقدار زمان خاصی داده می‌شود و رفتار آن به رفتارهای پیشین وابستگی ندارد [۵].

#### ۵. انتخاب تصادفی گروه‌های استخراج با مدل زنجیره‌ی مارکوف

همان طور که در بخش (۳) بیان شده است، استخراج کنندگان را به گروه‌هایی مشخص تقسیم بندی می‌کنیم و فقط استخراج کنندگانیهایی که به طور تصادفی مشخص شده‌اند و کلید عمومی آن‌ها با درهم‌ساز بلوک فعلی مطابقت دارد مجاز به استخراج بلوک بعد هستند؛ این روش از حمله ۵۱٪ و در نهایت حمله دوبار خرج کردن جلوگیری می‌کند. این گروه‌های استخراج طبق فرمول (۳-۳) حداقل باید دو گروه باشند و این اعضا به طور تصادفی انتخاب می‌شوند. همان طور که در بخش (۴) بیان شده است، زنجیره مارکوف مدلی تصادفی برای توصیف یک توالی از رویدادهای احتمالی است. زنجیره مارکوف اغلب توسط دنباله‌ای از گراف‌های جهت‌دار نشان داده می‌شود، که در آن یال‌های گراف با احتمال رفتن از یک حالت در زمان  $n$  به حالت‌های دیگر در زمان  $n+1$  درج می‌شود. در شکل (۲) نمودار زنجیره مارکوف برای انتخاب تصادفی گروه‌های استخراج کننده با سه حالت نشان داده شده است. اگر تعداد گروه‌های انتخاب شده بزرگ‌تر مساوی ۲ باشد ( $m \geq 2$ ) به وضعیت ۱ وارد می‌شود، در اینجا درهم‌ساز بلوک فعلی با کلید عمومی استخراج کننده‌ی متقاضی بلوک بعدی مقایسه می‌شود و در صورت تطابق به وضعیت ۲ می‌رود در این حالت بلوک بعدی تولید می‌شود. بنابراین این زنجیره دوباره تکرار می‌شود و به وضعیت ۰ می‌رود.



شکل ۲. انتخاب تصادفی گروه‌های استخراج کننده با مدل زنجیره مارکوف

#### ۶. نتیجه گیری

در حمله ۵۱٪ مهاجم بیش از نصف قدرت استخراج سکه بیتی در شبکه را برعهده می‌گیرد. با این اختیار، دوبار خرج کردن یک سکه بیتی و معکوس کردن تراکنش‌ها امکان پذیر است. یکی از روش‌های ارائه شده برای مقابله با این حمله، انتخاب تصادفی گروه‌های استخراج کننده است که از استخراج بیش از ۵۰٪ از شبکه توسط مهاجم جلوگیری شده است؛ و این روش با استفاده از زنجیره مارکوف زمان پیوسته مدل شده است. راهبردهای صورت گرفته برای جلوگیری از حمله ۵۱٪ به صورت بالقوه است؛ زیرا حملات ۵۱٪ بسیار دشوار و تقریباً غیرممکن است. روش‌های ارائه شده برای مقابله با حمله‌های احتمالی در سیستم سکه‌بیتی است؛ زیرا با گسترش روز افزون قدرت پردازش توانایی استخراج از شبکه بیشتر می‌شود؛ و امکان بروز حمله‌ها به مخزن‌ها در زنجیره بلوکی افزایش می‌یابد.

#### سپاس‌گزاری

با سپاس فراوان از استادان دلسوز و دوستان گرامی که بدون همراهی آن‌ها انجام این پروژه برایم میسر نبود.

#### مراجع

1. Nakamoto, Satoshi. "Bitcoin: A peer-to-peer electronic cash system." (2008).
2. Conti, Mauro, et al. "A survey on security and privacy issues of bitcoin." IEEE Communications Surveys and Tutorials 20.4 (2018): 3416-3452.
3. Ye, Congcong, et al. "Analysis of Security in Blockchain: Case Study in 51%-Attack Detecting." 2018 5th International Conference on Dependable Systems and Their Applications (DSA). IEEE, 2018.
4. Bae, Jaewon, and Hyuk Lim. "Random Mining Group Selection to Prevent 51% Attacks on Bitcoin." 2018 48th Annual IEEE/IFIP International Conference on Dependable Systems and Networks Workshops (DSN-W). IEEE, 2018.
5. Bastiaan, Martijn. "Preventing the 51%-attack: a stochastic analysis of two phase proof of work in bitcoin." Available at <http://referaat.cs.utwente.nl/conference/22/paper/7473/preventingthe-51-attack-stochastic-analysis-of-two-phase-proof-of-work-in-bitcoin.pdf>. 2015.

پست الکترونیکی: [h.s.javadi@shahed.ac.ir](mailto:h.s.javadi@shahed.ac.ir)  
پست الکترونیکی: [m.shafiee.srv@gmail.com](mailto:m.shafiee.srv@gmail.com)

## مدل رگرسیون آمیخته براساس توزیع چوله-لاپلاس-نرمال

سید روح الله روزگار\*

بخش ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه یاسوج، یاسوج، ایران

و الهام عبدالمی اصل

بخش ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه یاسوج، یاسوج، ایران

چکیده. در این مقاله ما مدل رگرسیون آمیخته براساس توزیع چوله-لاپلاس-نرمال (SLN) را مورد تجزیه و تحلیل قرار داده و برآوردهای ماکزیمم درستنمایی پارامترها را با استفاده از الگوریتم بیشینه امید ریاضی (EM) ارائه می کنیم. عملکرد مدل آمیخته پیشنهاد شده توسط یک مطالعه شبیه سازی و نمونه واقعی نشان داده شده است.   
واژه های کلیدی: الگوریتم EM، مدل های رگرسیون آمیخته، مدل های رگرسیون آمیخته چوله-لاپلاس-نرمال.   
طبقه بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 62J05, 60E05.

### ۱. مقدمه

مدل های آمیخته براساس ترکیبی محدب از تعداد متناهی از چگالی هاست. از این مدل ها برای مدل سازی داده های ناهمگن استفاده می شود که به طور گسترده ای در زمینه هایی نظیر طبقه بندی، تجزیه و تحلیل خوشه ها و کلاس های پنهان و داده کاوی مورد استفاده قرار می گیرند. به طور کلی فرض می شود که اجزای مدل های آمیخته به دلیل کاربرد وسیع و راحتی محاسبات، از توزیع نرمال پیروی می کنند. با این حال در برخی کاربردها، مولفه چگالی ها ممکن است شامل مشاهدات نامتقارن یا رفتار دم سنگینی نسبت به توزیع نرمال باشند. در این رابطه زمانی که نمودار توزیع داده ها حالت تقارن ندارد، لین و همکاران [۵] از مدل های آمیخته براساس توزیع چوله-نرمال (SN) که اولین بار توسط آزالینی [۱] ارائه شد، استفاده کردند و پس از آن باسو و همکاران [۲] مدل های آمیخته توانمند براساس آمیخته ای از توزیع چوله-لاپلاس-تی (STN) را برای مدل داده های دم سنگین با درجه زیاد از نامتقارنی پیشنهاد کردند. توزیع چوله-لاپلاس-نرمال برای اولین بار توسط گومز و همکاران [۴] معرفی شد و حالت خاصی از توزیع توانی نمایی است که دارای دامنه وسیع تر باند چولگی و همچنین کاربرد بیشتری نسبت به توزیع SN می باشد. یک کاربرد از توزیع های آمیخته، استفاده در مدل رگرسیون آمیخته است. این مدل ها برای بررسی رابطه بین متغیرهایی که از گروه های ناشناخته می آیند و همچنین برای مدل سازی مجموعه داده های ناهمگن مورد استفاده قرار می گیرند و در زمینه هایی مانند مهندسی، ژنتیک، زیست شناسی، اقتصادسنجی و بازاریابی به طور گسترده ای کاربرد دارند. ما در این مقاله مدل های رگرسیون آمیخته براساس توزیع SLN که می تواند جایگزین مناسبی برای مدل های رگرسیون آمیخته براساس توزیع های نرمال و SN در مدل سازی داده های ناهمگن می باشد را معرفی کرده و سپس با استفاده از الگوریتم EM برآوردهای پارامترهای مدل ارائه می دهیم. در پایان از یک مطالعه شبیه سازی و مجموعه داده های واقعی برای نشان دادن عملکرد مدل رگرسیون آمیخته پیشنهاد شده، استفاده می کنیم.

### ۲. مدل های رگرسیون آمیخته براساس توزیع چوله-لاپلاس-نرمال

مدل های رگرسیون آمیخته به طور کلی به صورت زیر تعریف می گردند.

تعریف ۱.۲. فرض کنید که  $Z$  یک متغیر کلاس بندی پنهان باشد بطوری که به ازای  $Z = i$ ، متغیر پاسخ  $Y$  از طریق رابطه خطی زیر به متغیر توضیحی  $p$  بعدی  $X$  وابسته گردد

$$(1) \quad Y = X^T \beta_i + \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, g$$

که در اینجا  $g$  تعداد گروه ها،  $\beta_1, \dots, \beta_g$  ضرایب مدل رگرسیونی و  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_g$  خطاهای مدل و مستقل از  $X$  می باشند. همچنین در این مدل فرض شده است که برای  $i = 1, \dots, g$ ،  $w_i = P(Z = i | X)$ ، نسبت های آمیخته رامشخص کند به طوریکه  $\sum_{i=1}^g w_i = 1$  و  $Z$  نیز مستقل از  $X$  می باشد.   
باتوجه به تعریف بالایی توان چگالی شرطی  $Y$  به شرط  $X$ ، بدون مشاهده کردن  $Z$  رابصورت زیر فرمول بندی نمود:

$$(2) \quad f(y; \Theta) = \sum_{i=1}^g w_i f_i(y; (X^T \beta_i, \theta_i))$$

در این مدل  $f_i(\cdot; \cdot)$  تابع چگالی توزیع مربوط به توزیع خطاها و  $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_g, \beta_1, \dots, \beta_g, w_1, \dots, w_g)$  بردار پارامترهای مجهول می باشند.

۱.۲. مدل رگرسیون آمیخته براساس توزیع چوله-لاپلاس-نرمال.

تعریف ۲.۲. گوییم متغیر  $X$  دارای توزیع چوله-لاپلاس-نرمال با پارامترهای  $\theta = (\xi, \sigma, \lambda)$  است و با نماد  $X \sim SLN(\xi, \sigma^2, \lambda)$  نمایش می دهیم، هرگاه تابع چگالی آن به فرم زیر باشد:

$$(۳) \quad f_{SLN}(x) = \frac{1}{\sigma} e^{-|\frac{x-\xi}{\sigma}|} \phi(\lambda \frac{|x-\xi|}{\sigma})$$

بطوریکه  $\phi(\cdot)$  تابع چگالی توزیع نرمال استاندارد است. این توزیع تعمیمی از توزیع لاپلاس است بطوریکه اگر  $\lambda = 0$  شود توزیع ما منتهی به توزیع لاپلاس خواهد شد.

باتوجه به [۲] یک نمایش تصادفی از توزیع چوله-لاپلاس-نرمال به فرم زیر خواهد بود:

$$(۴) \quad Y = \mathbf{X}^T \beta + \sigma \left( \frac{\lambda |Z_1|}{\sqrt{V^2(V^2 + \lambda^2)}} + \frac{Z_2}{\sqrt{V^2 + \lambda^2}} \right); \quad Z_1, Z_2 \sim N(0, 1), \gamma = \sqrt{V^{-2}(V + \lambda^2)} |Z_1|,$$

$$f_V(v) = v^{-3} \exp(-(v^2)^{-1}), \quad v > 0.$$

حال اگر در رابطه ۱  $\epsilon_i$  از توزیع چوله-لاپلاس-نرمال با پارامترهای  $(0, \sigma_i^2, \lambda_i)$  پیروی کند در این صورت گوییم مدل ما یک مدل رگرسیون آمیخته براساس توزیع چوله-لاپلاس-نرمال است. هدف اصلی در این مقاله برازش این مدل رگرسیونی آمیخته انعطاف پذیر به داده ها و برآورد پارامترهای آن از روش ماکزیمم درستنمایی می باشد.

۲.۲. برآورد ماکزیمم درستنمایی پارامترهای مدل رگرسیون آمیخته چوله-لاپلاس-نرمال. برآورد ماکزیمم درستنمایی از  $\Theta$  با ماکزیمم کردن لگاریتم درستنمایی تابع زیر بدست می آید:

$$(۵) \quad l(\Theta) = \sum_{j=1}^n \log \left( \sum_{i=1}^g w_i f_{SLN}(y_j; \xi_i, \sigma_i^2, \lambda_i) \right)$$

اما از آنجا که ماکزیمم کردن این تابع راه حل صریحی ندارد ما از الگوریتم EM برای برآورد پارامترها استفاده می کنیم.

۳.۲. برآورد پارامترهای مدل با استفاده از الگوریتم EM: ابتدا نمایش سلسه مراتبی زیر را با استفاده از نمایش تصادفی ۴ به صورت زیر نشان می دهیم و  $Z_{ij}$  را به صورت زیر تعریف کنید

$$(۶) \quad Z_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر } Y_j \text{ متعلق به گروه } i \text{ ام باشد} \\ 0 & \text{اگر } Y_j \text{ متعلق به گروه } i \text{ نباشد} \end{cases}$$

به طوری که  $Z_j \sim M(1; w_1, \dots, w_g)$  بنابراین:

$$(۷) \quad Y_j | \gamma_j, v_j, Z_{ij} = 1 \sim N\left(\xi_i + \frac{\sigma_i \lambda_i \gamma_j}{v_j^2 + \lambda_i^2}, \frac{\sigma_i^2}{v_j^2 + \lambda_i^2}\right)$$

$$(۸) \quad \gamma_j | v_j, Z_{ij} = 1 \sim TN\left(0 + \frac{v_j^2 + \lambda_i^2}{v_j^2}; (0, \infty)\right)$$

$$(۹) \quad v_j | Z_{ij} = 1 \sim f(v_j) = v_j^{-3} \exp\{-(v_j^2)^{-1}\}$$

وقتی  $TN(\cdot, (a, b))$  توزیع نرمال استاندارد بریده شده در بازه  $(a, b)$  و  $M(\cdot; w_1, \dots, w_g)$  نشان دهنده توزیع چندگانه با احتمالات  $w_1, \dots, w_g$  است. اگر  $V$  و  $\gamma$  متغیرهای کمکی و  $(Y, \gamma, V, Z)$  داده های کامل باشند، تابع لگاریتم درستنمایی نمایش سلسله مراتبی بالا را به صورت زیر خواهد بود:

$$(۱۰) \quad l_c(\Theta) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^g Z_{ij} \left\{ \log w_i - \log \pi - \frac{1}{4} \log \sigma_i^2 - (v_j^2)^{-1} - \frac{1}{4} \left( V_j^2 \frac{(y_j - \xi_i)^2}{\sigma_i^2} + \gamma_j^2 - 2\eta_i(y_j - \xi_i)\gamma_j + \eta_i^2(y_j - \xi_i)^2 \right) \right\}$$

جایی که  $\eta_i = \frac{\lambda_i}{\sigma_i}$  می باشد. در نتیجه تابع  $Q(\Theta, \Theta^{(k)})$  بصورت زیر بدست می آید.

(۱۱)

$$Q(\Theta, \Theta^{(k)}) = E(l_c(\Theta; \mathbf{Y}, \gamma, \mathbf{V}, \mathbf{Z}) | \mathbf{Y}) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^g E(Z_{ij} | Y_j) \{ \log w_i - \log \pi - \frac{1}{\gamma} \log \sigma_i^2 - \gamma E(\log V_j | Y_j) - E((\gamma V_j)^{-1} | Y_j) - \frac{1}{\gamma} (E(\log V_j | Y_j) \frac{(y_j - \xi_i)^2}{\sigma_i^2} - \frac{1}{\gamma} E(\gamma_j^2 | Y_j) - \gamma \eta_i (y_j - \xi_i) E(\gamma_j | Y_j) + \eta_i^2 (y_j - \xi_i)^2) \}$$

که مقادیر امیدهای شرطی مورد نیاز برای ادامه برآوردها به صورت زیر می باشد:

(۱۲)

$$\hat{z}_{ij}^{(k)} = E(Z_{ij} | Y_j, \hat{\Theta}^{(k)}) = \frac{\hat{w}_i^{(k)} f_i(y_j; \hat{\xi}_i^{(k)}, \hat{\sigma}_i^{2(k)}, \hat{\lambda}_i^{(k)})}{f(y_j; \hat{\Theta}^{(k)})}$$

(۱۳)

$$\hat{v}_{ij}^{(k)} = E(V_{ij} | Y_j, \hat{\Theta}^{(k)}) = \frac{1}{\hat{u}_{ij}^{(k)}}$$

(۱۴)

$$\hat{\gamma}_{ij}^{(k)} = E(\gamma_{ij} | Y_j, \hat{\Theta}^{(k)}) = \hat{\lambda}_i^{(k)} \hat{u}_{ij}^{(k)} + \frac{\phi(\hat{\lambda}_i^{(k)} \hat{u}_{ij}^{(k)})}{\Phi(\hat{\lambda}_i^{(k)} \hat{u}_{ij}^{(k)})}$$

که در این روابط  $\hat{u}_{ij}^{(k)} = \frac{y_j - \hat{\xi}_i^{(k)}}{\hat{\sigma}_i^{(k)}}$  می باشد. سپس مراحل زیر را انجام می دهیم:

۱. قرار می دهیم  $\Theta = \hat{\Theta}^{(k)}$  و با استفاده از روابط بالا،  $\hat{z}_{ij}^{(k)}$ ،  $\hat{v}_{ij}^{(k)}$ ،  $\hat{\gamma}_{ij}^{(k)}$  را به عنوان مقادیر اولیه در مرحله k ام محاسبه می کنیم.

۲. مرحله پیشینه سازی: برآورد مرحله جدید  $\hat{\Theta}^{(k+1)}$  را با ماکزیم سازی تابع  $Q(\Theta, \Theta^{(k)})$  نسبت به  $\Theta$  بدست می آوریم که در نهایت به جواب های زیر خواهیم رسید:

$$(۱۵) \quad \hat{w}_i^{(k+1)} = \frac{\sum_{j=1}^n \hat{Z}_{ij}^{(k)}}{n}$$

$$(۱۶) \quad \hat{\beta}_i^{(k+1)} = (\sum_{j=1}^n \hat{Z}_{ij}^{(k)} (\hat{v}_{ij}^{(k)} + \hat{\lambda}_{ij}^{(k)}) x_j x_j')^{-1} (\sum_{j=1}^n \hat{Z}_{ij}^{(k)} ((\hat{v}_{ij}^{(k)} + \hat{\lambda}_{ij}^{(k)}) y_j - \hat{\sigma}_i^{(k)} \hat{\lambda}_{ij}^{(k)} \hat{\gamma}_{ij}^{(k)}) x_j)$$

$$(۱۷) \quad \hat{\sigma}_i^{2(k+1)} = \frac{\sum_{j=1}^n \hat{Z}_{ij}^{(k)} \hat{v}_{ij}^{(k)} (y_j - x_j' \hat{\beta}_i^{(k+1)})^2}{\sum_{j=1}^n \hat{Z}_{ij}^{(k)}}$$

$$(۱۸) \quad \hat{\lambda}_i^{(k+1)} = \frac{\sum_{j=1}^n \hat{Z}_{ij}^{(k)} \hat{v}_{ij}^{(k)} \hat{u}_{ij}^{(k+1)}}{\sum_{j=1}^n \hat{Z}_{ij}^{(k)} \hat{u}_{ij}^{2(k+1)}}$$

۴.۲. شبیه سازی. در این قسمت از یک مطالعه شبیه سازی الگوریتم EM برای برآورد حداکثر درستنمایی مدل آمیخته چوله-لاپلاس-نرمال و مقایسه آن با مدل آمیخته نرمال و چوله-نرمال می پردازیم. در این فرایند مجموعه داده به حجم ۱۰۰۰ از مدل رگرسیونی  $Y_1 = -4 - 3x + \epsilon_1$  و  $Y_2 = 4 + 2x + \epsilon_2$  وقتی که  $\epsilon_1 \sim SLN(0, 1.5, 2)$  و  $\epsilon_2 \sim SLN(0, 1.8, 1)$  برای ۵۰ بار تکرار ایجاد کرده و در هر بار برآورد پارامترهای مدل را براساس الگوریتم EM محاسبه کرده ایم. در نهایت میزان اریبی (BIAS) و میانگین مربع خطا (MSE) در برآورد پارامترها با استفاده از این ۵۰ تکرار محاسبه شده که نتایج در جدول زیر آمده است. مشاهده می شود که شاخص های اریبی و میانگین مربعات خطای پارامترها در مدل رگرسیونی براساس توزیع SLN بسیار کوچک خواهد بود که نشان دهنده کارایی بالای برآوردها می باشد.

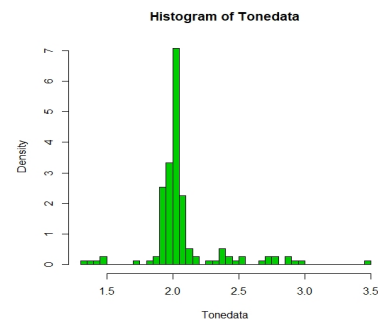
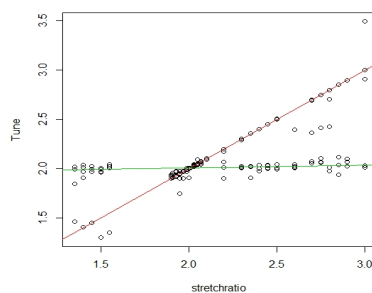
جدول ۱. اریبی (میانگین مربعات خطا) برآورد پارامترها برای  $n = 1000$  و تعداد تکرار=۵۰

w1	$\beta_{01}$	$\beta_{02}$	$\beta_{11}$	$\beta_{12}$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\lambda_1$	$\lambda_2$
-0.007(.001)	-0.006(.008)	-0.009(.002)	-0.009(.001)	.003(.007)	.006(.009)	.005(.008)	.02(.01)	.004(.008)

۵.۲. ارزیابی مدل با استفاده از داده های واقعی **Tonedata**. در این بخش با ارائه ی یک مثال تجربی به بررسی مدل رگرسیونی آمیخته چوله-لاپلاس-نرمال و مقایسه آن با دو مدل دیگر می پردازیم. داده هایی که در این مثال مورد بررسی قرار می گیرند شامل ۱۵۰ نمونه از مجموعه داده های درک موسیقی جمع آوری شده اند که هیستوگرام داده ها را در شکل سمت راست مشاهده می کنید. همانطور که در جدول زیر می بینیم، مدل آمیخته رگرسیونی براساس توزیع SLN بهتر از دو مدل دیگر برازش شده است زیرا دارای مقدار لگاریتم درستنمایی بیشتر و معیار اطلاع آکاییک (AIC) و معیار اطلاع بیزی (BIC) کمتری است. همچنین از روی شکل سمت چپ مشاهده می کنیم که مدل رگرسیونی فوق برازش مناسبی روی داده ها ایجاد کرده است.

جدول ۲. برآورد ها و معیارهای مقایسه مدل ها

	SLN	N	SN
logli	171.3098	106.2549	141.7064
AIC	-324.6197	-264.3968	-265.4128
BIC	-297.5240	-237.3011	-238.3171
w1	.56	.67	0.3
$\beta_{01}$	1.96	1.91	-0.07
$\beta_{02}$	.003	-.01	1.9
$\beta_{11}$	.02	.04	0.97
$\beta_{12}$	.99	.9	0.04
$\sigma_1$	.03	.04	0.15
$\sigma_2$	.04	.1	0.04
$\lambda_1$	-.09	0	0.93
$\lambda_2$	-.12	0	-0.48



## مراجع

1. A. Azzalini, A class of distribution which includes the normal ones, Scan J Stat. (1985), no. 12(2), 171–178.
2. R.M. Basso, V.H. Lachos, C.R.B. Cabral and P. Ghosh, Robust mixture modeling based on scale mixtures of skew-normal distributions, Comput Stat Data Anal. (2010), no. 54(12), 2926–2941.
3. F. Z. Dogru and O. Arslan, Parameter estimation for mixtures of skew Laplace normal distributions and application in mixture regression modeling, COMMUN STAT THEOREM, (1985).
4. H.W. Gómez, O. Venegas and H. Bolfarine, Skew-symmetric distributions generated by the distribution function of the normal distribution, Environmetrics. (2007), no. 18, 395–407.
5. T.I. Lin, J.C. Lee and S.Y. Yen, Finite mixture modelling using the skew normal distribution, STAT SINICA. (2007), no. 17(3), 909–927.

پست الکترونیکی: [roozegar@yu.ac.ir](mailto:roozegar@yu.ac.ir)  
 پست الکترونیکی: [elham\\_abdolahy\\_74@yahoo.com](mailto:elham_abdolahy_74@yahoo.com)

## راهبردهای تدریس مفهوم تشابه در هندسه براساس نظریه ون هیل

حمید رضا کاشفی و مهری ناصحی\*  
گروه آموزش ریاضی، دانشگاه فرهنگیان

چکیده. تشابه یکی از مهم‌ترین مباحث در هندسه است که یادگیری آن منجر به توسعه و افزایش مهارت‌های تفکر و شکل‌گیری شهود هندسی در فراگیران می‌شود. هر چندگاهی نه تنها دانش آموزان بلکه دانشجویان نیز در یادگیری آن دچار بدفهمی می‌شوند. هدف اصلی این مقاله ارائه راهبردهایی براساس سطوح تفکر هندسی ون هیل برای تدریس مفهوم تشابه در راستای پیشگیری و رفع بدفهمی‌های دانشجویان می‌باشد. برای این منظور یک نمونه ۲۷ نفری از دانشجویان رشته ریاضی دانشگاه دولتی شهرضا در نظر گرفته شد و پس از تدریس مفاهیم تشابه در درس مبانی هندسه براساس این راهبردها، پنج سوال مربوط به مفهوم تشابه از آنها پرسیده شد. نتایج بدست آمده نشان دهنده مناسب بودن این راهبردها به منظور جلوگیری از بدفهمی‌ها در یادگیری مفهوم تشابه است. نتایج این تحقیق می‌تواند به عنوان تکمیل‌کننده فصل پنجم کتاب هندسه اقلیدسی و ناقلیدسی نوشته‌ی گرینبرگ باشد که به عنوان منبع و کتاب درسی برای درس مبانی هندسه دوره کارشناسی دبیری ریاضی در نظر گرفته می‌شود.

واژه‌های کلیدی: بدفهمی، تشابه، تفکر هندسی، دانشجویان ریاضی، راهبردهای تدریس، نظریه ون هیل.  
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 97D50, 97D70.

## ۱. مقدمه

هندسه شاخه مهمی از ریاضیات است و مهارت‌های هندسی به عنوان مهارت‌های اصلی ریاضیات شناسایی شده‌اند [۲]. یادگیری هندسه این امکان را برای فراگیران فراهم می‌کند تا ذهن و فکر قوی‌تر و خلاق‌تری داشته باشند و بتوانند با دقت منطقی و قدرت استدلال‌های استنتاجی آن، نظم منطقی موجود در فرآیندهای ریاضی و رسیدن به دقت ریاضی را در خود پرورش دهند [۵]. از این رو تدریس هندسه باید به گونه‌ای باشد که دو هدف اساسی یعنی توسعه مهارت تفکر و شکل‌گیری شهود فضایی را برآورده کند. بسیاری از ریاضی‌دانان و مدرسان ریاضی به دلیل جنبه‌های چندگانه هندسه، شروع آموزش هندسه را از سال‌های کودکی و ادامه‌ی آن را به شکل متناسب در تمام طول دوره تحصیلی ضروری می‌دانند. این آموزش در مدارس اکثر کشورها به تشخیص، بررسی و تحقیق، دسته‌بندی و اندازه‌گیری روابط میان شکل‌ها در فضای دو بعدی یا سه بعدی و استدلال کردن تاکید می‌کند. بنابراین شکل‌های طبیعی و ترسیمی در مرکز توجه معلمان و دانش آموزان قرار دارند [۱]. یکی از مباحثی که رابطه نزدیکی با ترسیم این شکل‌های هندسی دارد تشابه است.

مبحث تشابه یکی از مفاهیم مهم در هندسه هست که دارای کاربردهای زیادی در معماری، صنعت و هنر می‌باشد. این مبحث شامل مفاهیم قضیه اساسی تشابه مثلث‌ها، حالت‌های مختلف تشابه مثلث‌ها، اثبات قضیه فیثاغورث و کاربرد تشابه در مثلث‌ها می‌باشد. این مفاهیم برای دانشجویان و دانش‌آموزان دارای بدفهمی‌هایی مانند تعمیم نابه‌جای قضایای تشابه در مثلث‌ها به چندضلعی‌ها، عدم توانایی در نوشتن درست نسبت‌های تشابه و استفاده نادرست از برهان خلف از علت‌های بدفهمی در یادگیری مفهوم تشابه می‌باشند.

بدفهمی‌ها معمولاً برای بیان موقعیتی به کار می‌روند که در آن عقیده فراگیر از یک مفهوم ممکن است با عقیده کارشناسان آن علم در تقابل باشد. اخیراً در [۴] تحقیقاتی در زمینه طرحواره‌ها که عبارتند از ساختارهای انتزاعی که معرف اطلاعات ذخیره شده در حافظه‌اند، انجام گرفته و شش عامل بدفهمی در ریاضیات مطرح شده‌اند. این عوامل عبارتند از: بازخوانی یک طرحواره نامناسب، مداخله طرحواره پیشین در یادگیری جدید، مداخله یادگیری جدید در طرحواره قبلی، بیش‌تعمیمی، تشابه یک واژه ریاضی با واژه‌هایی در زبان عامیانه و تاثیر ساختارهای شهودی.

در این مقاله تلاش می‌شود راهبردهایی بر اساس نظریه ون هیل برای جلوگیری از ایجاد بدفهمی‌ها در یادگیری مفهوم تشابه بیان شود. این نظریه که توسط دو پژوهشگر به نام‌های ون هیل، گلداف و همسرش پی ون هیل در سال ۱۹۵۹ ابداع شده است در مورد سطوح تفکر هندسی است که در آن فراگیران حرکت خود را از تشخیص صرف تا نوشتن یک اثبات رسمی دقیق هندسی طی می‌کنند. در واقع این نظریه در فرایند یادگیری هندسه به طور عام و در نوشتن اثبات به طور خاص به بیان علت مواجه شدن فراگیران با مشکل می‌پردازد. این مدل شامل دو قسمت سطح تفکر و مراحل آموزشی است که سطوح تفکر آن عبارتند از: سطح یک تشخیص یا دیداری، سطح دو تجزیه و تحلیل، سطح سه استنتاج غیر رسمی یا مرتب سازی، سطح چهار استنتاج رسمی و سطح پنج دقت [۳].

در سطح یک استدلال‌ها تنها مبتنی بر ظاهر و کلیت شکل می‌باشند، در حالی‌که در سطح دو استدلال‌ها مبتنی بر اجزا و ویژگی‌های آن‌ها هستند. در سطح سه مراحل انجام یک اثبات فهمیده شده، اما هنوز نظم منطقی بین گام‌های این اثبات درک نمی‌شود. در سطح چهار هندسه اقلیدسی به خوبی فهمیده می‌شود و اهمیت اصول، استنتاج‌ها و روابط منطقی میان قضایا درک می‌شوند. در سطح پنج هندسه نااقلیدسی درک و سیستم‌های اصل موضوعی متفاوت تجزیه، تحلیل و مقایسه می‌شوند [۳].

## ۲. راهبردهای حل مسائل تشابه

در کتاب هندسه اقلیدسی و نااقلیدسی نوشته‌ی گرینبرگ به طور مستقیم به مبحث تشابه اشاره‌ای نشده است. ولی وجود تمرین‌هایی از این مبحث باعث می‌شود که اساتید به یادآوری این مبحث بپردازند. اما این یادآوری باید به گونه‌ای باشد که پس از آن دانشجویان بتوانند به حل مسائل این مبحث بپردازند. از این رو در این بخش به ارائه راهبردهایی می‌پردازیم که می‌توانند پس از یادآوری قضیه اساسی تشابه و نتایج آن به منظور حل مسائل این مبحث توسط اساتید به کار گرفته شوند. در ارائه این راهبردها به سه مورد توجه شده است. الف: به گونه‌ای باشند که مانع از ایجاد بدفهمی‌های شناخته شده باشند. ب: به درک هندسی دانشجویان کمک کرده و باعث شوند که آنها بتوانند با دید بازتری به حل مسائل تشابه بپردازند. ج: حداقل جوابگوی حل مسائل سطح چهارم نظریه ون هیلی که همان استنتاج رسمی است باشند. این راهبردها به صورت زیر می‌باشند.

۱.۲. تقویت قوای ذهنی دانشجویان. شنارک و زاکیس در پژوهش‌های خود به این نتیجه رسیدند که ساختارهای شهودی فرد می‌تواند عاملی برای ایجاد بدفهمی‌های ریاضی وی گردد. به اعتقاد آن‌ها شهود را می‌توان مانند مزرعه‌ای دانست که طرحواره‌ها در آن رشد و توسعه می‌یابند [۴]. لذا بسیاری از بدفهمی‌ها در اثر توسعه نیافتگی شهود ایجاد می‌شوند. از این رو استفاده از نرم افزارهایی مانند جئوجبرا و ممتیکا در هنگام یادآوری این مبحث می‌تواند در جهت تقویت قوای ذهنی دانشجویان به کار گرفته شوند. برای مثال با استفاده از این نرم افزارها می‌توان شکل‌های هندسی را دوران، جابه‌جا و انتقال داد و آن‌ها را به گونه‌ای در کنار هم قرار داد که اشکال جدیدی با خواص هندسی شناخته شده‌ای حاصل شوند. در نتیجه با استفاده از این ویژگی‌های شناخته شده، مسئله مورد نظر قابل حل خواهد بود.

۲.۲. ایجاد خطوط اضافه در اشکال. پیش‌تعمیمی یا تعمیم نابه‌جا یکی از رایج‌ترین علت‌های بدفهمی ریاضی دانشجویان است [۴]. به عنوان مثال تعمیم نابه‌جا قضایای تشابه در مثلث‌ها به چندضلعی‌ها یکی از این موارد است. به همین دلیل آشنایی دانشجویان با این راهبرد می‌تواند مانع از این بدفهمی شود. در این راهبرد خطوط اضافه به گونه‌ای ایجاد می‌شوند که شکل‌های حاصل به صورت مثلث تبدیل شوند. حال سوال این است که این خط یا خطوط اضافه را در چه قسمتی از شکل باید اضافه کنیم در پاسخ می‌توان گفت که با توجه به فرضیات مسئله این خطوط به گونه‌ای رسم می‌شوند که در مثلث‌های حاصل با استفاده از قضیه تالس بتوانیم نسبت‌های مثلثاتی را بدست آوریم. به عنوان مثال در دوزنقه زیر، اگر  $MN$  موازی دو قاعده باشند، با رسم قطر  $AC$  و استفاده از روابط  $OM \parallel AB$  و  $ON \parallel CD$  می‌توانیم ثابت کنیم که  $\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$ .



۳.۲. عمل ادغام‌سازی. تجسم ضعیف یکی از علت‌های دیگر بدفهمی است [۲]. به همین دلیل بیان این راهبرد به تجسم دقیق یک شکل در داخل شکل دیگر کمک می‌کند. به طور خاص این راهبرد برای ادغام دو مثلث به این دو صورت است یا بر روی ضلع مثلث بزرگتر، اندازه طول ضلع مثلث کوچکتر را مشخص می‌کنیم و یا بر روی زاویه مثلث بزرگتر، اندازه زاویه مثلث کوچکتر را مشخص می‌کنیم. در واقع با این کار مثلث کوچکتر را در مثلث بزرگتر جانشین می‌کنیم. برای مثال در اثبات قضیه دوم تشابه از این راهبرد استفاده می‌شود. در بعضی موارد پس از انجام عمل ادغام‌سازی در مثلث‌ها شکل قضیه اساسی تشابه بدست می‌آید که می‌توان از آن برای حل مسئله مورد نظر استفاده نمود و در بعضی موارد نیز با استفاده از ویژگی شکل‌های حاصل مسئله قابل حل می‌باشد.

۴.۲. عمل تفکیک‌سازی. اولیور [۶] دریافت که در برخی موارد، طرحواره‌های پیشین فراگیران در یادگیری جدید آن‌ها مداخله می‌کند و این امر، باعث بروز بدفهمی‌هایی در یادگیری ریاضی آن‌ها می‌شود [۴]. برای مثال در مبحث تشابه وقتی دانشجویان با شکل‌های هندسی مواجه می‌شوند که خود از مثلث‌هایی تشکیل شده‌اند. به منظور جلوگیری کردن از مداخله آنچه در ذهن خودشان در مورد آن چندضلعی دارند عمل تفکیک‌سازی به منظور دستیابی به مثلث‌ها را انجام می‌دهیم. این عمل به ما کمک می‌کند که با دوران، جابه‌جایی و یا انتقال این مثلث‌ها هنگام نوشتن نسبت‌های تشابه با اشتباه کمتری روبرو شویم. به علاوه این راهبرد را نیز می‌توان در هنگام مواجه شدن با دو مثلث ادغام شده نیز به کار برد. به عنوان مثال در شکل زیر با یک عمل تفکیک‌سازی و استفاده از متناسب بودن اضلاع دو مثلث  $ABD$  و  $BCD$  می‌توانیم با نوشتن نسبت‌های تناسب مقدار  $x$  را بدست آورده و ثابت کنیم که محیط این دوزنقه برابر با  $13a + 5b$  است.



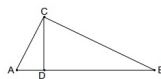


۵.۲. استفاده از برهان خلف. فیشباین و موزیکانت در پژوهش‌های خود منشأ روز بدفهمی‌ها در فراگیران را، بازخوانی یک طرحواره نامناسب دانسته‌اند [۴]. این ویژگی بیان می‌کند که در صورت استفاده از یک نتیجه نادرست انتظار خواهیم داشت که به یک رابطه نادرست برسیم و این همان راهبرد برهان خلف است. از این راهبرد معمولاً برای اثبات قضایای کلی در مبحث تشابه استفاده می‌کنیم. به عنوان مثال برای اثبات اینکه اگر در مثلث  $ABC$ ، نقاط  $E$  و  $F$  روی اضلاع  $AB$  و  $AC$  به طوری انتخاب شوند که  $\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC}$ ، آن‌گاه می‌توان نتیجه گرفت که  $EF \parallel BC$ ، کافی است از برهان خلف  $EF \nparallel BC$  استفاده و مساله را حل کنیم.

### ۳. روش پژوهش

در این پژوهش یک نمونه ۲۷ نفری از دانشجویان کارشناسی ریاضی در دانشگاه دولتی شهرضا که درس مبانی هندسه را اخذ کرده بودند در نظر گرفته شدند. پس از تدریس فصل پنجم از کتاب هندسه اقلیدسی و نااقلیدسی گرینبرگ و یادآوری مبحث تشابه راهبردهای حل مسائل تشابه بر اساس نظریه سطوح تفکر ون هیلی به دانشجویان ارائه شد و برای جمع‌آوری داده ۵ سوال زیر از مبحث تشابه از دانشجویان پرسیده شد.

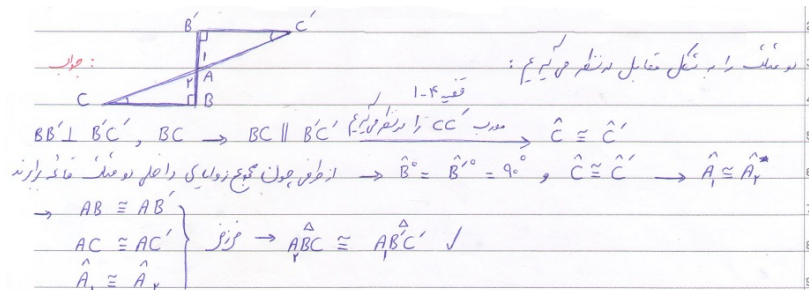
- سوال ۱: دو مثلث قائم الزاویه قابل انطباق هستند هرگاه وتر و یک ضلع به ترتیب با وتر و یک ضلع از دیگری قابل انطباق باشد.
- سوال ۲: فرض کنید مثلث‌های  $ABC$  و  $A'B'C'$  داده شده باشند هرگاه  $AB = A'B'$  و  $BC = B'C'$ ، آنگاه ثابت کنید  $AC < A'C'$  است اگر و تنها اگر  $\hat{B} < \hat{B}'$ .
- سوال ۳: ملاک تشابه ض ض: اگر  $\hat{A} = \hat{A}'$  و  $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$ ، ثابت کنید دو مثلث متشابه اند در واقع  $A'B'C' \sim AEC$ .
- سوال ۴: در شکل زیر  $AB$  بر  $CD$  عمود است و زاویه  $\hat{ACB} = 90^\circ$ . اگر زاویه‌های  $\hat{ACD}$  و  $\hat{B}$  را اندازه بگیرید، در می‌یابید که آن‌ها با هم مساوی هستند. آیا این تساوی برای همه مثلث‌های قائم‌الزاویه درست است؟



سوال ۵: قضیه فیثاغورث را با استفاده از تشابه ثابت کنید.

### ۴. یافته‌های تحقیق

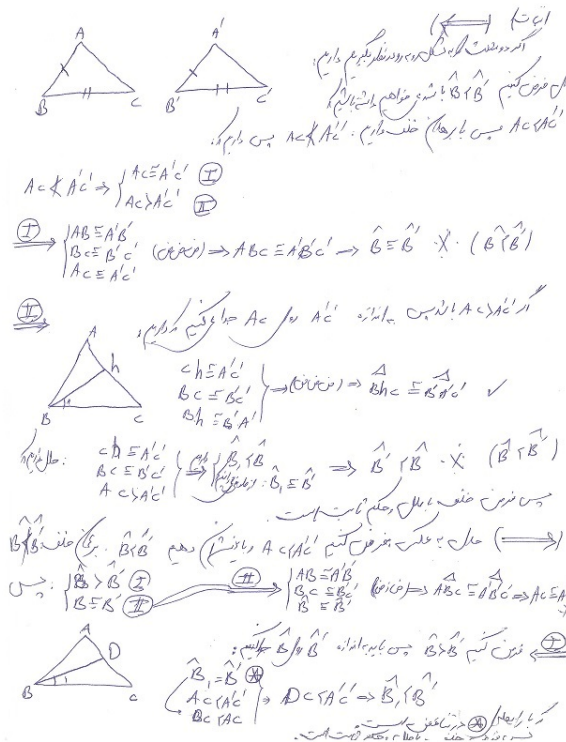
بررسی پاسخ‌های دانشجویان به سوال ۱ نشان داد که ۱۶ نفر (۵۹٪) از دانشجویان جواب درست دادند آنها با توجه به ذهنیتی که در نتیجه به کارگیری راهبرد اول در کلاس برای آنها به وجود آمده بود به تجسم دو مثلث در کنار هم و ایجاد یک مثلث متساوی الساقین پرداختند و سپس با استفاده از ویژگی‌های این مثلث به حل آن پرداختند. شکل ۱ نشان‌دهنده حل یکی از دانشجویانی است که این سوال را به درستی حل نکرده است. این دانشجو با شکل خاصی که در شکل ۱ نشان داده شده است شروع به اثبات کرده است که درست نمی‌باشد.



شکل ۱. یکی از جواب‌های نادرست در مورد سوال ۱

در پاسخ‌گویی به سوال دوم ۲۰ نفر (۷۴٪) از دانشجویان ابتدا با استفاده از راهبرد برهان خلف و سپس با استفاده از راهبرد ادغام‌سازی

مثلتها به این سوال پاسخ درست دادند که حل یکی از آنها در شکل ۲ آورده شده است و ۷ نفر (۲۶٪) نتوانستند این سوال را به درستی حل کنند بعضی از جوابهای نادرست به این علت بود که آنها به محض استفاده از راهبرد ادغام مثلثها بر روی یک شکل خاص از بزرگتر بودن ضلع نتیجه مورد نظر را بدست آورده بودند. در واقع از روی شکل استدلال کرده که این درست نیست. در مورد سوال سوم



شکل ۲. یکی از جوابهای درست در مورد سوال ۲

تعداد ۱۹ نفر (۷۰٪) با استفاده از راهبرد ادغام مثلثها، در مورد سوال چهارم تعداد ۲۱ نفر (۷۷٪) با اعمال راهبرد تفکیکسازی و برهان خلف جواب درست دادند. همچنین در مورد سوالهای پنجم تعداد ۱۵ نفر (۵۵٪) با استفاده از راهبرد ایجاد خطوط اضافه به درستی به سوالها پاسخ دادند.

## ۵. نتایج

تشابه به عنوان یک مبحث مهم در هندسه همواره بحثی چالشی و حتی ممکن است باعث بدفهمی دانشجویان و دانش آموزان شود. در این مقاله راهبردهای تدریس مفهوم تشابه در هندسه بر اساس نظریه سطوح تفکر هندسی ون هیلی برای پیشگیری و رفع بدفهمی در یادگیری آن طراحی شد. نتایج این تحقیق نشان می دهد استفاده از این راهبردها تا حد زیادی از بدفهمیها در یادگیری مفهوم تشابه جلوگیری می کند.

## مراجع

۱. ریحانی، م.، امام جمعه، ب.، صالح صدقیپور و ا. مرادی ویس، ارزیابی دانش معلمان و دانشجویان ریاضی در درس هندسه با استفاده از نظریه ون هیلی، نشریه علمی پژوهشی فناوری آموزش، (۱۳۸۹)، ۵، شماره ۲، ۱۵۳-۱۶۷.
۲. و. عالمیان، م. سیدی و م. حبیبی، شناسایی بدفهمیهای دانش آموزان پایه هشتم در مهارت های هندسی در هندسه و استفاده از نظریه ون هیلی برای ارتقاء و بهبود سطح مهارت های هندسی دانش آموزان، نشریه علمی پژوهش (۱۳۹۷)، شماره ۶۷، ۱۲۳-۱۴۸.
۳. ح. عریضی و م. مهدیان، راهبردهای تدریس در آموزش هندسه، انتشارات جهاد دانشگاهی واحد اصفهان، ۱۳۹۷.
۴. ز. گویا و ع. حسام، طروارهای ذهنی: توجیهگر بدفهمیهای ریاضی دانش آموزان، فصلنامه روانشناسی کاربردی، (۱۳۸۶)، شماره ۲، ۱۷۷-۲۰۰.
۵. ا. مرادی ویس، مطالعه ای جایگاه هندسه ی مدرسه ای در برنامه ی درسی کارشناسی دبیری ریاضی مبتنی بر نظریه ی ون هیلی پایان نامه کارشناسی ارشد در رشته ی آموزش ریاضی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی شهریورماه ۱۳۸۸.

6. A. Olivier, *Handling pupil 's misconceptions*. IN *M. Moodley, R.Njisane and N. Presmeg (Eds)*, Mathematics Education for In-Service and Pre-Service Teachers, (1992), 193-209.

پست الکترونیکی: [hkashefi@cfu.ac.ir](mailto:hkashefi@cfu.ac.ir)  
پست الکترونیکی: [nasehi.mehri@gmail.com](mailto:nasehi.mehri@gmail.com)

## برخی نتایج از توابع شکاف فقر و شدت فقر و کاربردهای آنها

فرانک گودرزی\*  
بخش آمار، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

چکیده. در این مقاله ابتدا دو شاخص فقر، شکاف فقر و شدت فقر، بر اساس درآمدهای باقیمانده معکوس معرفی می‌شوند. سپس رابطه میان این شاخص‌ها با یک شاخص نابرابری اقتصادی بیان می‌شود. علاوه بر این توزیع‌های نمایی، پارتو نوع دو و توزیع دامنه متناهی بر اساس این شاخص‌ها مشخص‌سازی می‌شوند.  
واژه‌های کلیدی: میانگین زمان غیر فعال بودن، واریانس زمان غیر فعال بودن، شکاف فقر، شدت فقر.  
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 60E15.

### ۱. پیش‌گفتار

گاهی پیش بینی اینکه یک پیشامد چه زمانی در قبل اتفاق افتاده نیز ممکن است حائز اهمیت باشد. به عنوان مثال برای یک موجود زنده با طول عمر  $X$ ، متغیر تصادفی شرطی  $X(t) = (t - X | X \leq t)$  نشان می‌دهد، با فرض اینکه بدانیم این موجود زنده تا قبل از زمان  $t$  مرده است در لحظه  $t$  چه مدت از زمان مرگ او گذشته است. یاد آور می‌شود که رویز و ناوارو [۷] زمان غیرفعال بودن (IT) را به صورت متغیر تصادفی  $X(t) = (t - X | X \leq t)$  تعریف کردند. این متغیر در حقیقت زمان سپری شده از شکست یک مؤلفه را به شرط آنکه طول عمر آن کمتر یا مساوی با  $t$  باشد، نشان می‌دهد. چون در شرایط معمول، بازرسی مداوم سیستم‌ها امکان پذیر نمی‌باشد و گاه در فاصله زمانی بین بازرسی‌ها، مؤلفه یا سیستم از کار می‌افتد، بنابراین اطلاع از متوسط زمان سپری شده از لحظه خرابی اهمیت خواهد یافت.  
در سالهای اخیر زمان غیر فعال بودن مورد انتظار (EIT)،

$$(1) \quad m(t) = E[t - X | X \leq t] = \frac{1}{F(t)} \int_0^t F(x) dx,$$

توسط بسیاری از محققین مورد توجه قرار گرفته است. چندرا و روی [۱] بر اساس EIT به مشخص‌سازی توزیع‌های طول عمر پرداختند. همچنین کوندو و ناندا [۲]، تابع  $m(t)$  را برای مشخص‌سازی کامل چندین توزیع در نظر گرفتند. گلیفروشان و اسدی [۲] کاربرد EIT را برای تعیین قابلیت اعتماد یک سیستم در مجموعه داده‌های طول عمر گسسته مورد بحث قرار دادند.  
علاوه بر میانگین، واریانس زمان غیر فعال بودن نیز از اهمیت ویژه‌ای در نزد برخی از محققین برخوردار است، که از جمله آنها می‌توان به ناندا و همکاران [۶]، کوندو و ناندا [۳] و مهدی [۴، ۵] اشاره کرد.  
ناندا و همکاران [۶] واریانس زمان غیر فعال بودن را به صورت

$$(2) \quad \sigma_F^2(t) = Var(t - X | X \leq t) = m_2(t) - m^2(t),$$

تعریف کردند که در آن  $m_2(t) = E[(t - X)^2 | X \leq t]$ .  
یکی از کاربردهای اصلی متغیر تصادفی  $X(t)$  این است که می‌توان آن را در تحلیل درآمد برای یافتن برخی شاخص‌های فقر بکار برد. اندازه‌های فقر در حالت کلی نوعی اندازه نابرابری هستند که توجه را به دهکهای پایینی توزیع درآمد محدود می‌سازند. از جمله این شاخص‌ها می‌توان به شاخص شکاف فقر و شدت فقر اشاره نمود.  
فرض کنید متغیر تصادفی  $X$  نشان دهنده درآمد یک فرد با تابع توزیع مطلقاً پیوسته  $F$  و تابع چگالی  $f$  باشد. توزیع درآمد در میان فقرا برای یک خط فقر  $w$ ، توزیع درآمد از راست بریده شده در  $w$  است. با استفاده از (۱) و (۲) توابع شکاف فقر  $\beta(w)$  و شدت فقر  $\rho(w)$  به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$(3) \quad \beta_X(w) = \frac{E(w - X | X \leq w)}{w} = 1 - \frac{\psi(w)}{w},$$

$$\begin{aligned}
 \rho_X(w) &= E \left[ \left( \frac{w-X}{w} \right)^2 \mid X \leq w \right] \\
 &= 1 + \frac{1}{w^2 F(w)} \int_0^w x^2 f(x) dx - \frac{2}{w F(w)} \int_0^w x dF(x) \\
 &= 1 + \frac{1}{w^2 F(w)} \int_0^w x^2 f(x) dx - \frac{2\psi(w)}{w} \\
 &= 1 + \frac{1}{w^2 F(w)} \left\{ w^2 F(w) - 2 \int_0^w x F(x) dx \right\} - \frac{2\psi(w)}{w} \\
 &= 2 - \frac{2}{w^2 F(w)} \int_0^w x F(x) dx - \frac{2\psi(w)}{w} \\
 &= 2 \left( 1 - \frac{\psi(w)}{w} \right) - \frac{2}{w} \varpi(w) \\
 &= \frac{2}{w} [w\beta(w) - \varpi(w)], \quad w \in R^+,
 \end{aligned}$$

که در آن  $\psi(w) = \int_0^w x dF(x)/F(w)$  و  $\varpi(w) = \int_0^w x F(x) dx / w F(w)$ . حال توجه کنید که  $\psi(w) \leq w$  برای  $w > 0$ .

## ۲. نتایج اصلی

برای مقایسه شاخص شکاف فقر در میان دو گروه از مردم فقیر، فرض کنید  $X$  و  $Y$  دو متغیر تصادفی مطلقاً پیوسته نامنفی (درآمد های فردی دو گروه فقیر) با توابع توزیع  $F$  و  $G$  و توابع شکاف فقر به ترتیب  $\beta_X(w)$  و  $\beta_Y(w)$  باشند. همچنین فرض کنید توابع شدت فقر این دو متغیر به ترتیب با  $\rho_X(w)$  و  $\rho_Y(w)$  نمایش داده شوند. در این صورت گفته می شود  $X$  کوچکتر از  $Y$  در ترتیب شکاف فقر ( $X \leq_{pg} Y$ ) اگر برای هر  $w \geq 0$ ،  $\beta_X(w) \geq \beta_Y(w)$ . علاوه بر این گفته می شود  $X$  کوچکتر از  $Y$  در ترتیب شدت فقر است (نشان داده شده به صورت  $X \leq_{ps} Y$ ) اگر  $\rho_X(w) \geq \rho_Y(w)$  برقرار باشد. حال همانطور که در مهدی [۵] نشان داده شد، می توان از مثال بعدی برای مشخص سازی توزیع پارتو بر اساس رابطه تابعی میان خم لورنتس و شاخص شکاف فقر برای مردم فقیر استفاده نمود.

مثال ۱۰۲. فرض کنید  $X$  یک متغیر تصادفی نامنفی، با تابع توزیع مطلقاً پیوسته باشد و  $E(X) < \infty$ . اگر  $L(p)$  نشان دهنده ی خم لورنتس و  $\beta(x)$  شاخص شکاف فقر برای مردم فقیر باشد آن گاه برای هر  $0 \leq p \leq 1$ ،

$$\beta_X(x) = 1 - \frac{L(p)}{pL'(p)},$$

اگر و تنها اگر  $X$  از توزیع پارتو با تابع توزیع

$$F(x) = 1 - \left( \frac{a}{x} \right)^k, \quad x \geq a, \quad k > 1,$$

پیروی کرده و

$$\beta_X(x) = \left\{ x - a - \frac{a^k}{1-k} [x^{1-k} - a^{1-k}] \right\} / xp.$$

برای بررسی درستی روابط فوق، ابتدا توجه کنید که چون  $p = F(x)$  بنابراین به سادگی می توان نشان داد که  $F^{-1}(p) = \frac{a}{\sqrt[k]{1-p}}$  و در نتیجه

$$\begin{aligned}
 L_X(p) &= \frac{1}{\mu} \int_0^{F^{-1}(p)} y f(y) dy \\
 &= \frac{k-1}{ka} \int_a^{\frac{a}{\sqrt[k]{1-p}}} y \left( \frac{ka^k}{y^{k+1}} \right) dy \\
 &= 1 - (1-p)^{\frac{k-1}{k}}.
 \end{aligned}$$

حال با توجه به آنکه

$$L'_X(p) = \frac{k-1}{k} (1-p)^{-\frac{1}{k}},$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} 1 - \frac{L_X(p)}{pL'_X(p)} &= 1 - \frac{k}{k-1} \frac{1 - (1-p)^{\frac{k-1}{k}}}{p(1-p)^{-\frac{1}{k}}} \\ &= 1 - \frac{k}{(k-1)p} \frac{1 - \left\{ \left( \frac{a}{x} \right)^k \right\}^{1-1/k}}{\left( \frac{a}{x} \right)^{-1}} = 1 - \frac{k}{(k-1)p} \left\{ \frac{a}{x} - \left( \frac{a}{x} \right)^k \right\} \\ &= \frac{1}{xp} \left\{ x \left[ 1 - \left( \frac{a}{x} \right)^k \right] - \frac{ka}{k-1} + \frac{k}{k-1} \frac{a^k}{x^{k-1}} \right\} \\ &= \frac{1}{xp} \left\{ x - a - \frac{a}{k-1} + \frac{1}{k-1} \frac{a^k}{x^{k-1}} \right\} \\ &= \frac{1}{xp} \left\{ x - a - \frac{a^k}{1-k} \left[ x^{1-k} - a^{1-k} \right] \right\} = \beta_X(x). \end{aligned}$$

توزیع‌های پارتو نوع دو، نمایی و دامنه متناهی برای توصیف توزیع ثروت (دارایی‌ها) در میان افراد به کار می‌روند. سانوج و مایا [۸] بر اساس نسبت شکاف درآمد برای مردم فقیر این توزیع‌ها را مشخص‌سازی کردند.

قضیه ۲.۲. فرض کنید  $X$  یک متغیر تصادفی نامنفی نشان دهنده درآمد افراد یک جامعه و دارای تابع توزیع مطلقاً پیوسته  $F(w)$  باشد. در این صورت برای یک ثابت  $C$  نسبت شکاف درآمد،

$$(۴) \quad \beta(w) = 1 - \frac{\mu}{w} (1 - w(1 + Cw)\tilde{r}(w)),$$

که در آن  $\tilde{r}(w) = \frac{f(w)}{F(w)}$

(الف) برای  $C > 0$ ، توزیع پارتو نوع دو با تابع توزیع

$$(۵) \quad F(w) = 1 - (1 + pw)^{-q}, \quad w > 0, \quad p, q > 0,$$

(ب) برای  $C = 0$ ، توزیع نمایی با تابع توزیع

$$(۶) \quad F(w) = 1 - \exp(-\lambda w), \quad w > 0, \quad \lambda > 0,$$

(ج) برای  $C < 0$ ، توزیع دامنه متناهی با تابع توزیع

$$(۷) \quad F(w) = 1 - (1 - pw)^d; \quad 0 < w < \frac{1}{p}, \quad d > 0, \quad p > 0.$$

را مشخص‌سازی می‌کند.

اثبات. فرض کنید رابطه (۴) برقرار باشد. در این صورت،

$$\beta(w) = 1 - \frac{\int_0^w x f(x) dx}{wF(w)} = 1 - \frac{\mu}{w} (1 - w(1 + Cw)\tilde{r}(w)),$$

و بنابراین

$$(۸) \quad \int_0^w x f(x) dx = \mu(F(w) - w(1 + Cw)f(w)).$$

حال با گرفتن مشتق از طرفین رابطه (۸) نسبت به  $w$  داریم

$$wf(w) = \mu \left\{ f(w) - f'(w)w(1 + Cw) - f(w)(1 + 2Cw) \right\},$$

که نتیجه می‌دهد

$$\frac{f'(w)}{f(w)} = -\frac{1 + 2C\mu}{\mu(1 + Cw)},$$

پس

$$(9) \quad \ln f(w) = - \int_0^w \frac{1 + 2C\mu}{\mu(1 + Ct)} dt + k,$$

که در آن  $k$  یک مقدار ثابت است. اکنون اگر در (9)،  $C > 0$  باشد آنگاه

$$\ln f(w) = - \frac{1 + 2C\mu}{C\mu} \ln(1 + Cw) + k \Rightarrow f(w) = (1 + Cw)^{-\frac{1+2C\mu}{C\mu}} e^k,$$

و با توجه به شرط  $\int f(x)dx = 1$  به سادگی می‌توان دریافت،

$$f(w) = C(1 + \frac{1}{C\mu})(1 + Cw)^{-(\frac{1}{C\mu} + 2)}, \quad w > 0,$$

و لذا با در نظر گرفتن  $p = C$  و  $q = \frac{1}{C\mu} + 1$  قسمت (الف) اثبات می‌شود.

در ادامه با فرض آنکه در رابطه (9)،  $C = 0$  و  $C < 0$  به طریق مشابه می‌توان قسمتهای (ب) و (ج) را نیز ثابت کرد.

□

عکس قضیه با محاسبات مستقیم اثبات می‌شود.

### ۳. نتیجه‌گیری

در این مقاله پس از معرفی توابع شکاف فقر و شدت فقر بر اساس امید ریاضی توابعی از زمان غیر فعال بودن، ابتدا رابطه‌ای را میان این دو شاخص یافته و سپس رابطه‌ای میان خم لورنتس و شکاف فقر به دست آمد. همچنین برخی از توزیع‌های پیوسته توسط شاخص شکاف فقر مشخص‌سازی شده و نیز ترتیب‌هایی تصادفی بر اساس این شاخص‌ها معرفی گردید.

### مراجع

1. Chandra, N.K., and Roy, D., *Some results on reversed hazard rate*, Probab. Eng. Inform. Sci. **15** (2001), 95-102.
2. Goliforushani, S., and Asadi, M., *On the discrete mean past lifetime*, Metrika **68** (2008), 209-217.
3. Kundu, C., and Nanda, A.K., *Some reliability properties of the inactivity time*, Comm. Statist. Theory Methods **39** (2010), 899-911.
4. Mahdy, M., *Characterization and preservations of the variance inactivity time ordering and increasing variance inactivity time class*, J. Advanced Research **3** (2012), 29-34.
5. Mahdy, M., *Further results related to variance past lifetime class & associated orderings and their properties*, Physica A **462** (2016), 1148-1160.
6. Nanda, A.K., Singh, H., Misra, N., and Paul, P., *Reliability properties of reversed residual lifetime*, Comm. Statist. Theory Methods **32** (2003), 2031-2042.
7. Ruiz, J.M., and Navarro, J., *Characterizations based on conditional expectations of the double truncated distribution*, Ann. Inst. Statist. Math. **48** (1996), 563-572.
8. Sunoj, S.M., and Maya, S.S., *The role of lower partial moments in stochastic modeling*, Metron Int. J. Stat. LXIV **2** (2008), 223-242.

پست الکترونیکی: [f-goodarzi@kashanu.ac.ir](mailto:f-goodarzi@kashanu.ac.ir)

## پیش‌بینی قیمت سهام بر مبنای شبکه عصبی و فیلتر کالمن

سید صالح محسنی

استادیار گروه برق، دانشگاه آزاد اسلامی واحد نور، نور، ایران

رمضان رضائیان\*

استادیار گروه ریاضی مالی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد نور، نور، ایران

محمود بدر

دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه مازندران، بابلسر، ایران

و روح‌اله یوسفیان

دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد نور، نور، ایران

چکیده. در این مقاله، پیش‌بینی قیمت سهام شرکت فولاد مبارکه اصفهان در بازار بورس ایران بر مبنای شبکه عصبی و فیلتر کالمن انجام شده است. پیش‌بینی‌های صورت گرفته بر مبنای داده‌های واقعی بازار بورس از سال ۹۳ تا آبان ۹۷ و برای یک گام به جلو انجام شده است. شبکه عصبی بکار رفته در این مقاله از نوع شبکه تاخیری گسترش یافته (DTNN) است. همچنین یک مدل حالت بر مبنای داده‌ها و تغییرات آنها برای فیلتر کالمن استخراج شده است. نتایج حاصل نشان می‌دهند که هر دو مدل شبکه عصبی و فیلتر کالمن با دقت قابل قبولی قیمت روز آینده را پیش‌بینی می‌کنند اما شبکه عصبی دارای خطای کمتری نسبت به مدل فیلتر کالمن است. واژه‌های کلیدی: پیش‌بینی قیمت سهام، شبکه عصبی، فیلتر کالمن. طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 60H10.

## ۱. پیش‌گفتار

یکی از پدیده‌های نوین در اقتصاد دنیا بازار سهام است. پیش‌بینی قیمت سهام می‌تواند تاثیر بسیار زیادی در خرید و فروش سهام داشته باشد. روش‌های گوناگونی برای پیش‌بینی قیمت سهام ارائه شده است که از آن جمله می‌توان به شبکه عصبی و فیلتر کالمن اشاره نمود. امروزه شبکه‌های عصبی مصنوعی نقش مهمی در یادگیری ماشین [۴]، کنترل فرآیندها، مدل سازی جعبه سیاه داده‌ها و شناسایی سیستم‌ها بازی می‌کنند. این شبکه‌ها به دلیل سادگی در پیاده‌سازی، عدم نیاز به مدل ریاضی برای داده‌ها، تکامل نرم افزارهای پیاده کننده و کارایی و دقت بالا در پیش‌بینی داده‌های آتی، بطور گسترده‌ای در پیش‌بینی قیمت‌ها در بازار مورد استفاده قرار می‌گیرند. هدایتی مقدم و همکاران [۱] از شبکه عصبی پیش رو برای پیش‌بینی سهام بورس نزدک<sup>۱</sup> استفاده نمودند. وانگ و وانگ [۵] از استخراج ویژگی به کمک پیش پردازش به همراه شبکه عصبی پیش رو برای پیش بینی نرخ سهام در بورس استفاده نمودند. سنپاتی و همکاران [۶] از ترکیب الگوریتم بهینه سازی به کمک شبکه عصبی و مقایسه چند ترکیب مختلف شبکه عصبی برای پیش‌بینی قیمت سهام استفاده نمودند. هیرانشا و همکاران [۲] چهار ساختار شبکه عصبی را به همراه یادگیری عمیق برای پیش‌بینی بازار بورس مقایسه نمودند. در این تحقیق ما از ساختار پیش رو به همراه تاخیر زمانی توزیع شده در لایه‌ها (DTDNN) به دلیل خصوصیات خوب حافظه آن برای پیش بینی نرخ سهام استفاده نمودیم.

فیلتر کالمن یک تخمین‌گر با کمترین میانگین مربعات خطا<sup>۲</sup> است که از مدل دینامیکی (حالت) برای سیگنال تخمین زده شده استفاده می‌کند. این فیلتر از دو تخمین پیشین (پیش از اندازه‌گیری) و تخمین پسین (پس از اندازه‌گیری برای اصلاح تخمین اولیه) برای یک گام جلوتر حالت‌ها استفاده می‌کند. دو نویز فرآیند (حالت) و خروجی به عنوان ورودی تداخلی به سیستم در نظر گرفته می‌شود. نویز وارده به مدل می‌تواند برداری و حتی غیرایستا هم باشد که در صورت گوسی توام بودن سیگنال و نویز، فیلتر کالمن یک تخمین‌گر بهینه با کمترین میانگین مربعات خطا است و در غیر صورت این فیلتر یک تخمین‌گر بهینه با کمترین میانگین مربعات خطای خطی<sup>۳</sup> است [۳]. در این مقاله از شبکه عصبی تاخیر زمانی توزیع شده (DTDNN) به همراه فیلتر کالمن برای پیش‌بینی یک گام جلوتر قیمت سهام شرکت فولاد مبارکه اصفهان استفاده شده است. بدین منظور ابتدا در بخش (۲) شبکه عصبی تاخیر زمانی توزیع شده تشریح شده است. بخش (۳) به معرفی فیلتر کالمن و نحوه پیش‌بینی یک گام به جلو در آن می‌پردازد. بخش (۴) شبیه‌سازی این روش‌ها بر روی داده‌های واقعی قیمت سهام شرکت فولاد مبارکه اصفهان در بازار بورس ایران، از سال ۹۳ تا آبان ۹۷ را ارائه می‌دهد، و بخش (۵) به جمع‌بندی نتایج می‌پردازد.

<sup>۳</sup> Linear Minimum Mean Square Error<sup>۲</sup> Minimum mean square error (MMSE)  
(LMMSE)<sup>۱</sup> NASDAQ

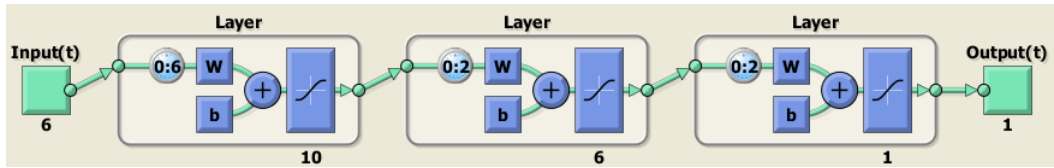
\* سخنران



## ۲. شبکه عصبی تاخیر زمانی توزیع شده DTDNN

شبکه عصبی تاخیر زمانی توزیع شده یک ساختار پیشرو است که در آن ورودی هر طبقه علاوه بر سیگنال‌های ورودی خارجی یا لایه قبلی، شامل تاخیر یافته این سیگنال‌ها نیز می‌شود. این ساختار به دلیل وجود حافظه در آن برای مدل‌سازی سیستم‌های دینامیکی غیرخطی مناسب است. دلیل وجود حافظه در لایه‌های بعدی این است که بتوان ویژگی‌های استخراج شده در لایه‌های قبلی را نیز برای پردازش در لحظات بعدی استفاده نمود. این کار به افزایش کارایی شبکه در مواجهه با سیستم‌های دینامیک غیرخطی کمک می‌کند. ساختار این شبکه در شکل (۱) آمده است. این شبکه نخستین بار در تشخیص آوا بکار گرفته شد. نحوه آموزش این ساختار به کمک پس انتشار خطای دینامیکی است که کمی کندتر از پس انتشار خطای معمولی است.

شکل ۱



## ۳. فیلتر کالمن

## مدل فضای حالت قیمت سهام

مدل استفاده شده در این قسمت از مرجع [۸] اخذ شده است که از بسط تیلور مرتبه دو تابع قیمت سهام، شامل قیمت سهام به همراه تغییرات قیمت به عنوان متغیرهای حالت و شتاب قیمت به عنوان نویز گوسی فرآیند استفاده می‌کند. اگر  $x$  قیمت سهام و  $\dot{x}$  نرخ تغییرات قیمت سهام باشد، میتوان معادلات زیر را برای قیمت سهام و نرخ تغییرات قیمت سهام در نظر گرفت:

$$\begin{aligned}x(t+1) &= x(t) + \dot{x}T + \frac{1}{2}a(t)T^2, \\ \dot{x}(t+1) &= \dot{x}(t) + a(t)T, \\ y(t) &= x(t) + v(t),\end{aligned}$$

که در آن  $x$  قیمت سهام،  $\dot{x}$  نرخ تغییرات قیمت سهام،  $a(t)$  شتاب قیمت سهام،  $T$  نرخ نمونه‌برداری قیمت،  $y(t)$  خروجی و  $v(t)$  نویز اندازه‌گیری خروجی است. اگر  $a(t)$  را یک نویز گوسی استاندارد (میانگین صفر و واریانس یک) در نظر بگیریم آنگاه مدل فضای حالت فرآیند قیمت سهام به شکل زیر در می‌آید:

$$\begin{cases} X(t+1) = \Phi X(t) + \Gamma w(t), \\ y(t) = CX(t) + v(t), \end{cases}$$

که در آن:  $C = [1 \ 0]$ ،  $\Gamma = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}T^2 \\ T \end{bmatrix}$ ،  $w(t) = a(t)$ ،  $\Phi = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  و  $X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix}$ ،  $w(t) = a(t)$  است.

در اینجا فرض می‌شود  $w(t)$  و  $v(t)$ ، نویزهای سفید تصادفی مستقل هستند. با در نظر گرفتن معادله حالت سیستم، فیلتر کالمن سعی در تخمین مقدار حالت سیستم در لحظه بعد (یعنی  $\hat{X}(t+1)$ ) دارد. معادلات این الگوریتم از دو بخش تخمین پیشین و تخمین پسین تشکیل شده است که در بخش اول، تخمین با داشتن اطلاعات سیستم تا لحظه  $t$  انجام می‌شود و به این مرحله آپدیت زمانی نیز گفته می‌شود. در مرحله بعد با دریافت اندازه‌گیری لحظه  $t+1$  تخمین اولیه برای لحظات بعد اصلاح می‌شود که به آن تخمین پسین یا آپدیت اندازه‌گیری گویند. خلاصه الگوریتم فیلتر کالمن به صورت زیر است:

الف) مرحله آپدیت زمانی:

$$\begin{aligned}\hat{X}(t+1|t) &= \Phi \hat{X}(t|t), \\ P(t+1|t) &= \Phi P(t|t) \Phi^T + \Gamma Q \Gamma^T,\end{aligned}$$

که ماتریس  $Q$  کوواریانس نویز فرآیند  $(w(t))$  است.

ب) مرحله آپدیت اندازه‌گیری:

$$\begin{aligned}K(t+1) &= P(t+1|t) C^T [C P(t+1|t) C^T + R]^{-1}, \\ \hat{X}(t+1|t+1) &= \hat{X}(t+1|t) + K(t+1) [y(t+1) - C \hat{X}(t+1|t)], \\ P(t+1|t+1) &= [I - K(t+1) C] P(t+1|t).\end{aligned}$$

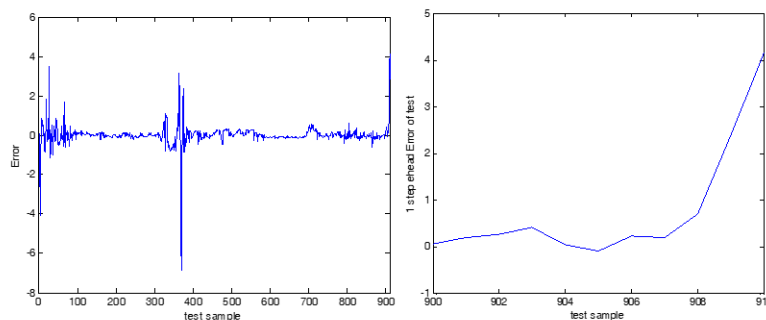
با در نظر گرفتن شرط اولیه  $\hat{X}(1|1) = X(1)$  و  $P(1|1) = 10^5 I_2$  این الگوریتم بصورت تکراری در هر مرحله حل می‌شود. با توجه به اینکه در پیش‌بینی یک گام جلوتر سهام شرکت، اندازه‌گیری پسین در هر مرحله موجود نیست، لذا از تخمین پیشین  $\hat{X}(t+1|t)$  به عنوان خروجی پیش بین یک گام جلوتر استفاده می‌شود و این نتایج با خروجی شبکه عصبی مقایسه خواهد شد.

#### ۴. شبیه‌سازی و مقایسه نتایج

در این بخش داده‌های واقعی سهام شرکت فولاد مبارکه اصفهان در بازار بورس ایران، از سال ۹۳ تا آبان ۹۷، توسط دو ساختار شبکه عصبی DTDNN و فیلتر کالمن، مدل‌سازی شده و پیش‌بینی قیمت پایانی روز آینده انجام خواهد شد. در این مقاله، ابتدا ۹۰۰ داده به عنوان آموزش به شبکه داده شد و سپس پیش‌بینی یک مرحله جلوتر بدون آموزش مجدد برای ده روز آتی تست شد که جواب بسیار خوبی ارائه نمود و با وجود تغییرات تند قیمت سهام در این بازه زمانی شبکه خطای بسیار ناچیزی نشان داد که در شکل (۲) نشان داده شده است.

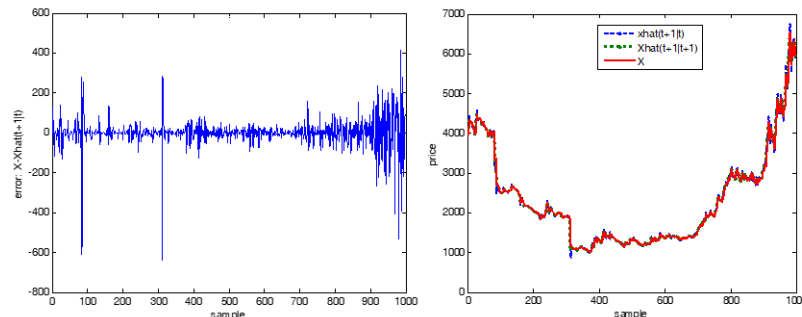
با افزایش مدت تست خطا بطور چشم‌گیری زیاد می‌شود که این البته در قلمرو پیش‌بینی یک گام جلوتر نیست. شکل (۲) خروجی قیمت واقعی به همراه خروجی شبکه عصبی و خطای پیش‌بینی یک گام جلوتر را پس از آموزش ۹۰۰ داده اول و تست ۹۱۰ داده اول نشان می‌دهد.

شکل ۲. الف) (سمت راست) خطای تست داده‌های جدید (۹۰۱ تا ۹۱۰) پس از آموزش ۹۰۰ داده اول (ب) (سمت چپ) خطای تست کل ۹۱۰ داده



پیش‌بینی یک گام جلوتر فیلتر کالمن به داده‌های جمع‌آوری شده در شکل (۳) نشان داده شده است. در این شکل در سمت راست منحنی داده‌ها ( $X$ ) به همراه تخمین پیشین  $\hat{X}(t+1|t)$  و پسین  $\hat{X}(t+1|t+1)$  نمایش داده شده است و در سمت چپ خطای بین داده و تخمین پیشین نشان داده شده است. همانطور که ملاحظه می‌شود تخمین در نواحی دارای تغییرات ناگهانی و سریع دارای خطای قابل ملاحظه‌ای است.

شکل ۳. الف) (سمت راست) پیش‌بینی یک مرحله جلوتر فیلتر کالمن به همراه داده‌های واقعی قیمت سهام. ب) (چپ) خطای بین مدل پیش‌بین و قیمت واقعی



با مقایسه نتایج بدست آمده مشخص است که پیش‌بینی شبکه عصبی دارای خطای به مراتب کوچکتری نسبت به فیلتر کالمن است. علت این امر این است که اگرچه فیلتر کالمن پیش‌بینی با کمترین واریانس خطا را می‌دهد اما بهینه بودن این فیلتر زمانی است که نویز فرآیند و خروجی از نوع سفیدگوسی باشد و برای سایر انواع نویز این فیلتر خروجی بهینه خطی یعنی پیش‌بینی با کمترین واریانس خطای خطی را می‌دهد که نسبت به شبکه عصبی که ذات غیرخطی فرآیند را یاد می‌گیرد عملکرد ضعیف‌تری از خود نشان می‌دهد.

#### ۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله پیش‌بینی یک گام جلوتر داده‌های بورس توسط دو مدل شبکه عصبی تاخیر زمانی گسترده DTDNN و فیلتر کالمن انجام شد. داده‌های بکار رفته واقعی و مربوط به سهام شرکت فولاد مبارکه اصفهان در بازار بورس ایران، از سال ۹۳ تا آبان ۹۷ است. شبکه عصبی بکار رفته از نوع TDNN است که برای پردازش سری‌های زمانی بسیار مناسب است. نتایج حاصل نشان می‌دهد که کارایی شبکه عصبی در پیش‌بینی یک گام جلوتر قیمت سهام از فیلتر کالمن بالاتر است که این پدیده به دلیل ذات غیرخطی و غیرایستای سهام در بازار است.

#### مراجع

1. A. Hedayati Moghaddam, M. Hedayati Moghaddam, M. Esfandyari, Stock market index prediction using artificial neural network, Journal of Economics, Finance and Administrative Science, Vol. 21, pp. 89-93, 2016.
2. M. Hiransha, E.A. Gopalakrishnan, Vijay Krishna Menon, K.P. Soman, NSE Stock Market Prediction Using Deep-Learning Models, Procedia Computer Science, Vol. 132, pp. 1351-1362, 2018
3. S.M. Kay, Fundamentals of Statistical Signal Processing: Estimation Theory, Prentice Hall PTR, 1993.
4. S.S. Mohseni, V. Khorsand, Design and Comparison of ECG Arrhythmias Classifiers Using Discrete Wavelet Transform, Neural Network and Principal Component Analysis. In: Hadjiski M., Atanassov K. (eds) Intuitionistic Fuzziness and Other Intelligent Theories and Their Applications. Studies in Computational Intelligence, vol 757, Springer, 2019
5. M.R. Senapati, S. Das, S. Mishra, A Novel Model for Stock Price Prediction Using Hybrid Neural Network, J. Inst. Eng. India Ser. B., Springer, 2018.
6. Waibel, Alex, et al., Phoneme recognition using time-delay neural networks, IEEE transactions on acoustics, speech, and signal processing 37.3 (1989): 328-339.
7. L. Wang, Q. Wang, Stock Market Prediction using artificial neural networks based on HLP, 2011 Third International Conference on Intelligent Human-Machine Systems and Cybernetics, China, 2011.
8. Y. Xu, G. Zhang, Application of Kalman Filter in the Prediction of Stock Price, International Symposium on Knowledge Acquisition and Modeling (KAM 2015), China, 2015.

پست الکترونیکی: [s\\_saleh\\_mohseni@yahoo.com](mailto:s_saleh_mohseni@yahoo.com)

پست الکترونیکی: [m.badr@stu.umz.ac.ir](mailto:m.badr@stu.umz.ac.ir)

ارائه‌های پوستری

آنالیز

دنباله بسل برداری مقدار در فضای هیلبرت  $L^2(0, \infty)$ 

شهلا خلیفه\*

فارغ التحصیل کارشناسی ارشد، دانشگاه یزد، یزد، ایران

و احمد خوشاب

فارغ التحصیل کارشناسی ارشد، دانشگاه یزد، یزد، ایران

چکیده. در این مقاله یک ضرب داخلی برداری روی فضای هیلبرت  $L^2(0, \infty)$  برای هر عدد حقیقی بزرگتر از یک معرفی می‌کنیم. سپس قاب و دنباله بسل و عملگرهای وابسته به این ضرب داخلی را بیان می‌کنیم. و در نهایت به بررسی دنباله بسل برداری مقدار تحت شرایط مشخصی در فضای هیلبرت  $L^2(0, \infty)$  می‌پردازیم.  
واژه‌های کلیدی: فضای هیلبرت، قاب برداری مقدار، دنباله بسل برداری مقدار.  
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 42C15, 46H25.

## ۱. پیش‌گفتار

اگر چه تبدیل فوری در آنالیز به مدت بیش از یک قرن راهی برای تجزیه و گسترش سیگنال بود و هنوز هم دارای اهمیت و کاربرد فراوان است، اما دارای نقصان‌هایی برای آنالیز سیگنال‌هاست. بدین ترتیب که تبدیل فوری یک موج، اطلاعات مربوط به زمان شروع و نیز برخی از اطلاعات دیگر را مخفی می‌کند. چاره این مشکل استفاده از یک نمایش دیگر است که نسبت به زمان و فرکانس متمرکز شده باشد. قاب‌ها ابتدا توسط دافین<sup>۱</sup> و شوfer<sup>۲</sup> در سال ۱۹۵۲ در یک فضای هیلبرت جدایی پذیر، برای مطالعه مسائلی در سری‌های فوری غیرهمساز معرفی شد [۴]. از آن زمان ریاضی‌دانان بسیاری به بررسی خواص قاب‌ها و همچنین مناسب‌تر کردن تعریف و ویژگی‌های آن پرداخته‌اند. مفهوم قاب برداری مقدار برای اولین بار در سال ۲۰۰۳ توسط کاسازا<sup>۳</sup> و لامرز<sup>۴</sup> ارائه شد [۱]، در حقیقت آنها برای دو تابع  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$  و  $a > 0$  نشان دادند که سری  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x - na) \overline{g(x - na)}$  برای هر  $x \in \mathbb{R}$  تقریباً همه جا به تابعی در  $L^1[0, a]$  همگراست. سپس آنها  $L^2(\mathbb{R})$  را مجهز به ضرب داخلی برداری مقدار

$$\langle f, g \rangle_a(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x - na) \overline{g(x - na)}$$

نمودند و بسیاری از خواص ضرب داخلی  $L^2(\mathbb{R})$  از جمله مفهوم قاب برداری مقدار در این فضا را مورد مطالعه و بررسی قرار دادند. اخیراً دهقان و حسن خانی به مطالعه‌ی فضای ضرب داخلی برداری مقدار  $L^2(0, \infty)$  پرداختند [۵] و علاوه بر بررسی خواص عملگرهای این فضای برداری مقدار به معرفی مفهوم قاب برداری مقدار و دنباله بسل برداری مقدار پرداخته‌اند.

## ۲. تعاریف و مفاهیم بنیادی

تعریف ۱.۰۲. فرض کنید  $H$  یک فضای هیلبرت جدایی‌پذیر با ضرب داخلی  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  باشد. در این صورت دنباله  $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  را یک قاب برای فضای هیلبرت  $H$  می‌نامیم، هرگاه ثابت‌های مثبت  $A$  و  $B$  موجود باشند به‌طوری‌که برای هر  $f \in H$  داشته باشیم

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\langle f, f_i \rangle|^2 \leq B\|f\|^2.$$

اگر در رابطه بالا، فقط سمت راست نابرابری برقرار باشد، آن‌گاه دنباله  $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  را یک دنباله بسل می‌نامیم.

\* ارائه‌دهنده 4 Lammers

3 Casazza

2 Schaeffer

1 Duffin

**تعریف ۲.۲.** اگر  $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  یک قاب برای  $H$  باشد. در این صورت برای هر دنباله دلخواه  $\{h_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  متعلق به  $\ell^2(\mathbb{N})$  سری  $\sum_{i \in \mathbb{N}} h_i f_i$  همگراست و از اینرو عملگر  $T$  معرفی شده با ضابطه زیر

$$T : \ell^2(\mathbb{N}) \longrightarrow H, \quad T\{h_i\} := \sum_{i=1}^{\infty} h_i f_i,$$

یک عملگر کراندار خطی است، به علاوه برای هر  $f$  از  $H$

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} |\langle f, f_i \rangle|^2 \leq \|T\|^2 \|f\|^2.$$

عملگر  $T$  معرفی شده در بالا را عملگر پیش قاب یا ترکیب می نامیم و الحاقی این عملگر که به صورت زیر تعریف می شود

$$T^* : H \longrightarrow \ell^2(\mathbb{N}), \quad T^* f = \{\langle f, f_i \rangle\}_{i \in \mathbb{N}},$$

را عملگر تجربه قاب  $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  می نامیم.

**قضیه ۳.۲.** فرض کنید  $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  دنباله ای در  $H$  و ثابت مثبت  $B$  مفروض باشد. در این صورت  $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  یک دنباله بسل با کران  $B$  است اگر و تنها اگر عملگر پیش قاب  $T : \ell^2(\mathbb{N}) \rightarrow H$  با ضابطه  $T\{h_i\}_{i \in \mathbb{N}} = \sum_{i=1}^{\infty} h_i f_i$  یک عملگر کراندار باشد و علاوه بر این  $\|T\| \leq \sqrt{B}$ .

□

اثبات. برای مشاهده اثبات به مرجع [۲] مراجعه شود.

**تعریف ۴.۲.** فرض کنید بازه باز  $(\circ, \infty)$  مجهز به  $\sigma$  - جبر مجموعه های بول و اندازه لبگ  $dx$  باشد. فضای  $L^2(\circ, \infty)$  را متشکل از همه توابع  $f : (\circ, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$  در نظر می گیریم که بران آن

$$\|f\|_2 := \left( \int_{\circ}^{\infty} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} < \infty.$$

واضح است که فضای  $L^2(\circ, \infty)$  برای هر  $f, g \in L^2(\circ, \infty)$  با تعریف زیر یک فضای ضرب داخلی اسکالر مقدار و البته یک فضای هیلبرت است

$$\langle f, g \rangle := \int_{\circ}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

**تعریف ۵.۲.** فرض کنید  $f$  و  $g$  توابعی متعلق به فضای  $L^2(\circ, \infty)$  باشند. در این صورت، اگر برای هر  $x \in (\circ, \infty)$  ، نگاشت  $\langle f, g \rangle_a(x)$  را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\langle f, g \rangle_a(x) := \sum_{j \in \mathbb{Z}} a^j f(a^j x) \overline{g(a^j x)},$$

آنگاه  $\langle f, g \rangle_a$  یک نگاشت خوش تعریف روی بازه  $(\circ, \infty)$  بوده و آن را ضرب داخلی برداری مقدار فضای  $L^2(\circ, \infty)$  می نامیم. همچنین این ضرب داخلی برداری مقدار یک نرم برداری مقدار روی فضای  $L^2(\circ, \infty)$  القا می کند که برای هر  $x \in (\circ, \infty)$  و  $f \in L^2(\circ, \infty)$  به صورت  $\|f\|_a(x) := \sqrt{\langle f, f \rangle_a(x)}$  معرفی می شود.

**نکته ۶.۲.** اگر تابع  $f \in L^2(\circ, \infty)$  دلخواه باشد، در این صورت

$$\|f\|_a = \sup\{|\langle f, g \rangle_a| : \|g\|_a = 1, [1, a] \text{ بازه روی همه جا}\}.$$

**تعریف ۷.۲.** دنباله  $\{f_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  در فضای  $L^2(\circ, \infty)$  را یک قاب برداری مقدار می نامیم هرگاه ثابت های مثبت  $A$  و  $B$  موجود باشند، به طوریکه برای هر  $f \in L^2(\circ, \infty)$  و برای تقریباً هر  $x \in [1, a]$  داشته باشیم

$$A\|f\|_a^2 \leq \sum_{i \in \mathbb{Z}} |\langle f, f_i \rangle_a(x)|^2 \leq B\|f\|_a^2(x).$$

**تعریف ۸.۲.** دنباله  $\{f_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  در فضای  $L^2(\circ, \infty)$  را یک دنباله بسل برداری مقدار می نامیم هرگاه ثابت مثبت  $B$  موجود باشد، به طوریکه برای هر  $f \in L^2(\circ, \infty)$  و برای تقریباً هر  $x \in [1, a]$  داشته باشیم

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} |\langle f, f_i \rangle_a(x)|^2 \leq B\|f\|_a^2(x).$$

همچنین ضریب مثبت  $B$  در نامساوی بالا را یک کران بسل برداری مقدار برای دنباله  $\{f_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  می نامیم.

تعریف ۹.۲. فضای دنباله ای  $\ell^2(\circ, \infty)$  را به صورت زیر معرفی می‌کنیم

$$\ell^2(\circ, \infty) := \left\{ \{g_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \subset l^\infty(\circ, \infty), \int_1^a \sum_{i \in \mathbb{Z}} |g_i(x)|^2 dx < \infty \right\},$$

اگر نگاشت دو خطی  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\ell^2(\circ, \infty)}$  را به صورت زیر داشته باشیم

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\ell^2(\circ, \infty)} : \ell^2(\circ, \infty) \times \ell^2(\circ, \infty) \rightarrow L^1[1, a], \langle \{g_i\}_{i \in \mathbb{Z}}, \{h_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \rangle_{\ell^2(\circ, \infty)} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} g_i \overline{h_i}.$$

آنگاه به سادگی مشاهده می‌شود که این نگاشت خوش تعریف است و از اینرو  $\ell^2(\circ, \infty)$  یک فضای ضرب داخلی برداری مقدار است.

تعریف ۱۰.۲. فرض کنید دنباله  $F = \{f_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  یک قاب برداری مقدار برای فضای  $L^2(\circ, \infty)$  باشد. در این صورت عملگر پیش قاب وابسته به آن را با ضابطه زیر در نظر می‌گیریم

$$T_a^F : L^2(\circ, \infty) \longrightarrow \ell^2(\circ, \infty), \quad T_a^F(g) = \{\langle g, f_i \rangle_a\}_{i \in \mathbb{Z}}.$$

همچنین الحاقی عملگر  $T_a^F$  که با  $T_a^{F*}$  نمایش می‌دهیم، عملگر تجزیه برداری مقدار می‌نامیم و به صورت زیر معرفی می‌شود

$$T_a^{F*} \{g_i\}_{i \in \mathbb{Z}} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} f_i g_i \quad (\{g_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\circ, \infty)).$$

### ۳. نتایج اصلی

قضیه ۱۰.۳. فرض کنید  $F = \{f_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  یک دنباله برداری مقدار برای فضای  $L^2(\circ, \infty)$  باشد. در اینصورت اگر  $F$  یک دنباله بسل برداری مقدار با کران  $B$  باشد، آنگاه  $T_a^{F*}$  عملگری خوش تعریف و کراندار از  $\ell^2(\circ, \infty)$  به توی  $L^2(\circ, \infty)$  است و  $\|T_a^{F*}\| \leq \sqrt{B}$ .

اثبات. فرض کنیم  $G = \{g_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  دنباله ای دلخواه در  $\ell^2(\circ, \infty)$  باشد. بنابراین برای هر  $m, n \in \mathbb{N}$ ،  $n \geq m$ ، و تقریباً برای هر  $x \in [1, a]$

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^n g_i f_i - \sum_{i=m+1}^m g_i f_i \right\|_a(x) &= \left\| \sum_{i=m+1}^n g_i f_i \right\|_a(x) \\ &= \sup_{\|g\|_a(x)=1} \left| \sum_{i=m+1}^n g_i \langle f_i, g \rangle_a(x) \right| \\ &\leq \sup_{\|g\|_a(x)=1} \sum_{i=m+1}^n |g_i \langle f_i, g \rangle_a(x)| \\ &\leq \left( \sum_{i=m+1}^n |g_i(x)|^2 \right)^{1/2} \sup_{\|g\|_a(x)=1} \left( \sum_{i=m+1}^n |\langle f_i, g \rangle_a(x)|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \sqrt{B} \left( \sum_{i=m+1}^n |g_i(x)|^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

در این صورت با توجه به موشی بودن سری  $\sum_{i=m+1}^n g_i f_i$  نسبت به  $\|\cdot\|_a$ ، در  $L^2(\circ, \infty)$  همگراست. بنابراین  $T_a^{F*}$  خوش تعریف و کراندار است و همچنین  $\|T_a^{F*}\| \leq \sqrt{B}$ . □

قضیه ۲.۳. فرض کنید  $H := L^2(\circ, \infty)$  یک فضای ضرب داخلی برداری مقدار،  $a$  یک عدد حقیقی بزرگتر از ۱ و  $x \in [\circ, a]$  باشند. همچنین  $F := \{f_i\}_{i=1}^\infty \subseteq H$  یک قاب برداری مقدار با کرانهای  $A$  و  $B$  و  $G := \{g_i\}_{i=1}^\infty$  یک دنباله در  $H$  باشند. اگر  $\lambda_1, \mu \geq 0$  و  $\lambda_2 \in [\circ, 1)$  موجود باشند به طوریکه برای هر  $n \in \mathbb{N}$ ،  $\{h_i\}_{i=1}^n$

$$(۱) \quad \left\| \sum_{i=1}^n h_i (f_i - g_i) \right\|_a(x) \leq \lambda_1 \left\| \sum_{i=1}^n h_i f_i \right\|_a(x) + \lambda_2 \left\| \sum_{i=1}^n h_i g_i \right\|_a(x) + \mu \left( \sum_{i=1}^n |h_i|^2 \right)^{1/2}$$

آنگاه  $G$  یک دنباله بسل برداری مقدار با کران بالا  $(\lambda_1 + \lambda_2 + \frac{\mu}{\sqrt{B}})$  است.  $B(1 + \frac{\mu}{\sqrt{B}})$

اثبات. واضح است که  $F$  یک دنباله بسل برداری مقدار است و می‌توان عملگر خطی کراندار زیر را تعریف کنیم

$$T_a^{F*} : \ell_1^*(\circ, \infty) \longrightarrow H, \quad T_a^{F*} \{h_i\}_{i=1}^\infty = \sum_{i=1}^\infty h_i f_i$$

علاوه بر این  $\|T_a^{F*}\|_a \leq \sqrt{B}$  ، شرط (۱) ایجاب می‌کند برای هر  $\{h_i\}_{i=1}^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ )

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^n h_i g_i \right\|_a(x) &\leq \left\| \sum_{i=1}^n h_i (f_i - g_i) \right\|_a(x) + \left\| \sum_{i=1}^n h_i f_i \right\|_a(x) \\ &\leq (1 + \lambda_1) \left\| \sum_{i=1}^n h_i f_i \right\|_a(x) + \lambda_2 \left\| \sum_{i=1}^n h_i g_i \right\|_a(x) + \mu \left( \sum_{i=1}^n |h_i|^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

درنتیجه داریم

$$\left\| \sum_{i=1}^n h_i g_i \right\|_a(x) \leq \frac{1 + \lambda_1}{1 - \lambda_2} \left\| \sum_{i=1}^n h_i f_i \right\|_a(x) + \frac{\mu}{1 - \lambda_2} \left( \sum_{i=1}^n |h_i|^2 \right)^{1/2}$$

از اینرو  $\sum_{i=1}^\infty h_i g_i$  همگراست و در (۱) می‌توان  $\{h_i\}_{i=1}^n$  را با هر  $\{h_i\}_{i=1}^\infty \in \ell_1^*(\circ, \infty)$  جایگزین کرد. حال عملگر زیر را تعریف می‌کنیم:

$$U_a^{G*} : \ell_1^*(\circ, \infty) \longrightarrow H, \quad U_a^{G*} \{h_i\}_{i=1}^\infty = \sum_{i=1}^\infty h_i g_i$$

پس برای هر  $\{h_i\}_{i=1}^\infty \in \ell_1^*(\circ, \infty)$  داریم

$$\|T_a^{F*} \{h_i\}_{i=1}^\infty - U_a^{G*} \{h_i\}_{i=1}^\infty\|_a(x) \leq \lambda_1 \|T_a^{F*} \{h_i\}_{i=1}^\infty\|_a(x) + \lambda_2 \|U_a^{G*} \{h_i\}_{i=1}^\infty\|_a(x) + \mu \left( \sum_{i=1}^\infty |h_i|^2 \right)^{1/2}$$

لذا برای هر  $\{h_i\}_{i=1}^\infty \in \ell_1^*(\circ, \infty)$  داریم

$$\begin{aligned} \|U_a^{G*} \{h_i\}_{i=1}^\infty\|_a(x) &\leq \frac{1 + \lambda_1}{1 - \lambda_2} \|T_a^{F*} \{h_i\}_{i=1}^\infty\|_a(x) + \frac{\mu}{1 - \lambda_2} \left( \sum_{i=1}^\infty |h_i|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{(1 + \lambda_1)\sqrt{B} + \mu}{1 - \lambda_2} \|\{h_i\}_{i=1}^\infty\|_a \end{aligned}$$

این محاسبات نشان می‌دهد که  $G$  یک دنباله بسل برداری مقدار با کران بالا

$$\left( \frac{(1 + \lambda_1)\sqrt{B} + \mu}{1 - \lambda_2} \right)^2 = B \left( 1 + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \frac{\mu}{\sqrt{B}}}{1 - \lambda_2} \right)^2$$

□

است.

## مراجع

1. P.G. Casazza and M.C. Lammers, *Bracket products for Weyl-Heisenberg frames*, Advances in Gabor Analysis. (2003), no. 2, 71–98.
2. O. Christensen, *An introduction to frame and Riesz bases*, Brkhauser, Boston, 2002.
3. O. Christensen, *Operators with closed range, pseudo-inverses, and perturbation of frames for a subspace*, Canad. Math. Bull. Vol. 42 (1999), 37–45.
4. R.J. Duffin and A.C. Schaeffer, *A class of nonharmonic Fourier series*, Trans. Amer. Math. Soc. 72 (1952), 341–366.
5. M.A. Hasankhani and M.A. Dehghan, *A new function-valued inner product and corresponding function-valued in  $L^2(0, \infty)$* , Linear and Multilinear Algebra. 62 (2014), 1995–2009.

پست الکترونیکی: [shanasshkh@gmail.com](mailto:shanasshkh@gmail.com)  
 پست الکترونیکی: [ahmad\\_khoshab@yahoo.com](mailto:ahmad_khoshab@yahoo.com)



## قاب‌ها در فضاهای باناخ دنباله‌ای

اسماء سهونی\*  
گروه ریاضی، دانشگاه ولایت، ایرانشهر، ایران  
زهرا هراتی فرزاد  
گروه ریاضی، دانشگاه ولایت، ایرانشهر، ایران  
مصطفی فرهنگند  
گروه ریاضی، دانشگاه ولایت، ایرانشهر، ایران

چکیده. در این مقاله به مطالعه  $X_d$  - قاب و پایه‌های  $X_d$  - ریس در فضاهای باناخ دنباله‌ای می‌پردازیم برخی روابط میان  $X_d$  - قاب و  $X_d$  - ریس را مورد بررسی قرار می‌دهیم،  $X_d$  فضایی از دنباله‌های اسکالر مقدار و مجهز به نرمی است که تحت آن تشکیل یک فضای باناخ می‌دهد و تابع‌های مختصات روی آن پیوسته هستند. قاب‌های باناخ به وسیله تعمیم مستقیم قاب‌ها در فضای هیلبرت تعریف می‌شوند. مساله اصلی مرتبط با قاب‌ها در فضای باناخ مطالعه و بررسی قاب‌های باناخ متناظر با یک فضای باناخ دنباله‌ای است. در این راستا فضاهای باناخ دنباله‌ای چون  $BK$ -فضاها را معرفی کرده و به مطالعه قاب‌ها و ویژگی‌های آن‌ها در این فضاها می‌پردازیم. واژه‌های کلیدی: قاب‌های باناخ،  $X_d$ -قاب‌ها، دنباله  $X_d$ -بسل. طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 54E70, 46S50.

## ۱. پیش‌گفتار

قاب‌ها برای اولین بار در سال ۱۹۵۲ توسط دافین<sup>۱</sup> و شیفر<sup>۲</sup> در زمینه مطالعه سری‌های فوریه مطرح شدند. شرح مفصلی از نظریه قاب‌ها و ویژگی‌های آن توسط کریستین جمع‌آوری شده‌اند. همچنین به جهت کاربرد زیاد این مفهوم، در سال‌های اخیر قاب‌ها در فضای باناخ و هیلبرت نیز مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته‌اند. قاب‌ها در فضای باناخ ابتدا توسط گروچنگ<sup>۳</sup>، آلدروبی<sup>۴</sup> و سان<sup>۵</sup> مورد مطالعه قرار گرفتند. در این مقاله با قاب‌ها در فضای باناخ دنباله‌ای و مفهوم  $X_d$  - قاب‌ها و دوگان آن‌ها آشنا می‌شویم و قاب‌های باناخ دوگان دنباله بسلی هستند که خواصی مشابه پایه دارند، اما نیازی به پایه بودن ندارند. همچنین می‌توان عناصر فضای باناخ را به صورت ترکیب خطی از عناصر قاب باناخ نوشت.

## ۲. تعاریف اولیه

تعریف ۱.۰۲. فرض کنید  $X_d$  خانواده‌ای از دنباله‌های اسکالر مقدار باشد، که به وسیله  $I$  اندیس‌گذاری شده‌اند و آن را به جمع نقطه‌ای و ضرب اسکالر مجهز می‌کنیم و  $\{\pi_i\}_{i \in I}$  را توابع تصویر روی  $X_d$  در نظر می‌گیریم که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\pi_i(c_k)_{k \in I} = c_i, \quad \forall i \in I$$

در این صورت  $X_d$  با نرم  $\|\cdot\|_{X_d}$  یک  $BK$ -فضا نامیده می‌شود، اگر  $(X_d, \|\cdot\|_{X_d})$  فضای باناخ باشد و  $\pi_i$ ، برای هر  $i \in I$  عملگری پیوسته از  $X_d$  به  $\mathbb{C}$  باشد.

تعریف ۲.۰۲. خانواده  $\{f_i\}_{i \in I} \subseteq X^*$  یک دنباله  $X_d$ -بسل برای فضای باناخ  $X$  با دوگان  $X^*$  نامیده می‌شود، اگر ثابت مثبت  $B$  وجود داشته باشد و برای هر  $x \in X$  داشته باشیم

$$\{f_i(x)\}_{i \in I} \in X_d,$$

و

$$\|f_i(x)\}_{i \in I}\|_{X_d} \leq B\|x\|_X.$$

<sup>5</sup> Sung<sup>4</sup> Aldroubi<sup>3</sup> Grochenig<sup>2</sup> Scheffer<sup>1</sup> Duffen

\* ارائه‌دهنده

تعریف ۳.۲. دنباله  $\{f_i\}_{i \in I} \subseteq X^*$  یک  $X_d$ -قاب برای  $X$  نامیده می‌شود، هرگاه دنباله  $X_d$ -بسل و مقادیر  $0 < A \leq B < \infty$  وجود داشته باشند، به طوری که

$$A\|x\|_X \leq \|f_i(x)_{i \in I}\|_{X_d} \leq B\|x\|_X,$$

که مقادیر  $A$  و  $B$  کران‌های بالا و پایین  $X_d$ -قاب نامیده می‌شوند.

تعریف ۴.۲.  $X_d$ -قاب  $\{f_i\}_{i \in I}$  یک قاب باناخ برای  $X$  نسبت  $X_d$  نامیده می‌شود، هرگاه عملگر خطی

$$S_l : X_d \longrightarrow X$$

وجود داشته باشد به طوری که برای همه  $x \in X$  داشته باشیم:

$$S_l(\{f_i(x)\}_{i \in I}) = x.$$

تعریف ۵.۲. دنباله  $\{x_i\}_{i \in I} \subseteq X$  یک دنباله  $X_d^*$ -بسل برای  $X^*$  است، اگر برای هر  $f \in X^*$  داشته باشیم

$$\{f(x_i)\}_{i \in I} \in X_d^*$$

و یک  $X_d^*$ -قاب برای  $X^*$  با کران‌های قاب  $0 < A \leq B < \infty$  نامیده می‌شود، اگر

$$\{f(x_i)\}_{i \in I} \in X_d^*$$

و

$$A\|f\|_{X^*} \leq \|\{f(x_i)\}_{i \in I}\|_{X_d^*} \leq B\|f\|_{X^*} \quad \forall f \in X^*$$

باشد.

قضیه ۶.۲. فرض کنید  $\{x_i\}_{i \in I} \subseteq X$  و  $\{f_i\}_{i \in I} \subseteq X^*$  باشند. در این صورت

(i)  $\{x_i\}_{i \in I}$  یک دنباله  $X_d^*$ -بسل برای  $X^*$  با کران بسل  $B$  است، اگر و تنها اگر سری  $\sum_{i \in I} c_i x_i$  برای هر  $c \in X_d$  در  $X$

همگرا و نامساوی زیر برقرار باشد:

$$\left\| \sum_{i \in I} c_i x_i \right\|_X \leq B\|c\|_{X_d}.$$

(ii)  $\{f_i\}_{i \in I}$  یک دنباله  $X_d$ -بسل برای  $X$  با کران بسل  $B$  است، اگر و تنها اگر سری  $\sum_{i \in I} d_i f_i$  برای هر  $d \in X_d^*$  در

$X^*$  همگرا و نامساوی زیر برقرار باشد:

$$\left\| \sum_{i \in I} d_i f_i \right\|_{X^*} \leq B\|d\|_{X_d^*}.$$

□

اثبات. به مرجع [۵] مراجعه شود.

### ۳. قاب‌های باناخ دوگان

تعریف ۱.۳. فرض کنید  $\{f_i\}_{i \in I} \subseteq X^*$  و  $\{x_i\}_{i \in I} \subseteq X$  به ترتیب دنباله‌های  $X_d$ -بسل و  $X_d^*$ -بسل برای  $X$  و  $X^*$  باشند. در این صورت:

(i)  $\{f_i\}_{i \in I}$  یک قاب باناخ دوگان برای  $\{x_i\}_{i \in I}$  در  $X$  نسبت به  $X_d$  است، اگر

$$x = \sum_{i \in I} f_i(x) x_i \quad \forall x \in X,$$

نسبت به توپولوژی نرم روی  $X$  باشد.

(ii)  $\{x_i\}_{i \in I}$  یک قاب باناخ دوگان برای  $\{f_i\}_{i \in I}$  در  $X^*$  نسبت به  $X_d^*$  است، اگر

$$f = \sum_{i \in I} f(x_i) f_i \quad \forall f \in X^*,$$

نسبت به توپولوژی نرم روی  $X^*$  باشد.

قضیه ۲.۳. فرض کنید  $\{x_i\}_{i \in I}$  و  $\{f_i\}_{i \in I}$  دنباله‌های  $X_d$ -بسل و  $X_d^*$ -بسل به ترتیب برای  $X$  و  $X^*$  باشند. در این صورت عبارت‌های زیر معادل‌اند:

(i)  $\{f_i\}_{i \in I}$  یک قاب باناخ دوگان برای  $\{x_i\}_{i \in I}$  در  $X$  نسبت به  $X_d$  می‌باشد؛

- (ii)  $\{x_i\}_{i \in I}$  یک قاب باناخ دوگان برای  $\{f_i\}_{i \in I}$  در  $X^*$  نسبت به  $X_d^*$  می‌باشد؛  
 (iii) برای هر  $f \in X^*$  و  $x \in X$  داریم:  $f(x) = \sum_{i \in I} f_i(x) f(x_i)$

اثبات.  $i \rightarrow ii$  فرض کنید  $f \in X^*$  دلخواه باشد، پس با استفاده قضیه ۶.۲ سری  $\sum_{i \in I} f(x_i) f_i$  همگرا در  $X^*$  می‌باشد. برای هر  $x \in X$  داریم:

$$f(x) = f\left(\sum_{i \in I} f_i(x) x_i\right) = \sum_{i \in I} f_i(x) f(x_i) = \left(\sum_{i \in I} f(x_i) f_i\right)(x).$$

نشان می‌دهد که  $f = \sum_{i \in I} f(x_i) f_i$  می‌باشد.

□

$iii \rightarrow i$  و  $ii \rightarrow iii$  بدیهی است.

لم ۳.۳. هر قاب باناخ دوگان یک قاب باناخ است.

اثبات. فرض کنید  $\{f_i\}_{i \in I}$  یک قاب باناخ دوگان برای  $\{x_i\}_{i \in I}$  در  $X$  نسبت به  $X_d$  باشد و  $U$  و  $V$  به ترتیب عملگرهای تجزیه و ترکیب برای  $\{x_i\}_{i \in I}$  و  $\{f_i\}_{i \in I}$  باشند. بنابراین با استفاده از قضیه ۲.۳ برای هر  $f \in X^*$  داریم  $U^*V^*(f) = f$  در این صورت

$$\|f\|_{X^*} = \|U^*V^*(f)\|_{X^*} \leq \|U\| \|V^*(f)\|_{X_d^*} = \|U\| \|\{f(x_i)\}_{i \in I}\|_{X_d^*}.$$

از  $VU = I_X$  کران بالای قاب برای  $\{x_i\}_{i \in I}$  به دست می‌آید. به طور مشابه می‌توانیم نشان دهیم که  $\{f_i\}_{i \in I}$  یک قاب باناخ برای  $X$  نسبت به  $X_d$  می‌باشد. □

تعریف ۴.۳. فرض کنید  $\{f_i\}_{i \in I}$  و  $\{x_i\}_{i \in I}$  دنباله‌های  $X_d$ -بسل و  $X_d^*$ -بسل به ترتیب برای  $X$  و  $X^*$  باشند، اگر یکی از شرایط قضیه ۲.۳ برقرار باشد. به جفت  $(\{x_i\}_{i \in I}, \{f_i\}_{i \in I})$  یک قاب باناخ دوگان گفته می‌شود.

قضیه ۵.۳. فرض کنید  $\{f_i\}_{i \in I}$  یک قاب باناخ برای  $X$  نسبت به  $X_d$  باشد. در این صورت دنباله‌های  $X_d^*$ -بسل  $\{\tilde{x}_i\}_{i \in I}$  برای  $X^*$  وجود دارند به طوری که  $(\{\tilde{x}_i\}_{i \in I}, \{f_i\}_{i \in I})$  یک قاب باناخ دوگان برای  $X$  است.

اثبات. فرض کنید  $U$  و  $S_l$  عملگرهای تجزیه و قاب برای  $\{f_i\}_{i \in I}$  باشند. قرار دهید  $\tilde{x}_i = S_l(e_i)$  که  $\{e_i\}_{i \in I}$  یک پایه شود از بردارهای یک استاندارد  $X_d$  است. ابتدا نشان می‌دهیم که  $\{\tilde{x}_i\}_{i \in I}$  یک دنباله  $X_d^*$ -بسل برای  $X^*$  است. فرض می‌کنیم  $c \in X_d$  و  $m, n \in \mathbb{N}$  که  $m > n$  باشد.

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i \in I_m - I_n} c_i \tilde{x}_i \right\|_X &= \left\| \sum_{i \in I_m - I_n} c_i S_l e_i \right\|_X \\ &= \left\| S_l \left( \sum_{i \in I_m - I_n} c_i e_i \right) \right\|_X \\ &\leq \|S_l\| \left\| \sum_{i \in I_m - I_n} c_i e_i \right\|_{X_d} \end{aligned}$$

بنابراین برای هر  $c \in X_d$ ، سری  $\sum_{i \in I} c_i e_i$  همگراست. نتیجه می‌دهد که  $\left\{ \sum_{i \in I_n} c_i \tilde{x}_i \right\}_{n \in \mathbb{N}}$  یک دنباله کوشی است، لذا همگرا در  $X$  است. حال قضیه ۶.۲ نتیجه می‌دهد که  $\{\tilde{x}_i\}_{i \in I}$  یک دنباله  $X_d^*$ -بسل برای  $X^*$  است. به علاوه برای هر  $x \in X$  داریم:

$$x = S_l U(x) = S_l \left( \sum_{i \in I} f_i(x) e_i \right) = \sum_{i \in I} f_i(x) S_l e_i = \sum_{i \in I} f_i(x) \tilde{x}_i.$$

یعنی  $(\{x_i\}_{i \in I}, \{f_i\}_{i \in I})$  یک قاب باناخ دوگان برای  $X$  است. □

### مراجع

1. P. G. Casazza, O. Christensen, D. T. Stoeva, *Frame expansions in separable Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. 307(2005) 710-723.
2. P. G. Casazza, D. Han, D. Larson, *Frame expansions for Banach spaces*, Contemp. Math. 247(1999) 149-182.
3. O. Christensen, *An introductory course of frames and bases*, Birkhauser, Boston, 2008.
4. O. Christensen, " *An Introduction to Frame and Riesz Bases*", Brkhauser, Boston -Basel-Berlin, 2002.
5. S. karimzad, M.s. Asgari, *On the duality of banach frames*, U.P.B. Sci. Bull. Series A, Vol. 77, ISS. 03, 2015.
6. I. Singer, *Bases in Banach Spaces II*, Springer, 1981.
7. H. Zhang, J. Zhang, *frames, Riesz bases, and sampling expansions in Banach spaces via semi- inner products*, Appl.Comput. Harmon. Anal. 31(1)(2011) 1-25.

پست الکترونیکی: [asma.sahouee2161@yahoo.com](mailto:asma.sahouee2161@yahoo.com)

پست الکترونیکی: [zahrafarзад2928@gmail.com](mailto:zahrafarзад2928@gmail.com)

پست الکترونیکی: [Farahmand132@yahoo.com](mailto:Farahmand132@yahoo.com)

برد عددی عملگر ترکیبی وزن دار  $C_{\psi,\varphi}$  وقتی که  $|\varphi(z)| < 1$ 

اسما نگهداری\*

دانشجوی دکتری، گروه ریاضی، واحد شیراز، دانشگاه آزاد اسلامی، شیراز، ایران

چکیده. در این مقاله برد عددی عملگر ترکیبی  $C_{\psi,\varphi}$  روی فضای  $\mathcal{F}^2$  را با شرط  $\varphi(z) = az + b$  و  $a, b \in \mathbb{C}$  و  $|a| < 1$  بررسی کرده و در نهایت شرایطی را بدست می آوریم که درون برد عددی عملگر ترکیبی  $C_{\psi,\varphi}$  قرار گیرد. واژه های کلیدی: فضای فوک، عملگر ترکیبی وزن دار، برد عددی. طبقه بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 47B33.

## ۱. مقدمه

مقالات زیادی در زمینه عملگرهای ترکیبی وزن دار در فضاهای متفاوت وجود دارد. کراننداری و فشردگی عملگرهای ترکیبی در فضای فوک روی  $\mathbb{C}^n$  توسط کارسوال و همکارانش مورد بررسی قرار گرفته است. در [۸] له شرایط ساده تری برای فشردگی و کراننداری  $C_{\psi,\varphi}$  بدست آورد. بعلاوه عملگرهای ترکیبی وزن دار طولپا و نرمال را روی فضای فوک بدست آورد. عملگرهای ترکیبی وزن دار یکانی و طیف آنها روی فضای فوک روی  $\mathbb{C}^n$  توسط زائو در [۹] بررسی شده است. همچنین تعداد زیادی مقاله که برد عددی عملگرهای ترکیبی و عملگرهای ترکیبی وزن دار را روی فضای هاردي بررسی کرده اند وجود دارد [۱، ۲، ۳، ۴، ۶، ۷]. در این مقاله با شرط اینکه  $\varphi(z) = az + b$  و  $a, b \in \mathbb{C}$  و  $|a| < 1$  برد عددی عملگر ترکیبی  $C_{\psi,\varphi}$  را بررسی می کنیم و مشخص می کنیم که چه زمانی صفر درون برد عددی این عملگر ترکیبی وزن دار قرار می گیرد.

تعریف ۱.۱. برد عددی عملگر خطی کراندار  $T$  روی فضای هیلبرت  $H$  را با  $W(T)$  نمایش داده و برابر است با

$$W(T) = \{\langle Tf, f \rangle : \|f\| = 1\}$$

تعریف ۲.۱. فضای فوک شامل همه توابع تحلیلی روی صفحه مختلط  $\mathbb{C}$  می باشد، بطوریکه برای هر  $f \in \mathcal{F}^2$

$$\int |f(z)|^2 d\mu(z) < \infty$$

، بطوریکه  $d\mu(z) = \pi^{-1}e^{-|z|^2}dA(z)$  و  $dA$  اندازه لبگ روی  $\mathbb{C}$  است. ضرب داخلی روی فضای فوک برای هر  $f, g \in \mathcal{F}^2$  به صورت زیر تعریف می شود

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{C}} f(z)\overline{g(z)}d\mu(z).$$

مجموعه  $\{e_m(z) = \frac{z^m}{\sqrt{m!}} : m \geq 0\}$  یک پایه متعامد برای این فضا است. برای  $w \in \mathbb{C}$  تابع مولد هسته ای  $\mathcal{F}^2$  به صورت زیر بدست می آید

$$K_w(z) = e^{\overline{w}z}.$$

فرض کنید  $k_w$  هسته تولید شده باشد و با

$$k_w = K_w / \|K_w\|$$

بدست می آید، که  $\|K_w\| = e^{\frac{|w|^2}{2}}$ .

تعریف ۳.۱. اگر  $\psi$  و  $\varphi$  توابعی تحلیلی روی  $\mathbb{C}$  باشند، برای هر  $f \in \mathcal{F}^2$  عملگر ترکیبی وزن دار  $C_{\psi,\varphi}$  را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$C_{\psi,\varphi}(f) = \psi.(f \circ \varphi).$$

## ۲. نتایج اصلی

**قضیه ۱.۰.۲.** فرض کنید که  $0 < |a| < 1$ ،  $\varphi(z) = az + b$  و  $\psi$  یک تابع تحلیلی روی  $\mathbb{C}$  باشد. همچنین فرض کنید که  $\psi(\frac{b}{1-a}) \neq 0$  و  $C_{\psi,\varphi}$  یک عملگر ترکیبی کراندار روی فضای  $\mathcal{F}^2$  باشد. فرض کنید که  $n$  یک عدد صحیح نامنفی و  $m$  یک عدد صحیح مثبت باشد. در اینصورت  $W(C_{\psi,\varphi})$  شامل یک بیضی با کانونهای  $a^n$  و  $a^{m+n}$  و قطر بزرگ

$$\sqrt{|a^n - a^{m+n}|^2 + \frac{|\hat{q}_m a^n \sqrt{(m+n)!}|^2}{m!n!}}$$

و قطر کوچک

$$\frac{|\hat{q}_m| \sqrt{(m+n)!}}{\sqrt{m!n!}}$$

می باشد.

**قضیه ۲.۰.۲.** فرض کنید که  $0 < |a| < 1$ ،  $\varphi(z) = az + b$  و  $\psi$  یک تابع تحلیلی روی  $\mathbb{C}$  باشد. فرض کنید  $\psi(\frac{b}{1-a}) \neq 0$  و  $C_{\psi,\varphi}$  روی فضای  $\mathcal{F}^2$  فشرده باشد. اگر  $a$  یک عدد حقیقی مثبت نباشد، در اینصورت  $W(C_{\psi,\varphi})$  بسته و شامل صفر می باشد.

**قضیه ۳.۰.۲.** فرض کنید که  $0 < |a| < 1$ ،  $\varphi(z) = az + b$  و  $\psi$  یک تابع تحلیلی روی  $\mathbb{C}$  باشد. فرض کنید که  $n$  یک عدد صحیح نامنفی و  $m$  یک عدد صحیح مثبت باشد. همچنین فرض کنید که  $C_{\psi,\varphi}$  روی فضای  $\mathcal{F}^2$  کراندار باشد. اگر  $\psi(\frac{b}{1-a}) = 0$ ، در اینصورت  $W(C_{\psi,\varphi})$  شامل یک قرص بسته به مرکز  $0$  و شعاع

$$\frac{|\hat{q}_m a^n \sqrt{(n+m)!}|}{2}$$

می باشد.

فرض کنید  $\varphi \equiv b$  که  $b$  یک عدد مختلط و  $\psi$  یک تابع تحلیلی مخالف صفر باشد. (الف) اگر  $c$  یک عدد مختلط مخالف صفر و  $K_b = \frac{c}{\|\psi\|} \psi$ ، در اینصورت  $W(C_{\psi,\varphi})$  پاره خط بسته از  $0$  تا  $\bar{c}$  است.

(ب) اگر  $\psi \perp K_b$ ، در اینصورت  $W(C_{\psi,\varphi})$  یک قرص بسته به مرکز صفر و شعاع  $\frac{\|\psi\|}{2} e^{\frac{|b|}{2}}$  می باشد.

(ج) در غیر اینصورت  $W(C_{\psi,\varphi})$  یک بیضی بسته با کانونهای  $0$  و  $\psi(b)$  است.

**مثال ۴.۰.۲.** ex ۱ (الف) فرض کنید  $\varphi(Z) = \frac{1}{2}Z - \frac{1}{2}$  و  $\psi(z) = e^z$ . عملگر ترکیبی وزن دار  $C_{\psi,\varphi}$  فشرده است [۷، نتیجه ۴.۰.۲]. به راحتی دیده می شود که  $1$  نقطه ثابت  $\varphi$  و

$$q(z) = eK_{\frac{1}{2}}(z).$$

سری نمایش  $q$  در  $\mathcal{F}^2$  برابر است با

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{e}{2^j \sqrt{j!}} \frac{z^j}{\sqrt{j!}}.$$

فرض می کنیم  $m = n = 1$ . با استفاده از قضیه ۱.۰.۲،  $W(C_{\psi,\varphi})$  شامل یک بیضی با کانونهای  $\frac{1}{2}$  و  $\frac{1}{2}$  و قطر بزرگ  $\sqrt{\frac{1}{16} + \frac{e^2}{8}}$ . این بیان می کند که  $0$  درون  $W(C_{\psi,\varphi})$  قرار می گیرد.

(ب) فرض کنید که  $\varphi(Z) = \frac{1}{2}Z + \frac{1}{2}$  و  $\psi(z) = K_1(z) - e^{-1}$ . عملگر ترکیبی وزن دار  $C_{\psi,\varphi}$  یک عملگر ترکیبی وزن دار کراندار است زیرا

$$C_{\psi,\varphi} = C_{K_1,\varphi} - e^{-1}C_{\varphi}.$$

داریم  $\psi(-1) = 0$  و  $\psi(-1) = e^{-1}(e^{\frac{1}{2}} - e^{\frac{1}{2}})$  و  $q(z) = e^{\frac{1}{2}}(e^{z-1} - e^{-1}) = e^{-1}(e^{\frac{1}{2}z} - e^{\frac{1}{2}})$ . به راحتی مشاهده می شود که سری نمایش  $q$  در فضای  $\mathcal{F}^2$  بصورت

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{3^j - 1}{e^{\frac{1}{2}j} \sqrt{j!}} \frac{z^j}{\sqrt{j!}}.$$

فرض می کنیم  $n = 0$  و  $m = 1$ . با استفاده از قضیه ۳.۰.۲،  $W(C_{\psi,\varphi})$  شامل قرص بسته به مرکز  $0$  و شعاع  $\frac{1}{2}e$  می باشد.

### مراجع

1. A. Abdollahi, The numerical ranges of a composition operator with conformal automorphism symbol, *Linear Algebra and its Applications* **408** (2005), 177-188.
2. P. S. Bourdon and J. H. Shapiro, The numerical ranges of automorphic composition operators, *J. Math. Appl.* **251** (2000), 839-854.
3. P. S. Bourdon and J. H. Shapiro, When is zero in the numerical range of a composition operator?, *Integral Equations Operator Theory* **44** (2002), 410-441.
4. G. Gunatillake, M. Jovovic and W. Smith, Numerical ranges of weighted composition operators, *J. Math. Anal. Appl.* **413** (2014), 458-475.
5. K. E. Gustafson, and K. M. Rao, *The Numerical Range, The field of Values of Linear Operators and Matrices*, Springer, New York, 1997.
6. M. T. Heydari and A. Abdollahi, The numerical ranges of finite order elliptic automorphism composition operators, *Linear Algebra and its Applications* **483** (2015), 128-138.
7. V. Matache, Numerical ranges of composition operators, *Linear Algebra Appl.* **331** (2001), 61-74.
8. T. Le, Normal and isometric weighted composition operators on the Fock space, *Bull. London Math. Soc.* **46** (2014), 847-856.
9. L. Zhao, Unitary weighted composition operators on the Fock space of  $\mathbb{C}^n$ , *Complex Anal. Oper. Theory* **8** (2014), 581-590.
10. L. Zhao and C. Pang, A class of weighted composition operators on the Fock space, *Journal of Mathematical Research with Applications*, **35** (3) (2015), 303-310.

پست الکترونیکی: [asma.negahdari9219@gmail.com](mailto:asma.negahdari9219@gmail.com)

ارائه‌های پوستری

آنالیز عددی و بهینه‌سازی



## محاسبه اولین مقدار ویژه و تابع ویژه یک عملگر غیرخطی با روش توانی معکوس

مریم عباسی هرمزی\*  
بخش ریاضی، دانشگاه شیراز، شیراز، ایران  
و سید عباس محمدی  
دانشکده ریاضی، دانشگاه یاسوج، یاسوج، ایران

چکیده. عملگر  $p$ -لاپلاسین یکی از مهم‌ترین ابزارهای ریاضی در مدل‌سازی پدیده‌های غیرخطی است. در این مقاله با استفاده از ایده روش توانی معکوس یک الگوریتم عددی برای محاسبه اولین مقدار ویژه این عملگر معرفی می‌شود. ثابت می‌شود این الگوریتم به مقدار ویژه اصلی و تابع ویژه نظیر آن همگرا است. واژه‌های کلیدی:  $p$ -لاپلاسین، روش توانی معکوس. طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 35P30, 35J92, 47J10.

### ۱. مقدمه

برای  $1 < p < \infty$ ، کمیت  $\lambda_1(\Omega)$  را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\lambda_1(\Omega) = \min_{u \in W_0^{1,p}(\Omega), u \neq 0} \frac{\int_{\Omega} a(x) |\nabla u|^p dx}{\int_{\Omega} |u|^p dx},$$

که  $a(x) \in L^\infty(\Omega)$  و  $a(x) > 0$  است. کمینه‌ساز در فرمول تغییراتی بالا که تابع ویژه متناظر  $\lambda_1(\Omega)$  نام دارد، جواب معادله بیضوی زیر است

$$(1) \quad \begin{cases} -\operatorname{div}(a(x) |\nabla u|^{p-2} \nabla u) = \lambda_1(\Omega) |u|^{p-2} u & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

برای  $p = 2$  و  $a(x) \equiv 1$  به مساله مقدار ویژه لاپلاسین می‌رسیم.

در واقع تابع غیرصفر  $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  جواب معادله (۱) است و تابع ویژه متناظر  $\lambda_1(\Omega)$  نامیده می‌شود اگر در شکل تغییراتی زیر صدق کند

$$\int_{\Omega} a(x) |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi dx = \lambda_1(\Omega) \int_{\Omega} |u|^{p-2} u \varphi dx, \quad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

ثابت می‌شود  $\lambda_1(\Omega)$  کوچک‌ترین مقدار ویژه مثبت معادله (۱) است و این مقدار ویژه،  $\lambda_1(\Omega)$ ، ساده و مجزا بوده و تابع ویژه متناظر آن در ناحیه  $\Omega$  تغییر علامت نمی‌دهد [۱]، [۲]، [۳].

در ادامه با استفاده از ایده روش توانی معکوس، یک روش تکراری برای محاسبه  $\lambda_1(\Omega)$  توسعه داده می‌شود و همگرایی الگوریتم عددی ثابت خواهد شد. مثال‌های عددی کارایی این روش را نشان می‌دهند. پیش از این روش توانی معکوس برای یافتن مقدار ویژه  $p$ -لاپلاسین وزن دار در [۴] به کار رفته است.

### ۲. الگوریتم عددی

در آغاز تخمینی از تابع ویژه اول،  $u_0$ ، به صورت

$$\begin{cases} u_0 \geq 0 & \text{in } \Omega, \\ u_0 = 0 & \text{on } \partial\Omega, \\ \|u_0\|_{L^p(\Omega)} = 1, \end{cases}$$

انتخاب می‌کنیم. سپس مقدار  $\lambda_0$  را به شکل زیر محاسبه می‌کنیم

$$\lambda_0 = \int_{\Omega} a(x) |\nabla u_0|^p dx.$$

\* ارائه‌دهنده

آن‌گاه مساله (۱) را با سمت راست  $\lambda_{\circ} u_{\circ}^{p-1}$  حل می‌کنیم. به عبارتی مساله مقدار ویژه بدین ترتیب به یک مساله پواسون تبدیل می‌شود که با استفاده از روش عناصر متناهی و روش نیوتن بهبود یافته حل می‌شود. الگوریتم، دنباله‌ای از  $u_k$  ها و  $\lambda_k$  ها تولید می‌کند چنان که  $\lambda_k$  ها همگرا به اولین مقدار مقدار ویژه مساله و  $u_k$  ها همگرا به تابع ویژه متناظر خواهند شد.

الگوریتم عددی حل مساله (۱)

ورودی:  $\varepsilon, \lambda_{\circ}, u_{\circ}$   
 خروجی: دنباله  $\lambda_k$  ها و  $u_k$  ها  
 گام  $k$ : با استفاده از  $\lambda_k$  ها و  $u_k$  ها، مساله دیریکله زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \lambda_k u_k^{p-1} & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

قرار دهید  $\lambda_{k+1} = \int_{\Omega} a(x)|\nabla u_{k+1}|^p dx$  و  $u_{k+1} = \frac{u}{\|u\|_{L^p(\Omega)}}$   
 اگر  $|\lambda_{k+1} - \lambda_k| > \varepsilon$  باشد آن‌گاه  $k = k + 1$  و این مرحله را دوباره تکرار کنید.

قضیه ۱.۲. فرض کنید  $\{\lambda_k\}_1^{\infty}$  و  $\{u_k\}_1^{\infty}$  از الگوریتم بالا به دست آمده‌اند. آن‌گاه  $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \lambda$  و  $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = u$  اولین تابع ویژه (۱) متناظر  $\lambda$  است.

### ۳. مثال عددی

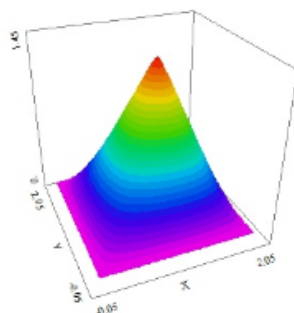
مثال ۱.۳. در این مثال  $\Omega = [0, 2] \times [0, 2]$  در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم  $p = 5$ . همچنین

$$a(x, y) = \begin{cases} 2 & 0 < x < 1, \\ 1 & 1 < x < 2, \end{cases}$$

و در الگوریتم عددی  $\varepsilon = 5 \times 10^{-2}$ . در این صورت نتایج جدول زیر از الگوریتم عددی به دست می‌آیند.

جدول ۱. مقدار ویژه اصلی حاصل از تکرارهای الگوریتم عددی

$\lambda_1^{(1)}$	۱۵/۱۵۸
$\lambda_1^{(2)}$	۱۵/۳۵۴
$\lambda_1^{(3)}$	۱۵/۵۶۴
$\lambda_1^{(4)}$	۱۵/۶۷۹
$\lambda_1^{(5)}$	۱۵/۷۴۲
$\lambda_1^{(6)}$	۱۵/۷۶۵



شکل ۱. تابع ویژه متناظر مقدار ویژه اصلی به دست آمده از الگوریتم عددی.

چنان که از جدول بالا پیداست،  $\lambda_1 = 15/7$  و تابع ویژه نظیر آن در شکل زیر نمایش داده شده است.

مثال ۲.۳. در این مثال ناحیه  $\Omega$ ، مثلثی است که سه نقطه  $(0, 0)$ ،  $(2, 0)$ ،  $(1, 2)$  را به هم وصل می‌کند و قرار می‌دهیم  $p = 5$  هم‌چنین

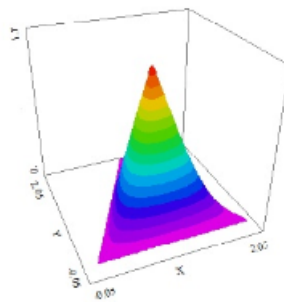
$$a(x, y) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1, \\ 2 & 1 < x < 2, \end{cases}$$

در این صورت نتایج زیر از الگوریتم عددی به دست می‌آید.

جدول ۲. مقدار ویژه اصلی حاصل از تکرارهای الگوریتم عددی

$\lambda_1^{(1)}$	۱۹۸/۸۶۶
$\lambda_1^{(2)}$	۱۴۸/۸۵۵
$\lambda_1^{(3)}$	۱۴۲/۴۹۸
$\lambda_1^{(4)}$	۱۴۱/۵۱۷
$\lambda_1^{(5)}$	۱۴۱/۵۸۴

و تابع ویژه نظیر آن در شکل زیر نمایش داده شده است.

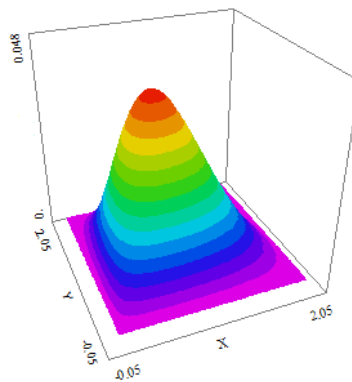


شکل ۲. تابع ویژه متناظر مقدار ویژه اصلی به دست آمده از الگوریتم عددی.

مثال ۳.۳. در این مثال ناحیه مساله برای  $\Omega$ ، را به صورت  $\Omega = [0, 2] \times [0, 2]$  در نظر می‌گیریم که  $a(x, y) = \exp(x + y)$ ،  $\varepsilon = 5 \times 10^{-2}$ ،  $p = 2/1$  و تابع ویژه‌ی نظیر آن در شکل زیر نمایش داده شده است.

جدول ۳. مقدار ویژه اصلی حاصل از تکرارهای الگوریتم عددی

$\lambda_1^{(1)}$	۱/۰۵۵
$\lambda_1^{(2)}$	۱/۴۲۸
$\lambda_1^{(3)}$	۱/۶۵۰
$\lambda_1^{(4)}$	۱/۷۶۶
$\lambda_1^{(5)}$	۱/۸۲۴
$\lambda_1^{(6)}$	۱/۸۵۲



شکل ۳. تابع ویژه متناظر مقدار ویژه اصلی به دست آمده از الگوریتم عددی.

### مراجع

1. P. Juutinen, P. Lindqvist, and J. JManferedi , The  $\infty$ -eigenvalue problem, Arch. Ration. Mech. Anal. ,(1999) 89 – 105.
2. P. Lindqvist, A nonlinear eigenvalue problem, Lecture Notes.
3. P. Lindqvist, On the equation  $\text{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + |u|^{p-2}u = 0$ . Proc. Amer. Math. Soc. ,(1990) 157 – 164.
4. F.Bozorgnia, Convergence of inverse power method for first eigenvalue of p-Laplace operator, Numer. Func. Anal. Opt. 37 ,(2016) 1378 – 1380.

پست الکترونیکی: [ma.abasi313@gmail.com](mailto:ma.abasi313@gmail.com)  
 پست الکترونیکی: [mohammadi@yu.ac.ir](mailto:mohammadi@yu.ac.ir)

## حل دستگاه معادلات انتگرال-دیفرانسیل ولترا-فردهلم کسری با استفاده از توابع بلوک پالس

حسین احمدیان مقدم \*

دانشکده ریاضی، دانشگاه حکیم سبزواری، سبزوار، ایران

و عبدالله قلی زاده

دانشکده ریاضی، دانشگاه حکیم سبزواری، سبزوار، ایران

چکیده. در این مقاله به حل دستگاه معادلات انتگرال-دیفرانسیل ولترا-فردهلم کسری بر اساس توابع بلوک پالس در بازه  $[0, 1]$  پرداخته می شود. ابتدا توابع بلوک پالس و خواص آن را معرفی کرده و ماتریس عملیاتی آن را بدست آورده و با تقریب توابع معلوم و مجهول این دستگاه، با استفاده از توابع بلوک پالس دستگاه معادلات انتگرال-دیفرانسیل ولترا-فردهلم کسری به یک دستگاه جبری خطی تبدیل می شود. در نهایت به منظور کارایی و دقت روش یک مثال عددی ارائه خواهیم نمود. که با استفاده از نرم افزار متلب مقادیر مثال در جداول جهت بررسی خطای مطلق و تخمینی درج شده اند.

واژه های کلیدی: توابع بلوک پالس، ماتریس های عملیاتی، معادلات انتگرال دیفرانسیل ولترا فردهلم، حل عددی. طبقه بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 45G15, 45D05, 45B05, 34K28.

### ۱. پیش گفتار

مدل های ریاضی کاربردهای بسیاری در مسائل فیزیک و مهندسی دارند که اغلب بصورت معادلات دیفرانسیل، معادلات انتگرالی کسری و دستگاه معادلات انتگرال-دیفرانسیل ظاهر می گردند. از طرف دیگر برای این مدل ها جواب های تحلیلی وجود ندارند و یا بسیار مشکل بدست می آیند. لذا روش های عددی جایگاه ویژه ای در مسائل دارند. در سال های اخیر چندین روش عددی برای حل دستگاه معادلات انتگرال دیفرانسیل ارائه شده است، از جمله روش های لاگرانژ، تجزیه آدومیان، رانگ کوتا، توابع هار و ... . در این مقاله روشی عددی برای حل دستگاه معادلات انتگرال دیفرانسیل ولترا-فردهلم کسری بر اساس توابع بلوک پالس ارائه شده است. ابتدا به بیان تعاریف و قضایای مورد نیاز پرداخته می شود.

### ۲. تعاریف و قضایا

تعریف ۱.۱. عملگر انتگرال کسری ریمان-لیوویل از مرتبه  $\alpha$  برای تابع حقیقی  $u$  بصورت [۲]

$$I^\alpha u(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} u(s) ds & \alpha > 0 \\ u(t) & \alpha = 0 \end{cases}$$

تعریف شده که در آن  $\Gamma(\alpha)$  تابع گاما می باشد.

تعریف ۲.۲. مشتق کسری کاپوتو<sup>۱</sup> برای تابع  $u(t)$  بصورت زیر تعریف می شود:

$$D^\alpha u(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} u^n(s) ds \quad n-1 < \alpha < n$$

تعریف ۳.۲. یک مجموعه از توابع بلوک پالس (BPFs) در بازه  $[0, 1]$  بصورت [۱]

$$\phi_i(t) = \begin{cases} 1 & (i-1)h \leq t < ih \quad i = 1, 2, \dots, m \\ 0 & \text{دیگر نقاط} \end{cases}$$

تعریف می شود که  $h = \frac{1}{m}$  و بردار تابع  $\Phi(t)$  بصورت

$$\Phi(t) = [\phi_1(t) \quad \phi_2(t) \quad \dots \quad \phi_m(t)]^T \quad t \in [0, 1]$$

<sup>1</sup> caputo

\* ارائه دهنده

بدست می‌آید. همچنین اگر  $V_{m \times 1}$  و  $\tilde{V} = \text{diag}(V)$  باشد آنگاه :

$$(1) \quad \Phi(t)\Phi(t)^T V = \tilde{V}\Phi(t)$$

لم ۴.۲. تابع  $u(t) \in L^2([0, 1])$  را می‌توان با استفاده از توابع بلوک پالس بصورت

$$(2) \quad u(t) \cong \sum_{i=1}^m u_i \phi_i(t) \cong c^T \Phi(t) = \Phi(t)^T c$$

تقریب زد که  $u_i = \frac{1}{h} \int_0^1 u(t) \phi_i(t) dt$ . همچنین می‌توان تابع دو متغیره  $k(t, s) \in L^2([0, 1] \times [0, 1])$  را بصورت

$$(3) \quad k(t, s) \cong \Phi(t)^T K \Phi(s)$$

تقریب زد که در آن  $K = [k_{ij}]_{m \times m}$  و  $k_{ij} = \frac{1}{h^2} \int_0^1 \int_0^1 k(t, s) \phi_i(t) \phi_j(s) dt ds$ .

لم ۵.۲. ماتریس عملیاتی انتگرال توابع بلوک پالس را با  $P$  نشان داده و بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\int_0^t \phi_i(\tau) d\tau \cong P_{m \times m} \Phi(t)$$

که در آن

$$(4) \quad P_{m \times m} = \frac{h}{2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

لم ۶.۲. اگر از  $\Phi(t)$  انتگرال کسری از مرتبه  $\alpha$  گرفته شود داریم: [۴]

$$I^\alpha \Phi(t) \cong P^\alpha \Phi(t)$$

که در آن

$$P^\alpha = \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 2)} \begin{bmatrix} 1 & \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_{m-1} \\ 0 & 1 & \xi_1 & \dots & \xi_{m-2} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \xi_{m-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad \xi_k = (k+1)^{\alpha+1} - 2k^{\alpha+1} + (k-1)^{\alpha+1}$$

و  $P^\alpha$  را ماتریس عملیاتی انتگرال کسری توابع بلوک پالس گوئیم.

همچنین ماتریس عملیاتی مشتق کسری توابع بلوک پالس را با  $D^\alpha$  نشان داده و داریم:  $D^\alpha P^\alpha = I$ .

تعریف ۷.۲. اگر  $y_n(t)$  و  $y_{n+1}(t)$  مقدار تقریبی برای تابع  $y(t)$  باشند آنگاه خطای مطلق با  $|y(t) - y_n(t)|$  و خطای تخمینی با  $|y_{n+1}(t) - y_n(t)|$  نشان داده می‌شود.

### ۳. آنالیز روش

دستگاه معادلات انتگرال-دیفرانسیل ولترا-فرد هلم کسری زیر را در نظر بگیرید :

$$(5) \quad \begin{cases} D^\alpha y_1(t) = \lambda_1 \int_0^t k_1(t, s) y_1(s) ds + \lambda_2 \int_0^1 k_2(t, s) y_2(s) ds + f_1(t) \\ D^\beta y_2(t) = \lambda_3 \int_0^t k_3(t, s) y_1(s) ds + \lambda_4 \int_0^1 k_4(t, s) y_2(s) ds + f_2(t) \\ y_1(0) = y_2(0) = 0 \end{cases}$$

که در آن پارامترهای  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  و توابع  $f_1(t), f_2(t)$  معلوم و  $y_1(t), y_2(t)$  توابعی مجهول می‌باشند. برای تقریب این دستگاه ابتدا توابع  $D^\alpha y_1(t), D^\beta y_1(t)$  و  $k_i(t, s)$  به صورت زیر تقریب زده می‌شود:

$$\begin{aligned} D^\alpha y_1(t) &\cong Y_1^T D^\alpha \Phi(t) \\ D^\beta y_2(t) &\cong Y_2^T D^\beta \Phi(t) \\ k_i(t, s) &\cong \Phi(t)^T K_i \Phi(s) \quad , \quad (i = 1, \dots, 4) \end{aligned} \quad (6)$$

با استفاده از روابط (۱) و (۴)، قسمت ولترای معادله (۵) بصورت زیر تقریب زده می‌شود.

$$(7) \quad \int_0^t k_i(t, s) y_1(s) ds \cong \int_0^t \Phi(t)^T K_i \Phi(s) \Phi(s)^T Y_1 ds = \Phi(t)^T K_i \tilde{Y}_1 \int_0^t \Phi(s) ds = \Phi(t)^T K_i \tilde{Y}_1 P \Phi(t)$$

همچنین قسمت فردهم این معادله از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید.

$$(8) \quad \int_0^1 K_i(t, s) y_2(s) ds \cong \int_0^1 \Phi(t)^T K_i \Phi(s) \Phi(s)^T Y_2 ds = \Phi(t)^T K_i D Y_2$$

که در آن  $D = h I_{m \times m}$ . با جایگذاری روابط (۶)، (۷) و (۸) در (۵) خواهیم داشت:

$$(9) \quad \begin{cases} Y_1^T D^\alpha \Phi(t) = \lambda_1 \Phi(t)^T K_1 \tilde{Y}_1 P \Phi(t) + \lambda_2 \Phi(t)^T K_2 D Y_2 + f_1(t), \\ Y_2^T D^\beta \Phi(t) = \lambda_3 \Phi(t)^T K_3 \tilde{Y}_1 P \Phi(t) + \lambda_4 \Phi(t)^T K_4 D Y_2 + f_2(t), \\ Y_1^T \phi(\circ) = Y_2^T \phi(\circ) = \circ. \end{cases}$$

اکنون با قرار دادن نقاط نیوتون کاتر  $(t_p = \frac{2p-1}{2m}, p = 1, 2, \dots, m)$  در رابطه (۹)، دستگاه  $2m$  معادله و  $2m$  مجهول زیر بدست می‌آید:

$$(10) \quad \begin{cases} Y_1^T D^\alpha \Phi(t_p) = \lambda_1 \Phi(t_p)^T K_1 \tilde{Y}_1 P \Phi(t_p) + \lambda_2 \Phi(t_p)^T K_2 D Y_2 + f_1(t_p) \\ Y_2^T D^\beta \Phi(t_p) = \lambda_3 \Phi(t_p)^T K_3 \tilde{Y}_1 P \Phi(t_p) + \lambda_4 \Phi(t_p)^T K_4 D Y_2 + f_2(t_p) \\ Y_1^T \Phi(\circ) = Y_2^T \Phi(\circ) = \circ. \end{cases}$$

با حل این دستگاه ضرایب  $Y_1$  و  $Y_2$  را بدست آورده و با قرار دادن این ضرایب در رابطه (۲) جواب تقریبی برای دستگاه بدست می‌آید.

#### ۴. مثال عددی

در این بخش برای نشان دادن کارایی روش مذکور یک مثال عددی برای  $m = 10, 20, 30$  ارائه خواهیم نمود. مقادیر جواب تقریبی، خطای مطلق، خطای تخمینی و جواب دقیق جهت مقایسه با درج درجداول آورده شده‌اند.

مثال ۱۰۴. دستگاه معادلات انتگرال-دیفرانسیل ولترا-فردهم کسری زیر را در نظر بگیرید: [۳]

$$\begin{cases} D^{\circ.5} y_1(t) = \int_0^1 t s^2 y_1(s) ds + \int_0^t (t^2 + s) y_2(s) ds - \frac{\lambda t^{1.5}}{3\sqrt{\pi}} - \frac{t}{5} + \frac{t^4(4t+3)}{12} \\ D^{\circ.5} y_2(t) = \int_0^1 (t + s^2) y_1(s) ds + \int_0^1 t^2 s y_2(s) ds - \frac{\lambda t^{1.5}}{3\sqrt{\pi}} + \frac{t^6}{4} - \frac{t}{3} - \frac{1}{5} \end{cases}$$

جواب‌های دقیق این مساله  $y_1(t) = t^2$  و  $y_2(t) = -t^2$  می‌باشند.

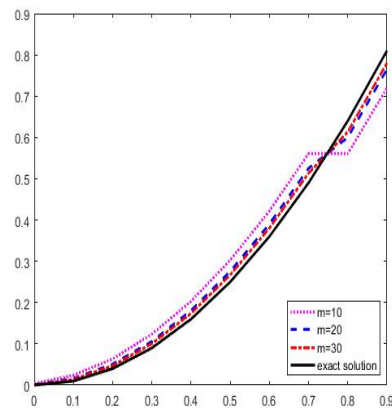
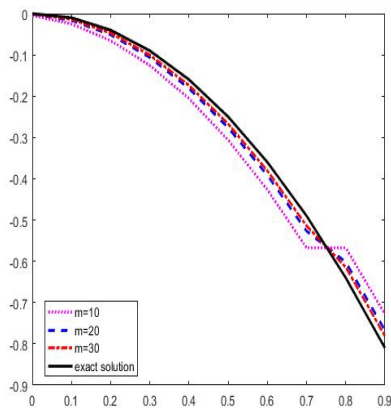


جدول ۱. جواب‌های دقیق و تقریبی تابع  $y_1(t)$  (۱.۴)

$t_i$	$m=10$	خطای مطلق	خطای تخمینی	$m=20$	خطای مطلق	خطای تخمینی	$m=30$	خطای مطلق	خطای تخمینی	جواب دقیق
۰	۰/۰۰۳۹۷۴	۰/۰۰۳۹۷۴	۰/۰۰۰۰۶۸۶	۰/۰۰۰۰۹۹۸	۰/۰۰۰۰۹۹۸	۰/۰۰۰۰۰۹۳	۰/۰۰۰۰۴۴۴	۰/۰۰۰۰۴۴۴	۰/۰۰۰۰۰۲۸	۰
۰/۱	۰/۰۲۳۹۸۶	۰/۰۱۳۹۸۶	۰/۰۰۰۴۱۴۸	۰/۰۰۱۶۰۰۹	۰/۰۰۰۶۰۰۹	۰/۰۰۰۱۴۸۷	۰/۰۰۱۳۷۸۳	۰/۰۰۰۳۷۸۳	۰/۰۰۰۰۸۷۴	۰/۰۱۰۰
۰/۲	۰/۰۶۳۸۲۶	۰/۰۲۳۸۲۶	۰/۰۰۱۱۰۳۷	۰/۰۰۵۰۹۷۴	۰/۰۰۱۰۹۷۴	۰/۰۰۰۴۷۳۴	۰/۰۰۴۷۱۰۲	۰/۰۰۰۷۱۰۲	۰/۰۰۰۲۹۸۸	۰/۰۴۰۰
۰/۳	۰/۱۲۳۵۶۲	۰/۰۳۳۵۶۲	۰/۰۰۲۱۳۶۲	۰/۰۰۵۹۱۴	۰/۰۰۱۵۹۱۴	۰/۰۰۰۹۸۳۷	۰/۰۰۱۰۰۴۱۰	۰/۰۰۰۴۱۰	۰/۰۰۰۶۳۷۰	۰/۰۹۰۰
۰/۴	۰/۲۰۳۱۷۲	۰/۰۴۳۱۷۲	۰/۰۰۳۵۱۱۲	۰/۰۰۸۰۸۲۶	۰/۰۰۲۰۸۲۶	۰/۰۰۱۶۷۹۲	۰/۰۰۱۷۳۷۰۴	۰/۰۰۱۳۷۰۵	۰/۰۰۱۱۰۲۰	۰/۱۶۰۰
۰/۵	۰/۳۰۲۶۲۳	۰/۰۵۲۶۲۳	۰/۰۰۵۲۲۷۲	۰/۰۰۲۷۵۶۹۹	۰/۰۰۲۵۶۹۹	۰/۰۰۲۵۵۹۹	۰/۰۰۲۶۶۹۸۴	۰/۰۰۱۶۹۸۴	۰/۰۰۱۶۹۳۷	۰/۲۵۰۰
۰/۶	۰/۴۲۱۸۷۵	۰/۰۶۱۸۷۵	۰/۰۰۷۲۸۲۷	۰/۰۰۳۹۰۵۲۶	۰/۰۰۳۰۵۲۶	۰/۰۰۳۶۲۵۵	۰/۰۰۳۸۰۲۴۲	۰/۰۰۲۰۲۴۲	۰/۰۰۲۴۱۲۰	۰/۳۶۰۰
۰/۷	۰/۵۶۰۸۷۹	۰/۰۷۰۸۷۹	۰/۰۰۹۶۷۵۳	۰/۰۰۵۲۵۲۹۵	۰/۰۰۳۵۲۹۵	۰/۰۰۴۸۷۵۷	۰/۰۰۵۱۳۴۷۵	۰/۰۰۲۳۴۷۵	۰/۰۰۳۲۵۶۹	۰/۴۹۰۰
۰/۸	۰/۷۱۹۵۷۳	۰/۰۹۰۵۷۳	۰/۰۰۱۲۳۷۱	۰/۰۰۷۶۴۸۰۶	۰/۰۰۴۵۱۹۴	۰/۰۰۱۰۵۰۷	۰/۰۰۸۷۹۸۹۹	۰/۰۰۳۰۱۰۰۱	۰/۰۰۵۶۶۸۱	۰/۸۱۰۰
CPUtime	۱۵/۱۰			۶۴/۳۸			۱۵۸/۰۷			

جدول ۲. جواب‌های دقیق و تقریبی تابع  $y_2(t)$  (۱.۴)

$t_i$	$m=10$	خطای مطلق	خطای تخمینی	$m=20$	خطای مطلق	خطای تخمینی	$m=30$	خطای مطلق	خطای تخمینی	جواب دقیق
۰	-۰/۰۰۴۵۱۳	۰/۰۰۴۵۱۳	۰/۰۰۰۰۸۰۴	-۰/۰۰۱۰۸۹	۰/۰۰۱۰۸۹	۰/۰۰۰۰۱۰۳	-۰/۰۰۰۰۴۷۷	۰/۰۰۰۰۴۷۷	۰/۰۰۰۰۰۳۱	۰
۰/۱	-۰/۰۲۵۰۷۱	۰/۰۱۵۰۷۱	۰/۰۰۰۴۳۹۲	-۰/۰۰۱۶۲۴۸	۰/۰۰۰۶۲۴۸	۰/۰۰۰۱۵۱۶	-۰/۰۰۱۳۸۸۵۳	۰/۰۰۰۳۸۸۵	۰/۰۰۰۰۸۸۳	-۰/۱۰۰۰
۰/۲	-۰/۰۵۶۵۱۶	۰/۰۲۵۴۱۶	۰/۰۰۱۱۴۱۲	-۰/۰۰۵۱۳۳۷	۰/۰۰۱۱۳۳۷	۰/۰۰۰۴۷۸۰	-۰/۰۰۴۷۲۵۸	۰/۰۰۰۷۲۵۸	۰/۰۰۰۳۰۰۲	-۰/۴۰۰۰
۰/۳	-۰/۱۲۵۷۲۸	۰/۰۳۵۷۲۸	۰/۰۰۲۱۹۰۰	-۰/۰۰۱۰۶۴۱۵	۰/۰۰۱۶۴۱۵	۰/۰۰۰۹۹۰۴	-۰/۰۰۱۰۰۶۲۶	۰/۰۰۰۶۲۶۴	۰/۰۰۰۶۳۹۰	-۰/۹۰۰۰
۰/۴	-۰/۲۰۶۰۴۳	۰/۰۴۶۰۴۳	۰/۰۰۳۵۸۶۷	-۰/۰۰۱۸۱۴۹۷	۰/۰۰۲۱۴۹۲	۰/۰۰۱۶۸۸۸	-۰/۰۰۱۷۳۹۹۴	۰/۰۰۱۳۹۹۴	۰/۰۰۱۱۰۴۹	-۰/۱۶۰۰
۰/۵	-۰/۳۰۶۳۹۲	۰/۰۵۶۳۹۲	۰/۰۰۵۳۳۲۵	-۰/۰۰۲۷۶۵۷۵	۰/۰۰۲۶۵۷۵	۰/۰۰۲۵۷۳۳	-۰/۰۰۲۶۷۳۶۳	۰/۰۰۱۷۳۶۳	۰/۰۰۱۶۹۷۷	-۰/۲۵۰۰
۰/۶	-۰/۴۲۶۸۱۲	۰/۰۶۶۸۱۲	۰/۰۰۷۴۲۸۹	-۰/۰۰۳۹۱۶۷۳	۰/۰۰۳۱۶۷۳	۰/۰۰۳۶۴۴۲	-۰/۰۰۳۸۰۷۴۰	۰/۰۰۲۰۷۴۰	۰/۰۰۲۴۱۷۶	-۰/۳۶۰۰
۰/۷	-۰/۵۶۷۳۵۰	۰/۰۷۷۳۵۰	۰/۰۰۹۸۷۸۳	-۰/۰۰۵۲۶۷۹۸	۰/۰۰۳۶۷۹۸	۰/۰۰۴۹۰۱۹	-۰/۰۰۵۱۴۱۲۷	۰/۰۰۲۴۱۲۷	۰/۰۰۳۲۶۴۷	-۰/۴۹۰۰
۰/۸	-۰/۷۱۷۳۵۰	۰/۰۷۲۶۵۰	۰/۰۰۱۲۳۸۸۳	-۰/۰۰۶۰۱۸۷۴	۰/۰۰۳۸۱۲۶	۰/۰۰۱۶۶۲۲	-۰/۰۰۶۱۴۱۷۲	۰/۰۰۲۵۸۲۸	۰/۰۰۱۰۹۶۸	-۰/۶۴۰۰
۰/۹	-۰/۸۲۸۰۷۰	۰/۰۸۱۹۳۰	۰/۰۰۲۲۴۹۳	-۰/۰۰۷۶۷۰۶۶	۰/۰۰۴۲۹۳۴	۰/۰۰۱۰۳۳۰	-۰/۰۰۷۸۰۹۲۶	۰/۰۰۲۹۰۷۳۹	۰/۰۰۵۶۶۲۵	-۰/۸۱۰۰
CPUtime	۱۵/۱۰			۶۴/۳۸			۱۵۸/۰۷			



جواب‌های تقریبی تابع  $y_1(t)$  به‌ازای  $m=10, 20, 30$  (۱.۴) جواب‌های تقریبی تابع  $y_2(t)$  به‌ازای  $m=10, 20, 30$  (۱.۴)

شکل ۱. نمودارها

## ۵. نتایج اصلی

در این مقاله دستگاه معادلات انتگرال-دیفرانسیل ولترا-فردهلم کسری با استفاده از توابع بلوک‌پالس تقریب زده شد و با توجه به نتایج بدست آمده مشخص گردید که با افزایش  $m$  جواب‌های تقریبی به جواب‌های دقیق نزدیکتر می‌شوند و در نتیجه خطای مطلق و تخمینی کاهش می‌یابد.

### مراجع

1. E. Babolian and K. Maleknejad and M. Mordad and et al, *A numerical method for solving Fredholm–Volterra integral equations in two-dimensional spaces using block pulse functions and an operational matrix*, Appl. Math. Model. 35(2011), 5662–5672 .
2. K.S. Miller and B. Ross, *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*,1993.
3. Jiaquan Xie and Mingxu Yi, *Numerical research of nonlinear system of fractional Volterra–Fredholm integral–differential equations via Block-Pulse functions and error analysis*, Journal of Computational and Applied Mathematics. 345 (2019), 159–167.
4. M. Yi and J. Huang and J. Wei, *Block pulse operational matrix method for solving fractional partial differential equation*, Appl. Math. Comput. 221 (2013), 121–131.

پست الکترونیکی: [hossein.am73@yahoo.com](mailto:hossein.am73@yahoo.com)  
پست الکترونیکی: [a.gholizadeh@hsu.ac.ir](mailto:a.gholizadeh@hsu.ac.ir)

## حل معادلات انتگرال آبل تعمیم یافته با استفاده از ماتریس‌های عملیاتی چندجمله‌ای چیشف

رضا بروغنی \*

دانشکده ریاضی، دانشگاه حکیم سبزواری، سبزوار، ایران

و محمدعلی پرتانیان

دانشکده ریاضی، دانشگاه حکیم سبزواری، سبزوار، ایران

چکیده. حل معادلات انتگرال آبل تعمیم یافته براساس حسابان کسری ریمان - لیوویل صورت می پذیرد. چند جمله ای چیشف متعامد و ماتریس های عملیاتی این چند جمله ای ها و خواص آنها را ارائه می کنیم، سپس توابع مجهول معادلات انتگرال توسط این چند جمله ای به فرم ماتریسی درمی آیند، آنگاه این ماتریس ها برای تبدیل معادلات انتگرال آبل تعمیم یافته، به دستگاه جبری خطی استفاده می شوند. مثال های عددی به منظور اعتبارسنجی و دقت روش، ارائه شده است. با استفاده از نرم افزار متلب مقادیر مثال ها، در جداول جهت بررسی خطای مطلق و مقایسه با روش لزاندر آورده شده است.

واژه های کلیدی: چندجمله ای های چیشف، معادلات انتگرال آبل، ماتریس های عملیاتی، حسابان کسری، روش گالرکین.

طبقه بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 41A50, 26A33, 65L60.

## ۱. مقدمه

معادلات انتگرال آبل تعمیم یافته در مدل سازی مسایل مکانیک، فیزیک، زیست شناسی و شیمی و نظیر اینها حاصل می شوند که اکثر اینگونه معادلات به روش تحلیلی قابل حل نمی باشند. با استفاده از روش عددی ماتریس های عملیاتی چندجمله ای چیشف معادله انتگرال به دستگاه جبری خطی تبدیل می شود. بدین طریق که از چندجمله ای های چیشف به عنوان توابع وزن در روش گالرکین استفاده کرده و ماتریس های عملیاتی چندجمله ای چیشف براساس حسابان کسری ریمان - لیوویل بدست خواهد آمد. اعداد شرطی را جهت بررسی عملکرد ماتریس مذکور بدست آورده و نشان داده خواهد شد که، خطا برای معادله ای که جواب آن به صورت سری توانی باشد، صفر می شود و جواب دقیق بدست می آید. ابتدا به بیان تعاریف و قضایای مورد نیاز می پردازیم.

## ۲. تعاریف و قضایا

تعریف ۱.۲. چندجمله ای چیشف از درجه  $n$  بر بازه  $[-1, 1]$  به صورت  $T_n(x) = \cos(ncos^{-1}x)$  و ریشه های آن  $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  متعامدند [۴].  
 $x_i = \cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2n}\right)$ ,  $i = 0, \dots, n-1$

تعریف ۲.۲. عدد  $cond(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$  برای ماتریس  $A$  را عدد شرطی معکوس پذیر  $A$  می گوئیم.

تعریف ۳.۲. عملگرهای انتگرال کسری ریمان-لیوویل چپ و راست به ترتیب به صورت زیر تعریف می شوند: [۱]

$$(1) \quad {}_a I_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad 0 < \alpha < 1$$

$${}_x I_b^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad x \in [a, b]$$

قضیه ۴.۲. عملگر کسری ریمان-لیوویل  $I^\alpha$  در خواص زیر صدق می کند: [۴]

$$I^\alpha \left( \sum_{i=0}^n \mu_i f_i(x) \right) = \sum_{i=0}^n \mu_i I^\alpha f_i(x) \quad (1)$$

$$I^\alpha x^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)} x^{\alpha+\beta}, \quad \beta > -1 \quad (2)$$

### ۳. آنالیز روش

معادله انتگرال آبل تعمیم یافته

$$(۲) \quad y(x) = f(x) + \int_0^x |x-t|^{-\alpha} y(t) dt, \quad 0 \leq x \leq T, \quad 0 < \alpha < 1$$

داده شده است، که  $f \in C[0, T]$  تابعی معلوم،  $y(x)$  تابع مجهول و  $T$  ثابت مثبت می باشند. به منظور یافتن جواب، فرم ماتریسی چندجمله‌ای‌های چبیشف، به صورت:

$$T(x) = (T_0(x), T_1(x), \dots, T_n(x))^T, \quad X = (1, x, \dots, x^n)^T$$

را در نظر می گیریم. لذا می توان نوشت:  $T(x) = TX$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & t_1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t_1 & t_2 & 2^2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & \\ \cos(\frac{n\pi}{2}) & t_n & t_n & t_n & t_n & \dots & 2^{n-1} \end{pmatrix}_{(n+1) \times (n+1)}$$

بنابراین داریم:  $t_{i,0} = \cos(\frac{i\pi}{2})$ ,  $i = 0, \dots, n$  و

$$t_{i,j} = \begin{cases} (2|t_{i-1,j-1}| + |t_{i-2,j}|) \operatorname{sign}(t_{i-1,j-1}) & ; i \geq j \\ 0 & ; i < j \end{cases}$$

چندجمله‌ای‌های چبیشف بر  $[-1, 1]$  را با  $WX$  بر  $[0, T]$  که  $W = TR$

$$R_{i,j} = \begin{cases} \binom{i}{j} (-1)^{i-j} (\frac{T}{2})^j & ; j = 0, 1, \dots, n, \quad i = 0, \dots, n \\ 0 & ; i < j \end{cases}$$

تبدیل می کنیم. بنابراین می توان نوشت [۳]:  $y(x) \in L^2[0, T]$ ;  $y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \phi_i(x) dx = C^T \cdot W \cdot X$ ;  $\phi_i$  چندجمله‌ای چبیشف درجه  $i$  در بازه  $[0, T]$  و

$$c_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^T \frac{f(x) \phi_0(x)}{\sqrt{\frac{x}{T} - \frac{x^2}{T^2}}} dx, \quad c_i = \frac{2}{\pi} \int_0^T \frac{f(x) \phi_i(x)}{\sqrt{\frac{x}{T} - \frac{x^2}{T^2}}} dx \quad i = 1, 2, \dots$$

می باشند. با به کاربردن (۱) می توان نوشت:

$$I^\alpha(TX) = (A * T) X^{(\alpha)}, \quad X^{(\alpha)} = x^\alpha \cdot X = [x^\alpha, x^{\alpha+1}, \dots, x^{\alpha+n}]^T$$

( \* ضرب مولفه به مولفه) و درایه های  $A$  به صورت زیر هستند:

$$A_{ij} = \begin{cases} \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(\alpha+j+1)} & ; i \geq j \\ 0 & ; i < j \end{cases}$$

و  $- \alpha = \beta - 1$  با قراردادن:  $I^\alpha(g(x)) = I^\alpha(D^T W X) = D^T (A * W) X^{(\alpha)}$  با استفاده از حسابان کسری خواهیم داشت:  $\int_0^x (x-t)^{-\alpha} y(t) dt = \Gamma(\beta) I^\beta y(x)$  قرار می دهیم:  $y(x) \approx y_n(x) = C^T W X$  پس از جایگذاری خواهیم داشت:

$$y(x) = f(x) + \int_0^x (x-t)^{-\alpha} y(t) dt = f(x) + \Gamma(\beta) I^\beta (C^T W X)$$

پس از ضرب طرفین در  $\phi_i(x)$  و انتگرال گیری داریم:

$$(۳) \quad (WPW^T - WP^\beta \Lambda^T)C = WP_x \quad P = \int_0^T \tilde{X} dx \quad P_{ij} = \frac{T^{i+j+1}}{i+j+1}$$

که

$$\phi_i(x) = W_i X \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad \Gamma(\beta) (A * W) = \Lambda$$

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^n \\ x & x^2 & x^3 & \dots & x^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x^n & x^{n+1} & x^{n+2} & \dots & x^{2n} \end{pmatrix}_{(n+1) \times (n+1)}$$

$$P_x = \int_0^T X f(x) dx, \quad \tilde{X}^\beta = x^\beta \tilde{X}, \quad P^\beta = \int_0^T \tilde{X}^\beta dx$$

$$(P_x)_{i1} = \int_0^T x^i f(x) dx, \quad (P^\beta)_{ij} = \frac{T^{i+j+\beta+1}}{i+j+\beta+1}, \quad i=0, \dots, n, j=0, \dots, n$$

پس از حل دستگاه (۳) برحسب  $C$ ، جواب تقریبی حاصل می شود.

#### ۴. همگرایی

معادله ۲ را به دلیل داشتن هسته منفرد ضعیف، با استفاده از روش اسپلین مرتبه  $m$  به صورت دستگاه مشبک یکنواخت با  $n+1$  شبکه، در نظر گرفته، اغلب معادلات انتگرال آبل تعمیم یافته دارای جواب هایی شامل نقاط منفرد ساده که توسط هسته به وجود می آید، می باشند. میزان همگرایی خاص برای شبکه های مشبک توسط چاندلر<sup>۱</sup> به صورت

$$\|y - y_n\|_\infty = \begin{cases} O(n^{-2\alpha}) & , \quad 0 < \alpha < 1 \\ O(n^{-1} \log(n)) & , \quad \alpha = 1 \end{cases}$$

داده شده است [۶] و همگرایی حداکثر  $O(n^{-2\alpha})$  می باشد که به  $m$  بستگی ندارد. یکی از راه های بهبود، معرفی شبکه های درجه بندی شده می باشد که با انجام این کار نرخ همگرایی به  $O(n^{-m})$  تغییر می یابد که به  $m$ ؛ درجه چند جمله ای، بستگی دارد [۲].

#### ۵. مثال های عددی

در این بخش به بررسی دو مثال به ازای  $N = 4, 8, 12$  با مقادیر خطای مطلق ( $|y(x) - y_n(x)|$ )، جواب دقیق و روش لژاندر [۵] در جدول می پردازیم.

مثال ۱.۵. معادله  $y(x) - \int_0^x \frac{y(t)}{(x-t)^{\frac{1}{2}}} dt = x^{\frac{7}{2}} - \frac{7}{8} \pi x^2$  (جواب دقیق  $y(x) = x^{\frac{7}{2}}$ ) [۴].

مثال ۲.۵. معادله  $y(x) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})} \sqrt{\frac{x}{\pi}}$  (جواب دقیق  $y(x) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})} \sqrt{\frac{x}{\pi}}$ ) [۴].

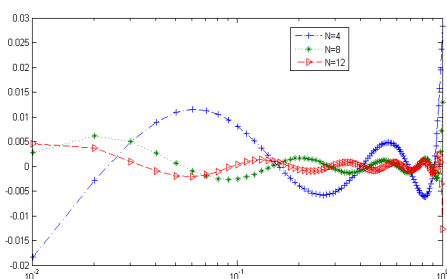
جدول ۱. جواب های دقیق و تقریبی (۱.۵)

$x$	$N=4$	خطای مطلق	$N=8$	خطای مطلق	$N=12$	خطای مطلق	جواب دقیق	$N=[5, 12]$
۰/۱	۳/۵۸۷e-۲	۹/۶۴e-۴	۳/۱۵۵۱e-۲	۷/۲e-۵	۳/۱۶۲۲e-۲	۱e-۶	۳/۱۶۲۲e-۲	۳/۱۶۱۹e-۲
۰/۲	۸/۵۶۵e-۲	۱/۲۲e-۴	۰/۸۹۴۷۵e-۲	۳/۲e-۵	۸/۹۴۴۰e-۲	۳e-۶	۸/۹۴۴۳e-۲	۸/۹۴۳۸e-۲
۰/۳	۱/۶۳۸۳۷e-۱	۴/۸e-۴	۱/۶۴۳۲۸e-۱	۱/۱e-۵	۱/۶۴۳۱۷e-۱	۰	۱/۶۴۳۱۷e-۱	۱/۶۴۳۱۵e-۱
۰/۴	۲/۵۲۶e-۱	۳/۸۲e-۴	۲/۵۲۹۵e-۱	۳/۲e-۵	۲/۵۲۹۸۳e-۱	۱e-۶	۲/۵۲۹۸۲e-۱	۲/۵۲۹۷۸e-۱
۰/۵	۳/۵۳۵۹e-۱	۳/۷e-۵	۳/۵۳۵۶۳e-۱	۱e-۵	۳/۵۳۵۵۳e-۱	۰	۳/۵۳۵۵۳e-۱	۳/۵۳۵۴۷e-۱
۰/۶	۴/۶۵۰۸۴e-۱	۳/۲۴e-۴	۴/۶۴۷۸e-۱	۲e-۵	۴/۶۴۷۵۷e-۱	۳e-۶	۴/۶۴۷۵۶e-۱	۴/۶۴۷۵۱e-۱
۰/۷	۵/۸۵۹۰۱e-۱	۲/۳۹e-۴	۵/۸۵۶۴۲e-۱	۲e-۱	۵/۸۵۶۶۲e-۱	۰	۵/۸۵۶۶۲e-۱	۵/۸۵۶۴۹e-۱
۰/۸	۷/۱۵۴e-۱	۱/۴۲e-۲	۷/۱۵۵۴۱e-۱	۱e-۶	۷/۱۵۵۴۱e-۱	۱e-۶	۷/۱۵۵۴۲e-۱	۷/۱۵۵۲۸e-۱
۰/۹	۸/۵۳۴۷۹e-۱	۳/۳۶e-۴	۸/۵۳۸۲۷e-۱	۱/۲e-۵	۸/۵۳۸۱۷e-۱	۲e-۶	۸/۵۳۸۱۵e-۱	۸/۵۳۷۹۴e-۱
۱	۱/۰۰۰۵۸۱	۵/۸۱e-۴	۱/۰۰۰۰۵۸	۵/۸e-۵	۱/۰۰۰۰۱۱	۱/۱e-۵	۱	۹/۹۹۹۷۵e-۱
c.n.m*	۱۱/۲۳		۲۲/۳۲		۳۲/۸۵			
CPUtime	۰/۵۹۵۸		۰/۹۴۱۵		۱/۱۵۱۸			
CPUtime[۵]	۲/۰۵۷۸		۱۱/۸۵۸		۲۵/۹۴۱			

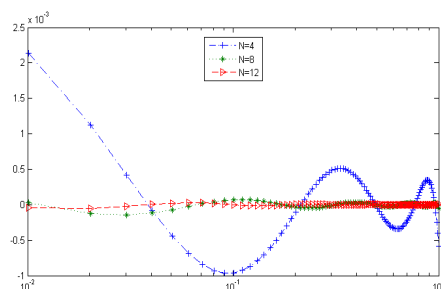
<sup>1</sup> Chandler

جدول ۲. جواب های دقیق و تقریبی (۲.۵)

$x$	$N = 4$	خطای مطلق	$N = 8$	خطای مطلق	$N = 12$	خطای مطلق	جواب دقیق	$N = 12[5]$
۰/۱	$2.77032e-1$	$8.176e-3$	$2.87780e-1$	$2.572e-3$	$2.8489e-1$	$3.18e-4$	$2.85208e-1$	$2.83797e-1$
۰/۲	$4.0714e-1$	$3.795e-3$	$4.01657e-1$	$1.688e-3$	$4.0391e-1$	$5.64e-4$	$4.03345e-1$	$4.04188e-1$
۰/۳	$4.9922e-1$	$5.225e-3$	$4.9455e-1$	$5.55e-4$	$4.93751e-1$	$2.43e-4$	$4.93995e-1$	$4.93297e-1$
۰/۴	$5.7063e-1$	$2.14e-3$	$5.71268e-1$	$8.52e-4$	$5.70224e-1$	$1.92e-4$	$5.70416e-1$	$5.71111e-1$
۰/۵	$6.3351e-1$	$4.234e-3$	$6.36644e-1$	$1.101e-3$	$6.38315e-1$	$5.7e-4$	$6.37745e-1$	$6.37108e-1$
۰/۶	$6.9465e-1$	$3.964e-3$	$6.98529e-1$	$8.5e-4$	$6.97874e-1$	$7.4e-4$	$6.98614e-1$	$6.99101e-1$
۰/۷	$7.5559e-1$	$1.01e-3$	$7.55782e-1$	$1.192e-3$	$7.55311e-1$	$7.21e-4$	$7.5459e-1$	$7.54261e-1$
۰/۸	$8.1262e-1$	$5.929e-3$	$8.05506e-1$	$1.185e-3$	$8.05951e-1$	$7.39e-4$	$8.06691e-1$	$8.07035e-1$
۰/۹	$8.56726e-1$	$1.101e-3$	$8.56543e-1$	$9.18e-4$	$8.56841e-1$	$1.217e-3$	$8.5626e-1$	$8.56461e-1$
۱	$8.73629e-1$	$2.8278e-2$	$8.8897e-1$	$1.2937e-4$	$9.13228e-1$	$1.132e-2$	$9.01907e-1$	$8.91072e-1$
c.n.m*	۱۳۹۴		۲۶۷۸		۴۳۶۸			
CPUtime	۰/۶۳۴۹		۰/۷۹۲۷		۱/۰۲۰۳			
CPUtime[5]	۳/۶۲۵۲		۱۲/۰۹۵۹		۲۶/۰۷۶۸			



مثال (۲.۵)



مثال (۱.۵)

شکل ۱. نمودار خطای های مطلق به ازای  $N = 4, 8, 12$

## ۶. نتایج اصلی

بر اساس ماتریس های عملیاتی چند جمله ای های چبیشف، معادلات انتگرال آبل تعمیم یافته در دو مثال توسط نرم افزار متلب تا ۶ رقم اعشار به ازای  $N = 4, 8, 12$  با روش مذکور حل شد. نتایج جداول و نمودارها نشان دهنده دقت و کارایی روش بوده، با افزایش  $N$  (تعداد افراهای چند جمله ای های چبیشف)، جواب های تقریبی توسط روش ارائه شده به جواب دقیق نزدیک تر و خطای مطلق کاهش می یابد. با مقایسه نتایج با روش لژاندر، به ازای  $N = 12$  ملاحظه می شود، جواب های دقیق تر و خطای کم تری نسبت به روش لژاندر حاصل می شود، همچنین زمان اجرای برنامه به ازای  $N = 4, 8, 12$  با افزایش  $N$  در روش ارائه شده و روش [۵] افزایش می یابد و اجرای برنامه در روش مذکور نسبت به روش [۵] زمان بسیار کمتری را به خود اختصاص می دهد. اعداد شرطی این ماتریس ها عملکرد خوبی دارند.

## مراجع

1. Z. Avazzadeh and B. shafiee and G. Loghmani, *Fractional calculus for solving Abel's integral equations using Chebyshev polynomials*, Appl. Math. Sci. 5(45), 2207–2216 (2011)
2. G. A. Chandler, *Superconvergence of Numerical Solutions to Second Kind Integral Equations*, Thesis, Australian National University, Canberra, (1979).
3. E.H. Doha and A.H. Bhrawy and S.S. Ezz-Eldien, *Efficient Chebyshev spectral methods for solving multi-term fractional orders differential equations*, Appl. Math. Model.(2011), 35, 5662–5672 .
4. M. Nosrati sahlani and H. Feyzollahzadeh, *Operational Matrices of Chebyshev Polynomials for Solving Singular Volterra Integral Equations*, Appl. Math. Sci.(2017)
5. Kh. Sadri and A. Amini and Ch. Cheng, *A new operational method to solve abel's and generalized abel's integral equations*, Applied Mathematics and Computation, 317:49–67, (2018)
6. C. Schneider, *Product integration for weakly singular integral equations*, Appl. Math. Comput. 36, 207–213 (1981)

پست الکترونیکی: [rboroghani63@gmail.com](mailto:rboroghani63@gmail.com)  
پست الکترونیکی: [partanian@hsu.ac.ir](mailto:partanian@hsu.ac.ir)



## روش تکرار پیکارد دومرحله‌ای با پارامتر کمکی برای حل مسائل مقدار مرزی دونقطه‌ای با شرایط نیومان

محمد تفکری بافقی<sup>\*</sup>، محمد حیدری و قاسم برید لقمانی  
بخش ریاضی کاربردی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه یزد، یزد، ایران

چکیده. در این مقاله یک روش کارا برای حل مسائل مقدار مرزی مرتبه‌ی دوم با شرایط مرزی نیومان ارائه شده‌است. روش پیشنهادی یک روش تکراری مبتنی بر روش تکرار پیکارد به همراه یک پارامتر مجهول کمکی است. با تبدیل بازه‌ی تعریف مسئله به دو زیربازه و دنباله‌ی پیکارد، مقدار پارامتر مجهول در هر مرحله محاسبه شده و بعد از تعداد مشخصی تکرار، جواب تقریبی به صورت یک تابع دوضابطه‌ای به دست می‌آید. در پایان کارایی روش پیشنهادی با یک مثال شرح داده شده‌است.  
واژه‌های کلیدی: مسائل مقدار مرزی، شرایط نیومان، روش تکرار پیکارد، پارامتر کمکی.  
34B05, 47J25: [۲۰۱۰]

## ۱. مقدمه

یکی از روش‌های علمی برای تجزیه و تحلیل پدیده‌های طبیعی، ساخت و ارائه‌ی مدل‌های ریاضی برای پدیده‌هاست. این مدل‌ها در واقع بیان‌گر واقعیت‌های حاکم بر مسائل، به‌ویژه بیان روابط میان داده‌ها و مجهول‌های مسئله با استفاده از معادلات ریاضی است. بسیاری از مسائل آکوستیک، الکتریسیته و مغناطیس، مکانیک سماوی، مکانیک کوانتومی، مکانیک سیالات، زیست‌شناسی، واکنش‌های شیمیایی گازها، داروسازی و حتی اقتصاد را می‌توان به صورت معادلات دیفرانسیل مدل‌سازی کرد. حل مسائل مقدار مقدار مرزی در تحلیل و کنترل دستگاه‌های پویا<sup>۱</sup> اهمیت اساسی دارد. تاکنون روش‌های بسیاری برای حل مسائل مقدار مقدار مرزی ارائه شده‌اند؛ از قبیل روش تجزیه‌ی آدومیان<sup>۲</sup> [۹]، روش هم‌محلی<sup>۳</sup> [۲]، روش گالرکین<sup>۴</sup> [۱]، روش تاو<sup>۵</sup> [۷]، روش اختلال هموتویی<sup>۶</sup> [۶]، و روش تکرار وردشی<sup>۷</sup> [۵]، که هرکدام نقاط ضعف و قوتی دارند. روش تکرار پیکارد یک روش پیشرو تقریب جواب است که اغلب برای اثبات وجود و یکتایی جواب مسائل مقدار اولیه استفاده می‌شود. اگرچه این روش بیشتر با نام ریاضیدان‌هایی چون پیکارد<sup>۸</sup>، لیندولف<sup>۹</sup>، لیپ‌شیتز<sup>۱۰</sup> و کوشی<sup>۱۱</sup> شناخته می‌شود؛ اما برای نخستین بار، ریاضیدان فرانسوی، لیوویل<sup>۱۲</sup> در سال ۱۸۳۸ از این روش برای حل مسائل مقدار اولیه‌ی معادلات دیفرانسیل خطی همگن مرتبه‌ی دوم استفاده نمود [۸]. حدود ۵۰ سال بعد، پیکارد یک صورت تعمیم‌یافته با تحلیل ریاضی قوی ارائه داد و به کمک آن مسائل مقدار مرزی دونقطه‌ای را حل کرد و یک شرط نظری برای طول بازه‌هایی که در آن‌ها روش پیکارد همگرا می‌شود، ارائه نمود. کولز<sup>۱۳</sup> و شرمن<sup>۱۴</sup> [۴] در پژوهشی پیرامون بازه‌ی همگرایی روش پیکارد برای حل مسائل مقدار مرزی بحث نمودند. شریدهاران<sup>۱۵</sup> و آگاروال<sup>۱۶</sup> چگونگی ساخت دنباله‌های از نوع پیکارد را که به جواب دقیق مسئله همگرا باشد، ارائه نمودند [۱۰]. هدف ما در این مقاله، ارائه‌ی یک بهبود از روش تکرار پیکارد برای حل مسائل مقدار مرزی مرتبه‌ی دوم با شرایط نیومان است.

<sup>\*</sup> ارائه‌دهنده    <sup>۱</sup> Dynamical systems    <sup>۲</sup> Adomian decomposition method    <sup>۳</sup> Collocation method    <sup>۴</sup> Galerkin  
<sup>۵</sup> Tau methodmethod    <sup>۶</sup> Homotopy perturbation method    <sup>۷</sup> Variational iteration method    <sup>۸</sup> Picard    <sup>۹</sup> Lindelöf  
<sup>۱۰</sup> Lipschitz    <sup>۱۱</sup> Cauchy    <sup>۱۲</sup> Joseph Liouville    <sup>۱۳</sup> Coles    <sup>۱۴</sup> Sherman    <sup>۱۵</sup> Shridharan    <sup>۱۶</sup> Agarwal

## ۲. روش پیکارد

معادله‌ی دیفرانسیل معمولی مرتبه‌ی اول

$$(۱) \quad y'(t) = f(t, y(t)), \quad a \leq t \leq b,$$

را با شرط  $y(a) = y_0$  در نظر بگیرید. با انتگرال‌گیری از طرفین (۱)، دنباله‌ی روش تکرار پیکارد از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$(۲) \quad y^i(t) = y_0 + \int_a^t f(s, y^{i-1}(s)) ds, \quad i = 1, 2, \dots$$

قضیه ۱۰۲. [۳] اگر  $f$  یک تابع پیوسته‌ی حقیقی مقدار بر نوار

$$(۳) \quad R = \{(t, y) \mid |t - a| \leq A, |y - y_0| \leq B, A, B > 0\},$$

باشد،

$$(۴) \quad |f(t, y)| \leq M,$$

$$(۵) \quad |f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq K |y_1 - y_2|,$$

دنباله‌ی تکرار پیکارد (۲) برای حل مسئله‌ی (۱) روی بازه‌ی

$$(۶) \quad I = \left\{ t \mid |t - a| \leq \min \left\{ A, \frac{B}{M} \right\} \right\},$$

همگراست.

حال مسئله‌ی مقدار مرزی مرتبه‌ی دوم

$$(۷) \quad y''(t) = f(t, y(t), y'(t)), \quad a \leq t \leq b,$$

را با شرایط مرزی

$$(۸) \quad y'(a) = \alpha, \quad y'(b) = \beta,$$

در نظر بگیرید. این شرایط، به شرایط مرزی نیومان<sup>۱۷</sup> معروف است. با در نظر گرفتن  $Y_1(t) = y(t)$  و  $Y_2(t) = y'(t)$ ، می‌توان (۷) را به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی اول به صورت

$$(۹) \quad Y_1'(t) = Y_2(t),$$

$$(۹ب) \quad Y_2'(t) = f(t, Y_1(t), Y_2(t)), \quad Y_2(a) = \alpha, \quad Y_2(b) = \beta,$$

تبدیل کرد. با انتگرال‌گیری از طرفین (۹-ب)، دنباله‌ی پیکارد به صورت

$$(۱۰) \quad Y_2^i(t) = \alpha + \int_a^t f(s, Y_1^{i-1}(s), Y_2^{i-1}(s)) ds,$$

$$(۱۰ب) \quad Y_1^i(t) = Y_1(a) + \int_a^t Y_2^i(s) ds, \quad i = 1, 2, \dots,$$

به دست می‌آید. اما با توجه به مجهول بودن  $Y_1(a)$ ، حل این مسئله به روش پیکارد با چالش روبروست. در این مقاله برای غلبه بر این چالش، روش تکرار پیکارد دومرحله‌ای را ارائه می‌دهیم.

## ۳. روش تکرار پیکارد دومرحله‌ای برای حل مسائل مقدار مرزی دونقطه‌ای با شرایط نیومان

برای حل (۷) با شرایط (۸)، مسئله‌ی اصلی را به دو زیرمسئله روی بازه‌های  $[a, c]$  و  $[c, b]$  تبدیل می‌کنیم. فرض می‌کنیم  $c \in [a, b]$  و  $y(c) = \eta$ ، که در آن  $\eta$  یک پارامتر مجهول است و در هر مرحله به تدریجی که بعداً گفته خواهد شد، به دست می‌آید.

مرحله‌ی اول (بازه‌ی  $[a, c]$ ): مسئله‌ی مقدار مرزی

$$(۱۱) \quad y''(t) = f(t, y(t), y'(t)), \quad y'(a) = \alpha, \quad y(c) = \eta,$$



را در نظر بگیرید. با تبدیل (۱۱) به دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی اول و انتگرال‌گیری از طرفین، دنباله‌ی پیکارد به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$(11) \quad Y_1^i(t) = \alpha + \int_a^t f(s, Y_1^{i-1}(s), Y_1^{i-1}(s)) ds,$$

$$(12) \quad Y_1^i(t) = \eta - \int_t^c Y_1^i(s) ds, \quad i = 1, 2, \dots,$$

تقریب آغازین به‌گونه‌ای در نظر گرفته می‌شود که در شرایط مرزی صدق کند. با در نظر گرفتن  $Y_1^0(t) = \alpha$  و  $Y_1^0(t) = \alpha(t - c) + \eta$  جواب تقریبی در مرحله‌ی  $i$ -ام به‌صورت  $Y_1^i(t; \eta)$  به‌دست می‌آید.

مرحله‌ی دوم) بازه‌ی  $[c, b]$ : مسئله‌ی مقدار مرزی

$$(13) \quad y''(t) = f(t, y(t), y'(t)), \quad y(c) = \eta, \quad y'(b) = \beta,$$

را در نظر بگیرید. مشابه با مرحله‌ی اول، دنباله‌ی پیکارد برای (۱۳) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$(14) \quad Y_1^i(t) = \beta - \int_t^b f(s, Y_1^{i-1}(s), Y_1^{i-1}(s)) ds,$$

$$(14) \quad Y_1^i(t) = \eta + \int_c^t Y_1^i(s) ds, \quad i = 1, 2, \dots,$$

با در نظر گرفتن تقریب آغازین  $Y_1^0(t) = \beta$  و  $Y_1^0(t) = \beta(t - c) + \eta$  جواب تقریبی در مرحله‌ی  $i$ -ام به‌صورت  $Y_1^i(t; \eta)$  به‌دست می‌آید.

برای تعیین پارامتر مجهول  $\eta$  از شرط پیوستگی مشتق جواب به‌صورت

$$(15) \quad \left. \frac{d^{[a,c]} Y_1^i(t; \eta)}{dt} \right|_{t=c} - \left. \frac{d^{[c,b]} Y_1^i(t; \eta)}{dt} \right|_{t=c} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

یا به‌طور معادل

$$(16) \quad \left. {}^{[a,c]} Y_1^i(t; \eta) \right|_{t=c} - \left. {}^{[c,b]} Y_1^i(t; \eta) \right|_{t=c} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

استفاده می‌کنیم. بعد از  $N$  تکرار، جواب تقریبی به‌صورت تابع دوضابطه‌ای

$$(17) \quad y(x) \simeq \begin{cases} {}^{[a,c]} Y_1^N(t; \eta_N), & a \leq t < c, \\ {}^{[c,b]} Y_1^N(t; \eta_N), & c \leq t \leq b, \end{cases}$$

به‌دست می‌آید.

#### ۴. نتایج عددی

در این بخش با یک مثال، کارایی روش پیشنهادی را نشان می‌دهیم.

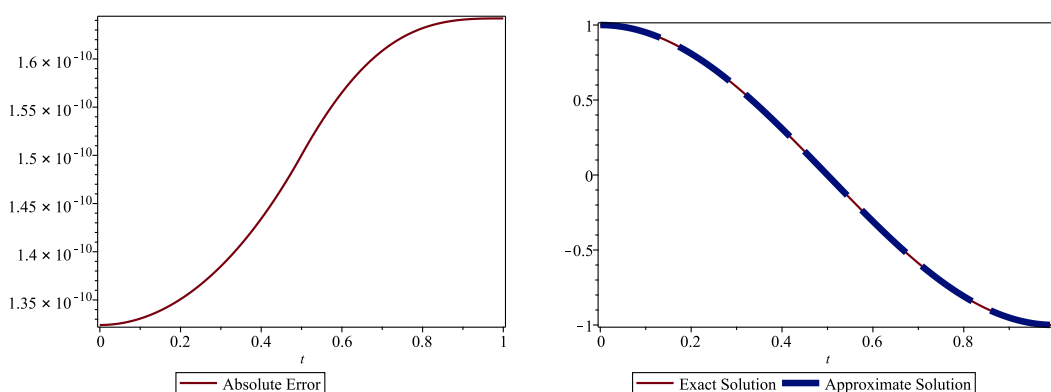
مثال ۱۰۴. مسئله‌ی مقدار مرزی دونقطه‌ای زیر را در نظر بگیرید:

$$(18) \quad y''(t) = -(\pi^2 + 1) \cos(\pi t) + \pi t \sin(\pi t) + y(t) + ty'(t), \quad y'(0) = 0, \quad y'(1) = 0,$$

که جواب دقیق آن به‌صورت  $y(t) = \cos(\pi t)$  است. با فرض  $c = 0.5$  مسئله را با روش پیشنهادی و با استفاده از نرم‌افزار Maple ۲۰۱۶.۱a حل نمودیم. بعد از ۱۵ تکرار، نتایج به‌دست‌آمده برای پارامتر مجهول  $\eta$  در جدول ۱ گزارش شده‌است. شکل ۱ جواب تقریبی را در مقایسه با جواب دقیق و نیز خطای مطلق روش پیشنهادی را نشان می‌دهد. مقدار دقیق  $\eta$  در این مسئله، برابر با صفر است.

جدول ۱. مقادیر به دست آمده برای پارامتر مجهول  $\eta$  در هر مرحله.

مرحله	$\eta$
۱	-۱/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰
۲	۰/۲۷۳۷۴۱۵۶۹۴
۳	-۰/۰۵۸۱۷۹۷۸۵۶۹
۴	۰/۰۱۲۹۳۰۰۳۱۹
۵	-۰/۰۰۲۸۱۵۳۵۶۴
۶	۰/۰۰۰۶۱۴۳۳۶۷
۷	-۰/۰۰۰۱۳۴۰۱۴۵
۸	۰/۰۰۰۰۲۹۲۳۷۵
۹	-۰/۰۰۰۰۰۶۳۷۸۵
۱۰	۰/۰۰۰۰۰۱۳۹۱۶
۱۱	-۰/۰۰۰۰۰۰۳۰۳۶
۱۲	۰/۰۰۰۰۰۰۰۶۶۲
۱۳	-۰/۰۰۰۰۰۰۰۱۴۴
۱۴	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۳۲
۱۵	-۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۷



شکل ۱. (آ) مقایسه‌ی جواب تقریبی و جواب دقیق، (ب) خطای مطلق روش پیشنهادی به ازای  $N = 15$ .

## مراجع

1. M. Baccouch, *Superconvergence of the discontinuous Galerkin method for nonlinear second-order initial-value problems for ordinary differential equations*, Appl. Numer. Math. 115 (2017) 160-179.
2. R.G. Campos, F.D. Mota, *An implementation of the collocation method for initial value problems*, Int. J. Model. Simul. Sci. Comput. 4 (2013), no. 2, 1-13.
3. E.A. Coddington, *An Introduction to Ordinary Differential Equations*, Dover Publications, Inc., New York, 1961.
4. W.J. Coles, T.L. Sherman, *Convergence of successive approximations for nonlinear two-point boundary value problems*, SIAM J. Appl. Math. 15 (1967), no. 2, 426-433.
5. W. He, H. Kong, Y.-M. Qin, *Modified variational iteration method for analytical solutions of nonlinear oscillators*, J. Low Freq. Noise V. A., DOI: 10.1177/1461348418784817.
6. M.A. Khan, S. Ullah, M. Ali, N. HJ, *Application of Optimal Homotopy Asymptotic Method to Some Well-Known Linear and Nonlinear Two-Point Boundary Value Problems*, Int. J. Differ. Equations 2018 (2018) 1-11.
7. J.E. Mamadu, I.N. Njoseh, *Tau-Collocation Approximation Approach for Solving First and Second Order Ordinary Differential Equations*, Z. Angew. Math. Phys. 4 (2016) 383-390.
8. J. Liouville, *Sur la Théorie de la variation des constantes arbitraires*, Liouville J. de Math. 3 (1838) 342-349.
9. R. Rach, A.M. Wazwaz, J.S. Duan, *A reliable modification of the Adomian decomposition method for higher-order nonlinear differential equations*, Kybernetes 42 (2013), no. 2, 282-308.
10. R. Shridharan, R.P. Agarwal, *General iterative methods for nonlinear boundary value problems*, J. Aust. Math. Soc. 37 (1995), no. 1, 58-85.

پست الکترونیکی: [m.tafakkori@stu.yazd.ac.ir](mailto:m.tafakkori@stu.yazd.ac.ir)

پست الکترونیکی: [m.heydari@yazd.ac.ir](mailto:m.heydari@yazd.ac.ir)

پست الکترونیکی: [loghmani@yazd.ac.ir](mailto:loghmani@yazd.ac.ir)



## روش رونوشت مستقیم موضعی اوپلر برای حل مسایل کنترل بهینه و کاهش زمان حل مسایل

حمیده حسین دوست\*

دانشکده ریاضی، دانشگاه امیرکبیر، تهران، ایران

و مصطفی شمسی

دانشکده ریاضی، دانشگاه امیرکبیر، تهران، ایران

چکیده. مساله کنترل بهینه با روش‌های رونوشت مستقیم موضعی<sup>۱</sup> به سادگی به یک مساله برنامه‌ریزی غیر خطی<sup>۲</sup> (NLP) تبدیل می‌شود. عموماً این NLP با روش‌های عددی بهینه‌سازی حل می‌شود. همان‌گونه که می‌دانیم، روش‌های عددی بهینه‌سازی مشتق محور می‌باشند. یعنی از گرادینان تابع هدف و ژاکوبین و حتی هسیان توابع قیود استفاده می‌کنند. البته در مواردی که کاربر این مشتق‌ها را فراهم نکند، آنگاه از فرمول‌های عددی برای تقریب گرادینان و هسیان استفاده می‌شود. در مواردی که این مشتق‌ها را تهیه و در اختیار سالور قرار دهیم، آنگاه چنین ارزیابی‌هایی از تابع هدف و توابع قیود کاهش می‌یابد. حال در مواردی که ارزیابی توابع هدف و قیود زمان‌بر باشد، آنگاه فراهم کردن مشتق توابع هدف و قیود تاثیر چشمگیری در زمان حل NLP می‌گذارد. در این مقاله به استخراج گرادینان تابع هدف و ژاکوبین قیود NLP حاصل از اعمال روش رونوشت مستقیم موضعی اوپلر می‌پردازیم و این مشتقات را در اختیار سالور NLP قرار می‌دهیم. در نهایت تاثیر این کار در کاهش زمان حل NLP، با حل یک مثال نشان داده می‌شود.

واژه‌های کلیدی: مساله کنترل بهینه، روش رونوشت مستقیم موضعی، روش اوپلر، مساله برنامه‌ریزی غیر خطی .  
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 49J30، 49J15، 65K05

## ۱. مقدمه

در مسایل کنترل بهینه، هدف یافتن تابع کنترل  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^q$  و تابع حالت  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^p$  است به طوری که تابع زیر کمینه شود

$$(1) \quad \min J(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t_f) := g(\mathbf{x}(t_f), t_f)$$

که در آن  $g: \mathbb{R}^p \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  و هم زمان قیود دینامیکی زیر برقرار شوند

$$(2) \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \quad \mathbf{f}: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$$

که تابع  $\mathbf{f}$  تابعی مشتق‌پذیر و پیوسته نسبت به آرگومان‌هایش است. متغیر  $t$ ، متغیر زمان و مولفه‌های  $\mathbf{u}$  مجاز هستند که توابع تکه‌ای پیوسته بوده و مقادیرشان محدود باشد.  $t_f$  و  $t_0$  به ترتیب زمان شروع و زمان نهایی هستند و ممکن است ثابت یا آزاد در نظر گرفته شوند. شرایط مرزی مساله کنترل بهینه به صورت زیر است که در آن  $r$  تعداد شرایط مرزی ابتدایی و انتهایی می‌باشد

$$(3) \quad \psi(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_f), t_f) = 0 \quad \psi: \mathbb{R}^{rp} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^r, \quad r \leq p$$

همچنین مساله می‌تواند دارای قیود مسیری به صورت زیر باشد که در آن  $s$  تعداد قیود مسیر می‌باشد

$$(4) \quad \phi(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \leq 0 \quad \phi: \mathbb{R}^{p+q} \rightarrow \mathbb{R}^s$$

در مساله فوق  $t_f$  ممکن است آزاد یا ثابت باشد. برای آنکه رویکرد یکسانی در برخورد با مسایل زمان آزاد و ثابت داشته باشیم ابتدا بازه مساله (۱)-(۴) را از  $[t_0, t_f]$  به  $[0, 1]$  تبدیل می‌کنیم

$$(5) \quad \min J(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t_f) := g(\mathbf{x}(1), t_f),$$

$$(6) \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = (t_f - t_0)\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t),$$

$$(7) \quad \psi(\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(1), t_f) = 0,$$

$$(8) \quad \phi(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \leq 0 \quad t \in [0, 1].$$

توجه شود که به واسطه این تبدیل، باید از نمادهای متفاوتی برای توابع کنترل، حالت و همین طور توابع  $\mathbf{f}$  و  $\phi$  استفاده نمود. ولی به لحاظ سادگی و جلوگیری از کثرت نمادها، از همان نمادهای قبلی استفاده شده است.

\* ارائه‌دهنده

## ۲. روش رونوشت مستقیم موضعی اوایلر برای حل مسایل کنترل بهینه

مساله کنترل بهینه (۵)-(۸) را در نظر می‌گیریم در روش‌های رونوشت مستقیم موضعی ابتدا بازه زمانی  $[t_0, t_f]$  مساله را به  $n-1$  زیر بازه مساوی به صورت زیر تقسیم می‌کنیم [۱]

$$0 = t_1 < t_2 < \dots < t_n = 1$$

به طوری که

$$t_{k+1} = t_k + h \quad k = 1, \dots, n-1, \quad h = \frac{1}{n}.$$

$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(t_k)$  و  $\mathbf{u}_k = \mathbf{u}(t_k)$  به ترتیب مقدار تابع کنترل و حالت را در نقطه گره‌ای  $t_k$  نشان می‌دهد.

اگر روش گسسته‌سازی اوایلر را برای معادله (۶) بکار می‌بریم، آنگاه به رابطه زیر می‌رسیم:

$$(9) \quad 0 = \mathbf{x}(t_{k+1}) - \mathbf{x}(t_k) - h\mathbf{f}(\mathbf{x}(t_k), \mathbf{u}(t_k), t_k; t_f) \quad k = 1, \dots, n-1.$$

همچنین قیود مسیر (۸) در نقاط گره‌ای  $t_k, k = 1, \dots, n-1$  به صورت زیر کالوکیت می‌کنیم

$$(10) \quad \phi(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, t_k, t_f) \leq 0 \quad t_k \in [0, 1].$$

شرایط مرزی نیز به صورت زیر بیان می‌شود

$$(11) \quad \psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_n, t_f) = 0$$

بنابراین در نهایت مساله کنترل بهینه (۵)-(۸) به مساله برنامه ریزی غیر خطی زیر رونوشت می‌شود

$$(12) \quad \min J = g(\mathbf{x}_n, t_f)$$

$$(13) \quad \psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_n, t_f) = 0$$

$$(14) \quad \left. \begin{aligned} 0 &= \mathbf{x}(t_{k+1}) - \mathbf{x}(t_k) - h\mathbf{f}(\mathbf{x}(t_k), \mathbf{u}(t_k), t_k; t_f) \\ \phi(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, t_k, t_f) &\leq 0 \end{aligned} \right\}, k = 1, \dots, n-1.$$

پارامترهای مجهول در این روش بصورت زیر می‌باشد و در صورتی که  $t_k$  آزاد نباشد از پارامترهای مجهول حذف می‌شود

$$\mathbf{X}^T = [\mathbf{x}_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{x}_n, t_f] \in \mathbb{R}^{np+nq-q+1}$$

## ۳. گرادیان تابع هدف و ژاکوبین قیود در روش اوایلر

گرادیان تابع هدف عبارت است از

$$\frac{\partial g(\mathbf{x}_n, t_f)}{\partial \mathbf{X}} = \left[ \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}_1}(\mathbf{x}_n, t_f), \frac{\partial g}{\partial \mathbf{u}_1}(\mathbf{x}_n, t_f), \dots, \frac{\partial g}{\partial \mathbf{u}_{n-1}}(\mathbf{x}_n, t_f), \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}_n}(\mathbf{x}_n, t_f), \frac{\partial g}{\partial t_f}(\mathbf{x}_n, t_f) \right]^T$$

با توجه به این که، تابع هدف فقط به بردار  $\mathbf{x}_n$  و  $t_f$  بستگی دارد، لذا گرادیان تابع هدف نسبت به تمامی  $\mathbf{u}_k$  ها و  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}$  برابر صفر است

$$(15) \quad \nabla g = \left[ \underbrace{0_{1 \times p}, 0_{1 \times q}, \dots, 0_{1 \times q}}_{\substack{\text{r(n-1)}}}, \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}_n}(\mathbf{x}_n, t_f), \frac{\partial g}{\partial t_f}(\mathbf{x}_n, t_f) \right]^T$$

در تعیین ژاکوبین قیود، ابتدا ترتیب زیر برای قیود پیشنهاد می‌شود این ترتیب پیشنهادی، منجر به سادگی در توصیف ماتریس ژاکوبین و همچنین شبه قطری شدن این ماتریس می‌گردد. توجه شود که برای سادگی در نوشتار  $h = (t_f - t_0)$  قرار دادیم.

$$(16) \quad \begin{cases} \gamma := \psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_n, t_f) = 0, \\ \xi_1 := \phi(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}_1, t_1; t_f) \leq 0, \\ \zeta_1 := \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 - \Delta t \mathbf{f}(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}_1, t_1; t_f) = 0 \\ \xi_2 := \phi(\mathbf{x}_2, \mathbf{u}_2, t_2; t_f) \leq 0, \\ \zeta_2 := \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2 - \Delta t \mathbf{f}(\mathbf{x}_2, \mathbf{u}_2, t_2; t_f) = 0 \\ \vdots \\ \xi_{n-1} := \phi(\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{u}_{n-1}, t_{n-1}; t_f) \leq 0, \\ \zeta_{n-1} := \mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n-1} - \Delta t \mathbf{f}(\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{u}_{n-1}, t_{n-1}; t_f) = 0. \end{cases}$$

بنابر ترتیب فوق ماتریس و ژاکوبین قیود به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{x}_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{x}_n} & \frac{\partial \psi}{\partial t_f} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial \mathbf{x}_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial \mathbf{u}_1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \phi_1}{\partial t_f} \\ -\mathbf{I} - \Delta t \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{x}_1} & -\Delta t \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{u}_1} & \mathbf{I} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -h\mathbf{f}_1 - \Delta t \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial t_f} \\ 0 & 0 & \frac{\partial \phi_2}{\partial \mathbf{x}_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial \mathbf{u}_2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \phi_2}{\partial t_f} \\ 0 & 0 & -\mathbf{I} - \Delta t \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{x}_2} & -\Delta t \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{u}_2} & \mathbf{I} & \dots & 0 & 0 & 0 & -h\mathbf{f}_2 - \Delta t \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial t_f} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial \phi_{n-1}}{\partial \mathbf{x}_{n-1}} & \frac{\partial \phi_{n-1}}{\partial \mathbf{u}_{n-1}} & 0 & \frac{\partial \phi_{n-1}}{\partial t_f} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\mathbf{I} - \Delta t \frac{\partial \mathbf{f}_{n-1}}{\partial \mathbf{x}_{n-1}} & -\Delta t \frac{\partial \mathbf{f}_{n-1}}{\partial \mathbf{u}_{n-1}} & \mathbf{I} & -h\mathbf{f}_{n-1} - \Delta t \frac{\partial \mathbf{f}_{n-1}}{\partial t_f} \end{bmatrix}$$

همان گونه که ملاحظه می شود، بردار گرادیان تابع هدف و ماتریس ژاکوبین توابع قیود، دارای درایه های صفر بسیار زیادی می باشد. دلیل این امر این است که در قیود تساوی و نامساوی NLP متناظر با مساله کنترل بهینه، تنها متغیرهای مربوط به دو گره متوالی ظاهر می شود، پس مشتق این قیود نسبت به متغیرهای مربوط به سایر گره ها صفر خواهد بود. بنابراین، در این حالت، گرادیان و ژاکوبین NLP تعداد محدود و اندکی درایه غیر صفر دارند. این گونه ماتریس ها، به ماتریس های تُنک<sup>۲</sup> موسوم می باشد و به نحوه چیدمان درایه های صفر و

غیر صفر در آن ها، الگوی تُنکی<sup>۳</sup> گفته می شود. به طور دقیق تر ماتریس ژاکوبین یک ماتریس با  $s + (p+r)(n-1) + 1$  سطر و  $pm + q(n-1) + 1$  ستون می باشد. البته درحالتی که  $t_f$  آزاد نباشد، آنگاه تعداد ستون ها یکی کمتر است. بنابراین تعداد مولفه های ماتریس ژاکوبین عبارت است از  $((pn + q(n-1) + 1)(s + (p+r)(n-1))) - (3s + 3r(n-1) + 4p(n-1))$  مولفه،  $((s + (p+r)(n-1))(pn + q(n-1) + 1))$  برابر صفر است. توجه شود که  $n$  تعداد نقاط گره ای،  $p, q$  به ترتیب تعداد متغیرهای کنترل و حالت  $r, s$  به ترتیب تعداد قیود مسیر و قیود مرزی را نشان می دهند.

#### ۴. نتایج عددی

مثال ۱.۴ مساله کنترل بهینه که دارای مدلی به شکل زیر است [۲]، در نظر گرفته می شود

$$\begin{aligned} \min J &= x_2(t_f) \\ \dot{x}_1 &= 0.5x_1 + u \\ \dot{x}_2 &= x_1^2 + 0.5u^2 \\ x_1(0) &= 1, \quad x_1(t_f) = 0.5, \quad x_2(0) = 0 \end{aligned}$$

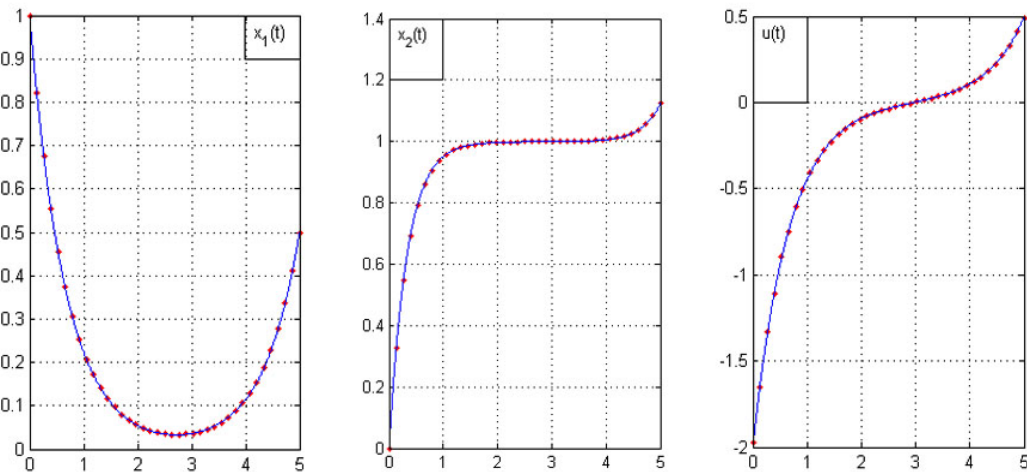
جواب تحلیلی مساله به صورت زیر می باشد

$$\begin{aligned} x_1^*(t) &= a_1 e^{0.5t} + a_2 e^{-0.5t} & x_2^*(t) &= a_3 (e^{0.5t})^2 + a_4 a_3 (e^{-0.5t})^2 + c_1 \\ u^*(t) &= -(a_5 e^{0.5t} + a_6 e^{-0.5t}) & a_1 &= \frac{0.5 - e^{-0.5}}{e^{0.5} - e^{-0.5}}, \quad a_2 = \frac{-0.5 + e^{0.5}}{e^{0.5} - e^{-0.5}} \\ a_3 &= 0.5a_1^2, \quad a_4 = a_2^2, \quad c_1 = a_2^2 - 0.5a_1^2, \quad a_5 = -a_1, \quad a_6 = -2a_2. \end{aligned}$$

در جدول ۱ میزان خطا برای توابع حالت، کنترل، هدف و همچنین زمان اجرای الگوریتم بدون اعمال گرادیان و ژاکوبین با Time ۱ و با اعمال گرادیان و ژاکوبین با Time ۲ به ازای  $n$  های مختلف گزارش شده است. توابع حالت و کنترل مربوط به مساله نیز در شکل ۱ رسم شده است [۳].

Time2(s)	Time1(s)	fun object of error	error control of norm	error state of norm	n
<b>0.0956</b>	1.1370	8.53208919-02	2.81810976-01	5.62152980-01	40
<b>0.1717</b>	2.2778	4.17982394-02	1.97102220-01	3.93258564-01	80
<b>0.3487</b>	5.4377	2.06778265-02	1.38553190-01	2.76491467-01	160
<b>0.7041</b>	14.312	1.02828860-02	9.76733245-02	1.94934078-01	320

جدول ۱. خطای جواب تقریبی بدست آمده از روش رونوشت مستقیم موضعی اویلر برای توابع حالت، کنترل و تابع هدف برای  $n$  های متفاوت.  $\text{Time}$  ۱ نشان دهنده زمان اجرای الگوریتم بدون اعمال گرادیان و ژاکوبین و  $\text{Time}$  ۲ زمان اجرای الگوریتم با اعمال گرادیان و ژاکوبین می باشد.



شکل ۱. نمودار جواب واقعی (خط ممتد) و جواب تقریبی (نقطه چین)، برای توابع حالت و کنترل به ازای  $n=20$

## ۵. نتیجه گیری نهایی

روش رونوشت مستقیم موضعی اویلر را برای مساله کنترل بهینه پیاده سازی کردیم. با استفاده از این روش مساله کنترل بهینه به یک مساله برنامه ریزی غیر خطی تبدیل شد. در نهایت گرادیان تابع هدف و ژاکوبین NLP متناظر را بدست آوردیم. با حل یک مثال با روش ارایه شده، زمان اجرای الگوریتم در حالتی که بردار گرادیان تابع هدف و ماتریس ژاکوبین توابع قیود به صورت عددی و خودکار تولید می شود و نیز در حالتی که بردار گرادیان تابع هدف و ماتریس ژاکوبین به صورت تحلیلی بدست آمده و در اختیار سالور قرار داده شده است محاسبه کردیم. با مقایسه این دو زمان نتیجه می گیریم، در حالتی که مشتق توابع هدف و قیود توسط کاربر فراهم و در اختیار سالور قرار داده می شود، زمان حل NLP به طور چشمگیری کاهش می یابد.

## مراجع

- [1] Betts, John T, *Practical methods for optimal control and estimation using nonlinear programming*, SIAM, 2010.
- [2] Huntington, Geoffrey Todd, *Advancement and analysis of a Gauss pseudospectral transcription for optimal control problems*, PhD thesis, Citeseer, (2007).

[۳] ح. حسین دوست، روش های رونوشت مستقیم مبتنی بر تقریب های موضعی برای حل مسائل کنترل بهینه با جواب های ناهموار، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، (۱۳۹۴).

پست الکترونیکی: [hamide.hosseindost@gmail.com](mailto:hamide.hosseindost@gmail.com)

پست الکترونیکی: [m\\_shamsi@aut.ac.ir](mailto:m_shamsi@aut.ac.ir)

## روش رونوشت مستقیم موضعی هرمیت سیمپسون برای حل مسایل کنترل بهینه و کاهش زمان حل مسایل

حمیده حسین دوست\*  
دانشکده ریاضی، دانشگاه امیرکبیر، تهران، ایران  
و مصطفی شمسی  
دانشکده ریاضی، دانشگاه امیرکبیر، تهران، ایران

چکیده. مساله کنترل بهینه با روش‌های رونوشت مستقیم موضعی<sup>۱</sup> به سادگی به یک مساله برنامه‌ریزی غیر خطی<sup>۲</sup> (NLP) تبدیل می‌شود. عموماً این NLP با روش‌های عددی بهینه‌سازی حل می‌شود. همان‌گونه که می‌دانیم، روش‌های عددی بهینه‌سازی مشتق محور می‌باشند. یعنی از گرادینت تابع هدف و ژاکوبین و حتی هسیان توابع قیود استفاده می‌کنند. البته در مواردی که کاربر این مشتق‌ها را فراهم نکند، آنگاه از فرمول‌های عددی برای تقریب گرادینت و هسیان استفاده می‌شود. در مواردی که این مشتق‌ها را تهیه و در اختیار سالور قرار دهیم، آنگاه چنین ارزیابی‌هایی از تابع هدف و توابع قیود کاهش می‌یابد. حال در مواردی که ارزیابی توابع هدف و قیود زمان‌بر باشد، آنگاه فراهم کردن مشتق توابع هدف و قیود تأثیر چشمگیری در زمان حل NLP می‌گذارد. در این مقاله به استخراج گرادینت تابع هدف و ژاکوبین قیود NLP حاصل از اعمال روش رونوشت مستقیم موضعی هرمیت سیمپسون می‌پردازیم و این مشتقات را در اختیار سالور NLP قرار می‌دهیم. در نهایت تأثیر این کار در کاهش زمان حل NLP، با حل یک مثال نشان داده می‌شود.

واژه‌های کلیدی: مساله کنترل بهینه، روش رونوشت مستقیم موضعی، روش هرمیت سیمپسون، مساله برنامه‌ریزی غیر خطی

طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 65K05, 49J15, 49J30

### ۱. مقدمه

در مسایل کنترل بهینه، هدف یافتن تابع کنترل  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^q$  و تابع حالت  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^p$  است به طوری که تابع زیر کمینه شود

$$(1) \quad \min J(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t_f) := g(\mathbf{x}(t_f), t_f)$$

که در آن  $g: \mathbb{R}^p \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  و هم زمان قیود دینامیکی زیر برقرار شوند

$$(2) \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \quad \mathbf{f}: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$$

که تابع  $\mathbf{f}$  تابعی مشتق‌پذیر و پیوسته نسبت به آرگومان‌هایش است. متغیر  $t$ ، متغیر زمان و مولفه‌های  $\mathbf{u}$  مجاز هستند که توابع تکه‌ای پیوسته بوده و مقادیرشان محدود باشد.  $t_0$  و  $t_f$  به ترتیب زمان شروع و زمان نهایی هستند و ممکن است ثابت یا آزاد در نظر گرفته شوند. شرایط مرزی مساله کنترل بهینه به صورت زیر است که در آن  $r$  تعداد شرایط مرزی ابتدایی و انتهایی می‌باشد

$$(3) \quad \psi(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_f), t_f) = 0 \quad \psi: \mathbb{R}^p \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^r, \quad r \leq p$$

همچنین مساله می‌تواند دارای قیود مسیری به صورت زیر باشد که در آن  $s$  تعداد قیود مسیر می‌باشد

$$(4) \quad \phi(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \leq 0 \quad \phi: \mathbb{R}^{p+q} \rightarrow \mathbb{R}^s$$

در مساله فوق  $t_f$  ممکن است آزاد یا ثابت باشد. برای آنکه رویکرد یکسانی در برخورد با مسایل زمان آزاد و ثابت داشته باشیم ابتدا بازه مساله (۱)-(۴) را از  $[t_0, t_f]$  به  $[0, 1]$  تبدیل می‌کنیم

$$(5) \quad \min J(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t_f) := g(\mathbf{x}(1), t_f),$$

$$(6) \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = (t_f - t_0) \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t),$$

$$(7) \quad \psi(\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(1), t_f) = 0,$$

$$(8) \quad \phi(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \leq 0 \quad t \in [0, 1].$$

توجه شود که به واسطه این تبدیل، باید از نمادهای متفاوتی برای توابع کنترل، حالت و همین‌طور توابع  $\mathbf{f}$  و  $\phi$  استفاده نمود. ولی به لحاظ سادگی و جلوگیری از کثرت نمادها، از همان نمادهای قبلی استفاده شده است.

\* ارائه‌دهنده

## ۲. روش رونوشت مستقیم موضعی هریت سیمپسون برای حل مسایل کنترل بهینه

مساله کنترل بهینه (۵)-(۸) را در نظر می‌گیریم در روش‌های رونوشت مستقیم موضعی ابتدا بازه زمانی  $[t_0, t_f]$  مساله را به  $n-1$  زیر بازه مساوی به صورت زیر تقسیم می‌کنیم [۱]

$$0 = t_1 < t_2 < \dots < t_n = 1$$

به طوری که

$$t_{k+1} = t_k + h \quad k = 1, \dots, n-1, \quad h = \frac{1}{n}.$$

$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(t_k)$  و  $\mathbf{u}_k = \mathbf{u}(t_k)$  به ترتیب مقدار تابع کنترل و حالت را در نقطه گره‌ای  $t_k$  نشان می‌دهد.

اگر روش گسسته‌سازی هریت سیمپسون را برای معادله (۶) بکار می‌بریم، آنگاه به رابطه زیر می‌رسیم:

$$(9) \quad \zeta_k := \mathbf{x}(t_{k+1}) - \mathbf{x}(t_k) - \frac{\Delta t}{\varphi} (\mathbf{f}(t_k, \mathbf{x}(t_k), \mathbf{u}(t_k)) + \varphi \mathbf{f}(t_k + \frac{h}{\varphi}, \mathbf{x}(t_k + \frac{h}{\varphi}), \mathbf{u}(t_k + \frac{h}{\varphi})) + \mathbf{f}(t_{k+1}, \mathbf{x}(t_{k+1}), \mathbf{u}(t_{k+1}))) = 0, \quad k = 1, \dots, n-1$$

متغیر حالت در نقاط میانی به وسیله درونیابی هریت به صورت زیر تقریب زده می‌شود

$$(10) \quad \chi_k := \mathbf{x}(t_k + \frac{h}{\varphi}) - \frac{1}{\varphi} (\mathbf{x}(t_{k+1}) + \mathbf{x}(t_k)) - \frac{h}{\lambda} (\mathbf{f}(t_k, \mathbf{x}(t_k), \mathbf{u}(t_k)) - \mathbf{f}(t_{k+1}, \mathbf{x}(t_{k+1}), \mathbf{u}(t_{k+1}))) = 0$$

همچنین قیود مسیر (۸) در نقاط گره‌ای  $t_k, k = 1, \dots, n-1$  به صورت زیر کالوکیت می‌کنیم

$$(11) \quad \phi(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, t_k, t_f) \leq 0 \quad t_k \in [0, 1].$$

شرایط مرزی نیز به صورت زیر بیان می‌شود

$$(12) \quad \psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_n, t_f) = 0$$

قرارداد: برای سادگی در نوشتار، گاهی از نمادهای خلاصه شده زیر استفاده می‌شود

$$\bar{\mathbf{u}}_j = \mathbf{u}(t_j + \frac{h}{\varphi}), \bar{\mathbf{x}}_j = \mathbf{x}(t_j + \frac{h}{\varphi}), \bar{\mathbf{f}}_j = \mathbf{f}(t_j + \frac{h}{\varphi}, \bar{\mathbf{x}}_j, \bar{\mathbf{u}}_j), \bar{\phi}_j = \phi(t_j + \frac{h}{\varphi}, \bar{\mathbf{x}}_j, \bar{\mathbf{u}}_j)$$

بنابراین در نهایت مساله کنترل بهینه (۵)-(۸) به مساله برنامه ریزی غیر خطی زیر رونوشت می‌شود

$$\begin{aligned} \min J &= g(\mathbf{x}(t_n), t_f) \\ \psi(\mathbf{x}(t_1), \mathbf{x}(t_n), t_f) &= 0, \\ \left. \begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k - \frac{\Delta t}{\varphi} (\mathbf{f}_k + \varphi \bar{\mathbf{f}}_k + \mathbf{f}_{k+1}) &= 0 \\ \bar{\mathbf{x}}_k - \frac{1}{\varphi} (\mathbf{x}(t_{k+1}) + \mathbf{x}(t_k)) - \frac{\Delta t}{\lambda} (\mathbf{f}_k - \mathbf{f}_{k+1}) &= 0 \\ \phi(\mathbf{x}(t_k), \mathbf{u}(t_k), t_k) &\leq 0 \\ \phi(\bar{\mathbf{x}}_k, \bar{\mathbf{u}}_k, (t_k + \frac{h}{\varphi})) &\leq 0 \end{aligned} \right\}, \quad k = 1, \dots, n-1, \end{aligned}$$

## ۳. گرادیان تابع هدف و ژاکوبین قیود در روش هریت سیمپسون

گرادیان تابع هدف عبارت است از

$$\frac{\partial g(\mathbf{x}_n, t_f)}{\partial \mathbf{X}} = \left[ \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}_1}, \frac{\partial g}{\partial \mathbf{u}_1}, \frac{\partial g}{\partial \bar{\mathbf{x}}_1}, \frac{\partial g}{\partial \bar{\mathbf{u}}_1}, \dots, \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}_{n-1}}, \frac{\partial g}{\partial \mathbf{u}_{n-1}}, \frac{\partial g}{\partial \bar{\mathbf{x}}_{n-1}}, \frac{\partial g}{\partial \bar{\mathbf{u}}_{n-1}}, \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}_n}, \frac{\partial g}{\partial \mathbf{u}_n}, \frac{\partial g}{\partial t_f} \right]^T$$

با توجه به این که، تابع هدف فقط به بردار  $\mathbf{x}_n$  و  $t_f$  بستگی دارد، لذا گرادیان تابع هدف نسبت به تمامی  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  ها،  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}$  و نیز  $\bar{\mathbf{x}}_1, \dots, \bar{\mathbf{x}}_{n-1}, \bar{\mathbf{u}}_1, \dots, \bar{\mathbf{u}}_{n-1}$  برابر صفر است بنابراین گرادیان تابع هدف به صورت زیر است

$$\nabla g = \left[ \underbrace{0_{1 \times p}, 0_{1 \times q}, 0_{1 \times p}, 0_{1 \times q}, \dots, 0_{1 \times q}}_{\varphi(n-1)}, \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}_n}(\mathbf{x}_n, t_f), 0_{1 \times q}, \frac{\partial g}{\partial t_f}(\mathbf{x}_n, t_f) \right]^T$$



$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \phi}{\partial x_n} & 0 & \frac{\partial \phi}{\partial t_f} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial u_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \phi_1}{\partial t_f} \\ 0 & 0 & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial u_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \phi_1}{\partial t_f} \\ -I - \frac{\Delta t}{6} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & -\frac{\Delta t}{6} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{2\Delta t}{3} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & -\frac{2\Delta t}{3} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & I - \frac{\Delta t}{6} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & -\frac{\Delta t}{6} \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \zeta_1}{\partial t_f} \\ -\frac{I}{2} - \frac{\Delta t}{8} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & -\frac{\Delta t}{8} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & I & 0 & -\frac{I}{2} + \frac{\Delta t}{8} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\Delta t}{8} \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial x_1}{\partial t_f} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial u_2} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \phi_2}{\partial t_f} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial \phi_{n-1}}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial \phi_{n-1}}{\partial u_{n-1}} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \phi_{n-1}}{\partial t_f} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial \phi_{n-1}}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial \phi_{n-1}}{\partial u_{n-1}} & 0 & \frac{\partial \phi_{n-1}}{\partial t_f} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -I - \frac{\Delta t}{6} \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}} & -\frac{\Delta t}{6} \frac{\partial f_{n-1}}{\partial u_{n-1}} & \frac{2\Delta t}{3} \frac{\partial f_n}{\partial x_n} & -\frac{2\Delta t}{3} \frac{\partial f_n}{\partial u_n} & I - \frac{\Delta t}{6} \frac{\partial f_n}{\partial x_n} & -\frac{\Delta t}{6} \frac{\partial f_n}{\partial u_n} & \frac{\partial \zeta_{n-1}}{\partial t_f} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{I}{2} - \frac{\Delta t}{8} \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}} & -\frac{\Delta t}{8} \frac{\partial f_{n-1}}{\partial u_{n-1}} & I & 0 & -\frac{I}{2} + \frac{\Delta t}{8} \frac{\partial f_n}{\partial x_n} & \frac{\Delta t}{8} \frac{\partial f_n}{\partial u_n} & \frac{\partial x_{n-1}}{\partial t_f} \end{bmatrix}$$

شکل ۱. نمودار جواب واقعی (خط ممتد) و جواب تقریبی (نقطه چین)، برای توابع حالت و کنترل به ازای  $n=20$

در تعیین ژاکوبین قیود، ترتیب قیود به صورت زیر در نظر گرفته می شود

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma := \psi(x_1, x_n, t_f) = 0, \\ \xi_1 := \phi(t_1, x_1, u_1; t_f) \leq 0, \bar{\xi}_1 := \phi(\bar{t}_1, \bar{x}_1, \bar{u}_1; t_f) \leq 0, \\ \zeta_1 := x_r - x_1 - \frac{\Delta t}{\epsilon}(f_1 + \forall \bar{f}_r + f_r) = 0, \chi_1 := \bar{x}_1 - \frac{1}{\gamma}(x_1 + x_r) - \frac{\Delta t}{\lambda}(f_1 - f_r) = 0, \\ \xi_r := \phi(t_r, x_r, u_r) \leq 0, \bar{\xi}_r := \phi(\bar{t}_r, \bar{x}_r, \bar{u}_r) \leq 0, \\ \zeta_r := x_r - x_r - \frac{\Delta t}{\epsilon}(f_r + \forall \bar{f}_r + f_r) = 0, \chi_r := \bar{x}_r - \frac{1}{\gamma}(x_r + x_r) - \frac{\Delta t}{\lambda}(f_r - f_r) = 0, \\ \vdots \\ \xi_{n-1} := \phi(t_{n-1}, x_{n-1}, u_{n-1}; t_f) \leq 0, \bar{\xi}_{n-1} := \phi(\bar{t}_{n-1}, \bar{x}_{n-1}, \bar{u}_{n-1}; t_f) \leq 0, \\ \zeta_{n-1} := x_n - x_{n-1} - \frac{\Delta t}{\epsilon}(f_{n-1} + \forall \bar{f}_n + f_n) = 0, \chi_{n-1} := \bar{x}_{n-1} - \frac{1}{\gamma}(x_{n-1} + x_n) - \frac{\Delta t}{\lambda}(f_{n-1} - f_n) = 0 \end{array} \right.$$

بنابر ترتیب فوق ماتریس و ژاکوبین قیود به صورت شکل ۱ خواهد بود. همان گونه که ملاحظه می شود، بردار گرادیان تابع هدف و ماتریس ژاکوبین توابع قیود، دارای درایه های صفر بسیار زیادی می باشد. دلیل این امر این است که در قیود تساوی و نامساوی NLP متناظر با مساله کنترل بهینه، تنها متغیرهای مربوط به دو گره متوالی ظاهر می شود، پس مشتق این قیود نسبت به متغیرهای مربوط به سایر گره ها صفر خواهد بود. بنابراین، در این حالت، گرادیان و ژاکوبین NLP تعداد محدود و اندکی درایه غیر صفر دارند. این گونه ماتریس ها، به ماتریس های تنک<sup>۳</sup> موسوم می باشد.

#### ۴. نتایج عددی

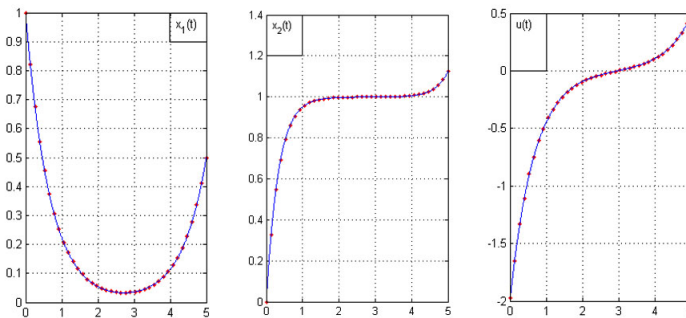
مثال ۱.۴ مساله کنترل بهینه که دارای مدلی به شکل زیر است [۲]، در نظر گرفته می شود

$$\begin{aligned} \min J &= x_2(t_f) \\ \dot{x}_1 &= 0.5x_1 + u \\ \dot{x}_2 &= x_1^2 + 0.5u^2 \\ x_1(0) &= 1, \quad x_1(t_f) = 0.5, \quad x_2(0) = 0 \end{aligned}$$

<sup>۳</sup> sparse

Time2(s)	Time1(s)	fun object of error	error control of norm	error state of norm	n
<b>0.4336</b>	9.2152	1.78648403-06	1.16815524-02	2.29508958-05	40
<b>0.8625</b>	19.449	1.11716544-07	4.02036392-03	2.22074264-06	80
<b>1.7595</b>	49.291	6.94228319-09	1.41093965-03	1.99835556-05	160
<b>3.7397</b>	179.96	4.34685176-10	4.91150432-04	3.19078956-06	320

جدول ۱. خطای جواب تقریبی بدست آمده از روش رونوشت مستقیم موضعی هرمیت سیمپسون برای توابع حالت، کنترل و تابع هدف برای n های متفاوت. Time ۱ نشان دهنده زمان اجرای الگوریتم بدون اعمال گرادیان و ژاکوبین و Time ۲ زمان اجرای الگوریتم با اعمال گرادیان و ژاکوبین می باشد.



شکل ۲. نمودار جواب واقعی (خط ممتد) و جواب تقریبی (نقطه چین)، برای توابع حالت و کنترل به ازای  $n=20$

جواب تحلیلی مساله به صورت زیر می باشد

$$\begin{aligned}
 x_1^*(t) &= a_1 e^{\circ.5t} + a_2 e^{-\circ.5t} & x_2^*(t) &= a_3 (e^{\circ.5t})^2 + a_4 a_3 (e^{-\circ.5t})^2 + c_1 \\
 u^*(t) &= -(a_5 e^{\circ.5t} + a_6 e^{-\circ.5t}) & a_1 &= \frac{\circ.5 - e^{-\circ.75}}{e^{\circ.75} - e^{-\circ.75}}, & a_2 &= \frac{-\circ.5 + e^{\circ.75}}{e^{\circ.75} - e^{-\circ.75}} \\
 a_3 &= \circ.5 a_1^2, & a_4 &= a_2^2, & c_1 &= a_1^2 - \circ.5 a_1, & a_5 &= -a_1, & a_6 &= -2a_2.
 \end{aligned}$$

در جدول ۱ میزان خطا برای توابع حالت، کنترل، هدف و همچنین زمان اجرای الگوریتم بدون اعمال گرادیان و ژاکوبین با Time ۱ و با اعمال گرادیان و ژاکوبین با Time ۲ به ازای n های مختلف گزارش شده است. [۲].

## ۵. نتیجه گیری نهایی

روش رونوشت مستقیم موضعی هرمیت سیمپسون را برای مساله کنترل بهینه پیاده سازی کردیم. با استفاده از این روش مساله کنترل بهینه به یک مساله برنامه ریزی غیر خطی تبدیل شد. در نهایت گرادیان تابع هدف و ژاکوبین NLP متناظر را بدست آوردیم. با حل یک مثال با روش ارایه شده، زمان اجرای الگوریتم در حالتی که بردار گرادیان تابع هدف و ماتریس ژاکوبین توابع قیود به صورت عددی و خودکار تولید می شود و نیز در حالتی که بردار گرادیان تابع هدف و ماتریس ژاکوبین به صورت تحلیلی بدست آمده و در اختیار سالور قرار داده شده است محاسبه کردیم. با مقایسه این دو زمان نتیجه می گیریم، در حالتی که مشتق توابع هدف و قیود توسط کاربر فراهم و در اختیار سالور قرار داده می شود، زمان حل NLP به طور چشمگیری کاهش می یابد.

## مراجع

- [1] Betts, John T, *Practical methods for optimal control and estimation using nonlinear programming*, SIAM, 2010.
- [2] Huntington, Geoffrey Todd, *Advancement and analysis of a Gauss pseudospectral transcription for optimal control problems*, PhD thesis, Citeseer, (2007).

[۲] ح. حسین دوست، روش های رونوشت مستقیم مبتنی بر تقریب های موضعی برای حل مسایل کنترل بهینه با جواب های ناهموار، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، (۱۳۹۴).

پست الکترونیکی: [hamide.hosseindost@gmail.com](mailto:hamide.hosseindost@gmail.com)

پست الکترونیکی: [m\\_shamsi@aut.ac.ir](mailto:m_shamsi@aut.ac.ir)

## بازسازی تصویر با استفاده از الگوریتم های تکراری SOR و کاکرمارز

حسین حسین پور\*

دانشکده ریاضی، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران

و رضا محمدی

دانشکده علوم پایه، دانشگاه نیشابور، نیشابور، ایران

چکیده. فرآیند بازسازی تصویر در پرتونگاری پزشکی با استفاده از داده های در دسترس با الگوریتم روش های تکراری مختلف انجام می گیرد. در این مقاله به بررسی روش های تکراری SOR، کاکرمارز، کاکرمارز تصادفی و کاکرمارز متقارن، پرداخته شده است. این الگوریتم ها در نرم افزار متلب پیاده سازی شده و نتایج خروجی آورده شده است. در یک مقایسه کلی بین الگوریتم های ذکر شده ابتدا پارامتر تخفیف بهینه برای تمامی الگوریتم ها تخمین زده و سپس مشاهده می شود که روش کاکرمارز ساده دارای کمترین میزان زمان پردازش اما روش کاکرمارز متقارن با کمترین تعداد تکرار و با مدت زمان پردازش قابل قبول، همچنین با بیشترین دقت به همگرایی و بازسازی تصویر رسیده است. **واژه های کلیدی:** بازسازی تصویر، پرتونگاری پزشکی، روش های تکراری، فوق تخفیف متوالی، کاکرمارز. **طبقه بندی موضوعی** [۲۰۱۰]: (۱ تا ۳ مورد) 13D45, 39B42.

## ۱. پیش گفتار

فرآیند بازسازی تصویر در روش های تکراری با یک فرض اولیه برای جواب (تصویر) شروع می شود و سپس این فرض با مقادیر اندازه گیری شده مقایسه و در هر مرحله بهتر و بهتر می شود. این فرآیند چندین مرتبه تکرار می شود تا مقادیر فرضی و اندازه گیری شده در محدوده ی قابل قبولی قرار گیرند. از جمله کاربردهای روش های تکراری در پرتونگاری پزشکی می باشد، وقتی که نیاز باشد اندازه و یا میزان سختی یک تومور داخل بدن شخصی اندازه گرفته شود، یک سطح مقطع شامل آن تومور (یا ناحیه ای که مشکوک به وجود تومور است) از بدن را در نظر می گیرند و آن را به تعدادی مربع کوچک به نام پیکسل تقسیم بندی می کنند. این پیکسل ها را به روش های مختلفی می توان شماره گذاری کرد، به طور مثال پیکسل موجود در گوشه بالا سمت چپ پیکسل اول و پیکسل سمت راست پایین پیکسل شماره  $n$  -ام شماره گذاری می شود. شکل ۱ (a). سپس تعدادی ( $m$  تا) اشعه که در اغلب موارد اشعه  $X$  است، با زوایای خاصی به این سطح مقطع تابانده می شود، به طوری که میزان طولی که هر اشعه داخل هر پیکسل طی می کند مشخص است. مساله بازسازی تصویر به صورت یک دستگاه معادلات خطی بسیار بزرگ مطرح می شود:

$$(1) \quad Ax = b,$$

که در آن  $x \in \mathbb{R}^n$  بردار تصویر،  $b \in \mathbb{R}^m$  داده های اندازه گیری شده و  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  ماتریس ضرایب می باشد، از یک مقدار اولیه دلخواه  $x^{(0)}$  شروع می کنند و دنباله ای از بردارها را به صورت  $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$  تولید می کنند که به جواب  $x$  همگرا می شود [۴، ۶]. هدف این مقاله ارائه یک الگوریتم تکراری کارا و دقیق برای حل دستگاه حاصل از مساله بازسازی تصویر بر مبنای روش مشهور کاکرمارز می باشد [۲]. به تازگی روش کاکرمارز با توجه به ویژگی ترکیب شدن آن با فرآیند تصادفی بسیار مورد توجه قرار گرفته است [۱، ۸].

## ۲. روش های تکراری SOR و کاکرمارز

۲.۱. روش SOR. فرمول روش SOR به صورت زیر است:

$$(2) \quad x_i^{(k)} = (1 - \omega)x_i^{(k-1)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left[ b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k-1)} \right],$$

که شکل ماتریسی آن عبارتست از:  $x^{(k)} = T_{\omega}x^{(k-1)}C_{\omega}$  که  $T_{\omega} = (D - \omega L)^{-1}[(1 - \omega)D + \omega U]$  و  $b = C_{\omega}^{-1}(D - \omega L)^{-1}b$  که به  $\omega$ ، پارامتر تخفیف می گویند [۱، ۲].

قضیه ۲.۱.۲. (استروفسکی-ریچ) اگر ماتریس  $A$ ، معین مثبت باشد و  $0 < \omega < 2$  آنگاه روش SOR برای هر بردار اولیه دلخواه  $x^{(0)}$  همگرا است.

\* ارائه دهنده

۲.۲. روش کاکزمارز. روش کلاسیک و شناخته شده بازسازی جبری همان روش کاکزمارز نام دارد. در روش های بازسازی تکراری ترتیبی تصویر  $x$ ، در هر مرحله فقط از یکی از مجموعه های محدب  $C_i$  استفاده می کنیم و سپس به سراغ مجموعه محدب بعدی می رویم. در هر گام یکی از معادلات به روز رسانی و از نتیجه ی حاصل در محاسبات بعدی استفاده می شود. شکل ۱ (b) نحوه عملکرد الگوریتم ART را نشان می دهد [۵].

روش کاکزمارز، در هر تکرار شامل گذری از سطرها در ماتریس ضرایب  $A$  است. روش کاکزمارز اصطلاحاً مبتنی بر سطر نامیده می شود، چون در هر گام از یک معادله استفاده می کند، در نتیجه در هر تکرار شامل  $m$  گام است. الگوریتم روش به صورت زیر می باشد:

$$(۳) \quad x^k = x^{k-1} + \frac{b_i - \langle a_i, x^{k-1} \rangle}{\|a_i\|_2^2} a_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

برای کنترل سرعت همگرایی در روش تکراری از پارامتر  $\lambda_k$  به صورت زیر استفاده می شود:

$$(۴) \quad x^k = x^{k-1} + \lambda_k \frac{b_i - \langle a_i, x^{k-1} \rangle}{\|a_i\|_2^2} a_i, \quad \lambda_k \in (0, 2).$$

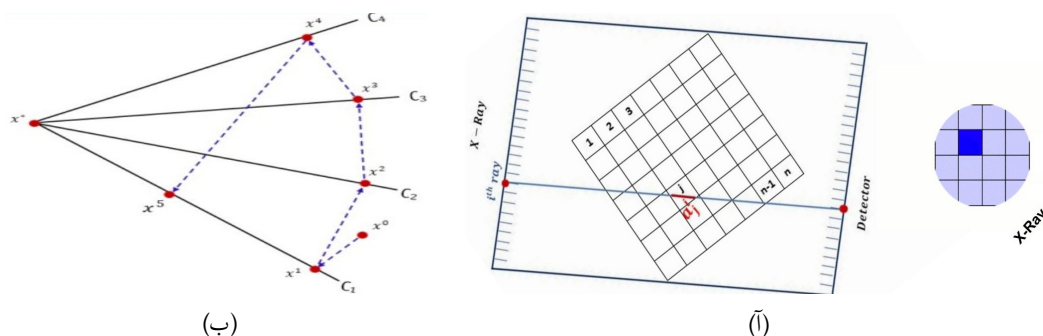
۳.۲. روش کاکزمارز تصادفی. ما نمونه ای از روش کاکزمارز برای سیستم های خطی سازگار به نام کاکزمارز تصادفی را معرفی می کنیم. زمانی که در الگوریتم کاکزمارز به جای نوشتن سطرها  $A$  به ترتیب و منظم به طور تصادفی از آنها انتخاب می کنیم، همگرایی روش کاکزمارز می تواند به صورت قابل توجهی بهبود یابد. الگوریتم روش به صورت زیر می باشد:

$$(۵) \quad x^k = x^{k-1} + \lambda_k \frac{b_i - \langle a_i, x^{k-1} \rangle}{\|a_i\|_2^2} a_i, \quad i \in \{1, 2, \dots, m\},$$

که  $i$  از مجموعه ی  $\{1, 2, \dots, m\}$  به طور تصادفی با احتمال مناسب  $\|a_i\|_2^2$  انتخاب می شود. نتیجه مهم این است که  $x^k$  به طور نمایی به جواب دستگاه  $Ax = b$  همگراست. در روش کاکزمارز تصادفی ساده سطرها  $A$  بطور تصادفی با احتمال یکسان انتخاب می شوند، اما در کاکزمارز تصادفی سطرها  $A$  به طور تصادفی با احتمال نرم ۲- از سطرها انتخاب می شوند.

۴.۲. روش کاکزمارز متقارن. روش کاکزمارز متقارن به طور کامل ترتیبی است و شامل یک گذر از روش کاکزمارز و به دنبال آن گذری دیگر از روش کاکزمارز است که معادلات در ترتیب معکوس استفاده شده اند. بنابراین هر تکرار روش فوق شامل  $2m - 2$  گام است و الگوریتم روش به صورت زیر می باشد:

$$(۶) \quad x^k = x^{k-1} + \lambda_k \frac{b_i - \langle a_i, x^{k-1} \rangle}{\|a_i\|_2^2} a_i.$$



شکل ۱. (آ) شماره گذاری پیکسل ها (ب) نحوه عملکرد الگوریتم ART

### ۳. نتایج عددی

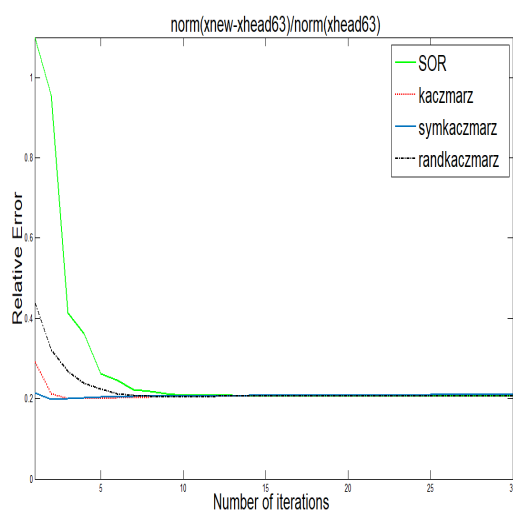
نتایج عددی حاصل از الگوریتم های ذکر شده در این مقاله برای شرط توقف  $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \leq 10^{-3}$  همراه با بردار اولیه  $x^{(0)} = (0, 0, \dots, 0)^T$  مورد بررسی قرار گرفته شده است. در جدول ۱ تعداد تکرارها برای رسیدن به همگرایی، زمان پردازش (ثانیه) و میزان خطا برای تمامی الگوریتم ها بر حسب پارامتر تخفیف های مختلف قابل ملاحظه می باشد. بنابراین می توانیم پارامتر تخفیف بهینه را تخمین بزنیم، که بر این اساس پارامتر تخفیف بهینه برای تمامی الگوریتم ها برابر با  $0.5$  می باشد.

جدول ۱. نتایج الگوریتم روش های (a) SOR (b) کاکرمارز (c) کاکرمارز تصادفی (d) کاکرمارز متقارن

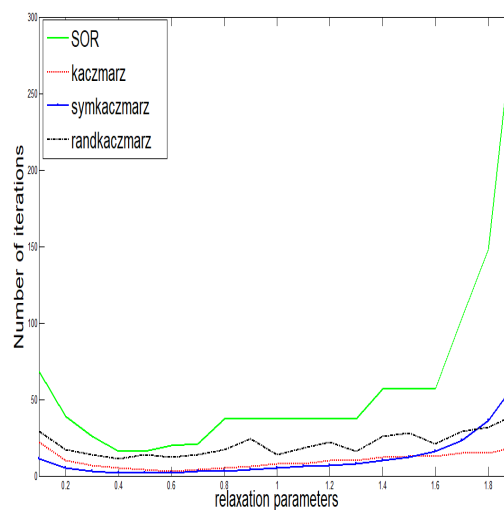
(a)				(b)			
$\omega$	تعداد تکرارها تا همگرایی	زمان (s)	میزان خطا (RE)	$\lambda_k$	تعداد تکرارها تا همگرایی	زمان (s)	میزان خطا (RE)
۰/۱	۶۸	۵۱	۰/۲۰۶۸	۰/۱	۲۲	۵/۲۳	۰/۱۹۷۵
۰/۳	۲۶	۲۵	۰/۲۰۶۷	۰/۳	۷	۵/۱۰	۰/۱۹۸۶
۰/۵	۱۶	۲۳	۰/۲۰۶۶	۰/۵	۳	۴/۵۸	۰/۲۰۰۱
۰/۷	۲۱	۲۹	۰/۲۰۶۶	۰/۷	۴	۴/۶۸	۰/۲۰۴۰
۱/۱	۳۷	۵۴	۰/۲۰۶۷	۱/۱	۸	۴/۷۵	۰/۲۰۸۲
۱/۵	۵۷	۱۲۲	۰/۲۰۶۷	۱/۵	۱۳	۴/۸۳	۰/۲۲۶۱
۱/۹	۳۰۴	۳۲۷	۰/۲۰۶۸	۱/۹	۱۹	۴/۹۱	۰/۴۱۷۷
(c)				(d)			
$\lambda_k$	تعداد تکرارها تا همگرایی	زمان (s)	میزان خطا (RE)	$\lambda_k$	تعداد تکرارها تا همگرایی	زمان (s)	میزان خطا (RE)
۰/۱	۲۹	۷/۶۴	۰/۲۰۱۱	۰/۱	۱۱	۱۰/۶۷	۰/۱۹۷۵
۰/۳	۱۴	۶/۴۶	۰/۲۰۴۳	۰/۳	۳	۹/۵۴	۰/۱۹۸۰
۰/۵	۱۳	۶/۲۵	۰/۲۰۴۴	۰/۵	۲	۹/۱۸	۰/۱۹۸۸
۰/۷	۱۴	۶/۲۷	۰/۲۰۶۳	۰/۷	۳	۹/۲۶	۰/۲۰۳۵
۱/۱	۱۸	۶/۴۳	۰/۲۰۸۹	۱/۱	۶	۹/۳۶	۰/۲۰۶۸
۱/۵	۲۸	۶/۵۸	۰/۲۱۴۱	۱/۵	۱۲	۹/۴۸	۰/۲۱۴۹
۱/۹	۴۰	۶/۸۴	۰/۲۲۴۹	۱/۹	۶۰	۹/۵۳	۰/۲۲۵۷

#### ۴. دست‌آوردهای پژوهش

همانطور که در جدول ۱ مشاهده می‌شود تعداد تکرارها تا رسیدن به همگرایی و زمان پردازش، برای پارامتر تخفیف بهینه ی ذکر شده در هر چهار الگوریتم، کمترین مقدار را دارند، اما برای میزان خطا در هر الگوریتم با پارامترهای تخفیف مختلف مشاهده می‌شود که در الگوریتم روش SOR کمترین میزان خطا در پارامتر تخفیف بهینه ی ۰/۵ قابل مشاهده است. اما در سه الگوریتم دیگر با افزایش پارامتر تخفیف، میزان خطا نیز افزایش می‌یابد. همچنین در شکل ۲ نمودار حاصل از داده‌ها در متلب آورده شده است که نشان دهنده این است که پارامتر تخفیف بهینه ۰/۵ می‌باشد و همچنین در شکل ۲ قسمت (b) دیده می‌شود که روش کاکرمارز متقارن در تکرارهای ابتدایی به همگرایی می‌رسد و در جواب دارای خطای کمتری نسبت به روش های دیگر بررسی شده در این مقاله می‌باشد.



(ب)



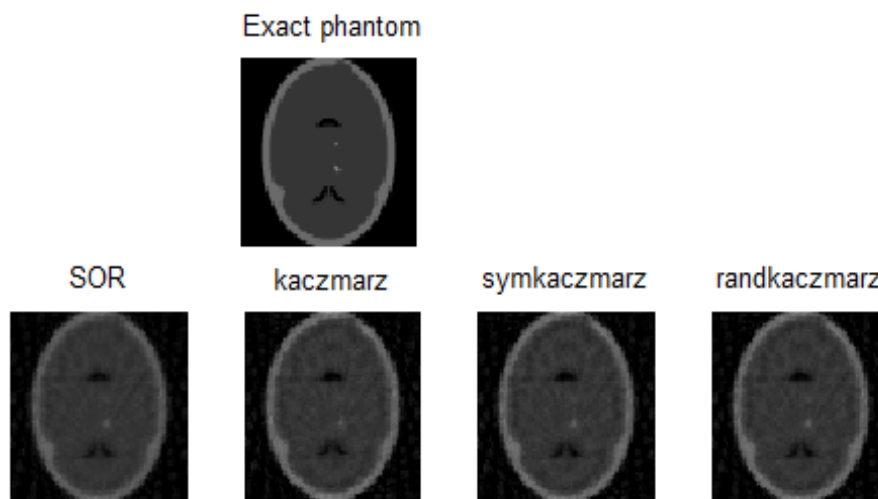
(آ)

شکل ۲. نمودار (آ) تعداد تکرارها تا همگرایی بر اساس تغییرات پارامتر تخفیف (ب) میزان خطا بر اساس تغییرات تکرارها تا همگرایی

جدول ۲. نتایج بررسی برای تمامی روش ها با پارامتر تخفیف ۰/۵

تعداد تکرارها تا همگرایی	زمان (s)	میزان خطا (RE)
۱۶	۲۳	۰/۲۰۶۶
۳	۴/۵۸	۰/۲۰۰۱
۱۳	۶/۲۵	۰/۲۰۴۴
۲	۹/۱۸	۰/۱۹۸۸

با توجه به جدول ۲ در یک مقایسه کلی بین الگوریتم های ذکر شده، مشاهده می شود که روش کاکزمارز ساده دارای کمترین میزان زمان پردازش اما روش کاکزمارز متقارن با کمترین تعداد تکرار، مدت زمان پردازش قابل قبول و همچنین با بیشترین دقت (کمترین خطا) به همگرایی و بازسازی تصویر (شکل ۳) رسیده است. و همچنین در شکل ۳ تصویر بازسازی شده توسط الگوریتم های ذکر شده دیگر نیز آورده شده است.



شکل ۳. تصاویر بازسازی شده توسط هر الگوریتم به همراه تصویر واقعی

### مراجع

1. Numerical analysis: a second course, Ortega, James M, (1990), SIAM
2. An introduction to numerical analysis, Atkinson, Kendall E, (2008), John Wiley & Sons
3. Angenaherte auflösung von systemen linearer glei-chungen, Karczmarz, S, Bull. Int. Acad. Pol. Sic. Let., Cl. Sci. Math. Nat., 355-357, (1937)
4. Image reconstruction from projections, Herman, Gabor T, The fundamental of computerized tomography, 260-276, (1980), Academic press
5. The algebraic reconstruction technique (Art), Raparia, D and Alessi, J and Kponou, A, Proceedings of the 1997 Particle Accelerator Conference (Cat. No. 97CH36167), Vol. 2, 2023-2025, (1997), IEEE
6. Convergence studies on iterative algorithms for image reconstruction, Jiang, Ming and Wang, Ge, IEEE Transactions on Medical Imaging, Vol. 22, number=5, 569-579, (2003), IEEE
7. A note on the behavior of the randomized Kaczmarz algorithm of Strohmer and Vershynin, Censor, Yair and Herman, Gabor T and Jiang, Ming, Journal of Fourier Analysis and Applications, Vol 15. number=4, 431-436, (2009), Springer
8. A randomized Kaczmarz algorithm with exponential convergence, Strohmer, Thomas and Vershynin, Roman, Journal of Fourier Analysis and Applications, Vol. 15, number=2, 262, (2009), Springer

پست الکترونیکی: [h\\_hosseinpour@mathdep.iust.ac.ir](mailto:h_hosseinpour@mathdep.iust.ac.ir)

پست الکترونیکی: [mohammadi@neyshabur.ac.ir](mailto:mohammadi@neyshabur.ac.ir)

## حل عددی معادلات انتشار هذلولی با استفاده از روش مربع‌ساز دیفرانسیل

احمد رضا حقیقی

گروه ریاضی، دانشکده فنی شهید شمسی‌پور، دانشگاه فنی و حرفه‌ای، تهران، ایران

و فروزان رحیمیان\*

گروه ریاضی، دانشگاه صنعتی ارومیه، ارومیه، ایران

چکیده. در مطالعه حاضر یک روش مربع‌ساز دیفرانسیل برای حل عددی معادله‌ی انتشار هذلولی که در آن حرکت جریان تحت تاثیر انتقال و انتشار است، ارائه می‌شود. روش مربع‌ساز دیفرانسیل مبتنی بر توابع بی اسپلاین مکعبی اصلاح شده می‌باشد. با اعمال این روش معادله‌ی هذلولی جزئی به دستگاهی از معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه‌ی اول نسبت به زمان تبدیل می‌شود. سپس این دستگاه با استفاده از روش رانگ-کوتا با حفظ پایداری حل می‌شود. برای بررسی درستی و کارایی روش ارائه شده مثالی از معادله‌ی تلگراف دوبعدی ارائه و نتایج عددی حاصل از روش فوق با جواب تحلیلی مورد مقایسه قرار گرفته و این نتایج با ذکر خطاهایی بیان شده‌اند. واژه‌های کلیدی: معادلات انتشار هذلولی، روش مربع‌ساز دیفرانسیل، توابع بی اسپلاین مکعبی اصلاح شده. طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 13D45, 39B42.

## ۱. پیش‌گفتار

معادلات دیفرانسیل جزئی هذلولی نقش مهمی در فرمول‌بندی معادلات اساسی در فیزیک اتمی دارند و در بیان پدیده‌های مختلف در علوم کاربردی هم‌چون صنایع هوا-فضا، شیمی و زیست‌شناسی نیز کاربرد دارند [۱]. در سال‌های اخیر تلاش‌های زیادی در بررسی و توسعه‌ی روش‌های عددی پایدار برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی هذلولی صورت گرفته است، که می‌توان به کارهای حقیقی و همکاران اشاره کرد [۲، ۳]. در تحقیق حاضر یک معادله‌ی انتشار هذلولی دوبعدی که در آن هم انتقال و هم انتشار در حرکت جریان موثرند را در نظر گرفته‌ایم، که این معادله می‌تواند به عنوان یک حالت کلی از معادله‌ی تلگراف محسوب شود. در ابتدا معادله‌ی هذلولی دوبعدی زیر که شامل انتشار و انتقال روی یک دامنه‌ی مستطیلی  $\Omega \in R^2$  است در نظر گرفته می‌شود

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} + P \frac{\partial u}{\partial x} + Q \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (x, y) \in \Omega, \quad t \in (0, T].$$

شرایط اولیه‌ی معادله (۱) به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود

$$(2) \quad \begin{aligned} u(x, y, 0) &= u_0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) &= u_1(x, y), \quad (x, y) \in \Omega. \end{aligned}$$

شرایط مرزی دیریکله‌ی معادله (۱) به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود [۴]

$$(3) \quad u(x, y, t) = f(x, y, t), \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad t \in (0, T].$$

معادلات مشابه در زمینه‌های مختلف همانند مدل‌های فیزیکی با میرایی غیرخطی و انتقال حافظه، فرآیند پخش در حضور میدان پتانسیل، و مدل‌های هذلولی برای مسایل انتقال-انتشار در دینامیک سیالات محاسباتی کاربرد دارند. با معرفی یک تابع کمکی  $w$  به صورت

$$(4) \quad w = \frac{\partial u}{\partial t} + u, \quad (x, y) \in \Omega, \quad t \in (0, T]$$

معادله‌ی (۱) به دستگاهی از معادلات دیفرانسیل جزئی به صورت زیر تبدیل می‌شود

$$(5) \quad \frac{\partial w}{\partial t} + P \frac{\partial u}{\partial x} + Q \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

که مقادیر اولیه و شرایط مقدار مرزی روی  $w$  به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$(6) \quad w(x, y, 0) = w_0(x, y, 0), \quad (x, y) \in \Omega$$

$$(7) \quad w(x, y, t) = g(x, y, t), \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad t \in (0, T]$$

\* ارائه‌دهنده

## ۲. روش عددی

روش مربع‌ساز دیفرانسیل یک روش عددی برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی است. این روش مشتقات تابع در تعدادی نقطه‌ی مشخص را به‌صورت یک مجموع خطی از مقادیر تابع در نقاط مجزا در کل دامنه تقریب می‌زند. کاربرد راحت، دقت بالا و راحتی محاسبات باعث برتری این روش شده است [۵]. روش مربع‌ساز دیفرانسیل بطور گسترده در بسیاری از مسایل فیزیکی بکار گرفته شده است. با اعمال این روش مشتقات مکانی توابع مجهول در هر نقطه‌ی شبکه با استفاده از مجموع وزنی همه‌ی مقادیر تابع در نقاط مشخصی روی کل دامنه‌ی محاسباتی تقریب زده می‌شود. در سال‌های اخیر اکثر روش‌های مربع‌ساز دیفرانسیل از توابع آزمایشی مختلفی همانند: چندجمله‌ای‌های درونیاب لاگرانژ، چندجمله‌ای‌های لژاندار، توابع اسپلاین و غیره استفاده کرده‌اند. نویسندگان [۵، ۶]. از بسط سینوس و کسینوس مبتنی بر روش مربع‌ساز دیفرانسیل برای حل بسیاری از معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی استفاده کرده‌اند. میتال و همکارانش یک چندجمله‌ای مبتنی بر روش مربع‌ساز دیفرانسیل را برای حل عددی معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی ارائه دادند [۷]. در این مقاله، از یک روش مبتنی بر روش بی-اسپلاین مکعبی اصلاح شده برای محاسبه‌ی ضرایب وزنی روش مربع‌ساز دیفرانسیل بجای روش‌های سنتی درونیابی لاگرانژ استفاده شده است، سپس مساله‌ی هذلولوی با استفاده از روش مربع‌ساز دیفرانسیل بی-اسپلاین مکعبی اصلاح شده، حل می‌شود. روش  $MCB - DQM$  مساله‌ی هذلولوی را به دستگاهی از معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی تبدیل می‌کند. سپس این دستگاه با استفاده از روش  $spp - RK4$  حل می‌شود. در روش مربع‌ساز دیفرانسیل دوبعدی، ابتدا دامنه‌ی  $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b\}$  را با در نظر گرفتن طول گام‌های  $\Delta x = x_i - x_{i-1}$  در جهت محور  $x$  و  $\Delta y = y_j - y_{j-1}$  در جهت محور  $y$  به‌صورت  $D^1 = \{(x_i, y_j) : i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, M\}$  گسسته‌سازی می‌کنیم. طبق روش  $DQ$  تقریب مشتق جزئی مرتبه‌ی اول تابع  $u(x, y, t)$  نسبت به  $x$  در نقطه‌ی  $x_i$  با ثابت در نظر گرفتن  $y_j$ ‌ها، به‌صورت زیر است:

$$(۸) \quad u_x(x_i, y_j, t) = \sum_{k=1}^N a_{ik}^{(1)} u(x_k, y_j, t), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

به‌طور مشابه تقریب مشتق جزئی مرتبه‌ی اول تابع  $u(x, y, t)$  نسبت به  $y$  در نقطه‌ی  $y_j$  با با ثابت در نظر گرفتن  $x_i$ ‌ها، به‌صورت زیر است:

$$(۹) \quad u_y(x_i, y_j, t) = \sum_{k=1}^M \bar{a}_{jk}^{(1)} u(x_i, y_k, t), \quad j = 1, 2, \dots, M.$$

که  $a_{ik}^{(1)}$  و  $\bar{a}_{jk}^{(1)}$  مجهولاتی هستند که نشان‌دهنده‌ی ضرایب وزنی مشتقات جزئی مرتبه‌ی اول نسبت به  $x$  و  $y$  می‌باشند. در این مقاله، از فرم اصلاح‌شده‌ی توابع بی-اسپلاین مکعبی برای یافتن ضرایب وزنی  $a_{ik}^{(1)}$  و  $\bar{a}_{jk}^{(1)}$  استفاده شده است. این توابع به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$(۱۰) \quad \varphi_m(x) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (x - x_{m-2})^3, & x \in [x_{m-2}, x_{m-1}), \\ (x - x_{m-2})^3 - 4(x - x_{m-1})^3, & x \in [x_{m-1}, x_m), \\ (x_{m+2} - x)^3 - 4(x_{m+1} - x)^3, & x \in [x_m, x_{m+1}), \\ (x_{m+2} - x)^3, & x \in [x_{m+1}, x_{m+2}), \\ 0, & \text{O.W.} \end{cases}$$

که  $\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_N(x), \varphi_{N+1}(x)\}$  روی دامنه‌ی  $R$  یک مجموعه‌ی پایه را تشکیل می‌دهند. مقادیر بی-اسپلاین‌های مکعبی و مشتقات آن‌ها در نقاط گره‌ای در جدول زیر نمایش داده شده است:

جدول ۱. مقادیر بی-اسپلاین‌های مکعبی و مشتقات آن‌ها

اسپلاین‌های مکعبی	$x_{m-2}$	$x_{m-1}$	$x_m$	$x_{m+1}$	$x_{m+2}$
$\varphi_m(x)$	۰	۱	۴	۱	۰
$\varphi'_m(x)$	۰	$\frac{3}{h}$	۰	$-\frac{3}{h}$	۰
$\varphi''_m(x)$	۰	$\frac{6}{h^2}$	$-\frac{12}{h^2}$	$\frac{6}{h^2}$	۰



همچنین توابع بی-اسپلاین مکعبی بهبود یافته در نقاط گره‌ای نیز به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$(11) \quad \begin{cases} \phi_1(x) = \varphi_1(x) + 2\varphi_0(x), \\ \phi_2(x) = \varphi_2(x) - \varphi_0(x), \\ \phi_l(x) = \varphi_l(x), \quad l = 3, 4, \dots, N-2, \\ \phi_{N-1}(x) = \varphi_{N-1}(x) - \varphi_{N+1}(x), \\ \phi_N(x) = \varphi_N(x) + 2\varphi_{N+1}(x), \end{cases}$$

محاسبه‌ی ضرایب وزنی با ثابت در نظر گرفتن محور  $y$  ها در معادله‌ی (۹) ضرایب وزنی محاسبه می‌شوند. با قرار دادن توابع  $\phi_m(x)$ ,  $m = 1, 2, \dots, N$  در معادله‌ی (۹)، رابطه‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$(12) \quad \phi_l(x_i, y_j) = \sum_{k=1}^N a_{ik}^{(1)} \phi_l(x_k, y_j), \quad j = 1, 2, \dots, M.$$

برای هر  $l$  دلخواه که  $l = 3, 4, \dots, N$  به یک دستگاه جبری می‌رسیم. سپس با استفاده از الگوریتم توماس ضرایب وزنی مرتبه‌ی اول  $a_{ik}^{(1)}$  محاسبه می‌شوند. همچنین مشتقات مراتب بالاتر نیز با استفاده از روابط بازگشتی زیر بدست می‌آیند:

$$(13) \quad a_{ij}^{(r)} = r \left[ a_{ij}^{(1)} a_{ii}^{(r-1)} - \frac{a_{ij}^{(r-1)}}{x_i - x_j} \right], \quad i, j = 1, 2, \dots, N, \quad r = 2, 3, \dots, N-1, \quad i \neq j.$$

$$(14) \quad a_{ii}^{(r)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N \bar{a}_{ij}^{(r)}, \quad i = j.$$

ضرایب وزنی مشتقات مراتب بالاتر نسبت به  $y$  نیز به همین ترتیب محاسبه می‌شوند.

### ۳. نتایج عددی

مثال ۱۰.۳. در این مثال، معادله‌ی تلگراف دو بعدی

$$(15) \quad f(x, y, t) = (-2\alpha + \beta^2 - 1)e^{-t} \sinh(x) \sinh(y),$$

در ناحیه  $0 \leq x, y \leq 1$  با شرایط اولیه

$$(16) \quad \begin{aligned} u(x, y, 0) &= \sinh(x) \sinh(y), & (x, y) \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) &= -\sinh(x) \sinh(y), \end{aligned}$$

و شرایط مرزی

$$(17) \quad \begin{aligned} u(0, y, t) &= 0, & 0 \leq y \leq 1, & \quad x = 0, \\ u(1, y, t) &= e^{-t} \sinh(1) \sinh(y), & 0 \leq y \leq 1, & \quad x = 1, \\ u(x, 0, t) &= 0, & 0 \leq x \leq 1, & \quad y = 0, \\ u(x, 1, t) &= e^{-t} \sinh(x) \sinh(1), & 0 \leq x \leq 1, & \quad y = 1. \end{aligned}$$

جواب تحلیلی معادله (۱۵) با شرایط اولیه و مرزی (۱۶) و (۱۷) به صورت زیر است

$$(18) \quad u(x, y, t) = e^{-t} \sinh(x) \sinh(y).$$

فرض می‌کنیم  $\Delta x = \Delta y = 1$  و  $dt = 0.001$  و  $\alpha = 10$  و  $\beta = 5$  باشند. نتایج عددی حاصل از روش مورد استفاده در جدول ۲ با جواب تحلیلی مورد مقایسه قرار گرفته‌اند و نتیجه شده که جواب‌های بدست‌آمده با روش  $MCB - DQ$  به جواب‌های تحلیلی نزدیک می‌باشند.

جدول ۲. مقایسه‌ی نتایج عددی با حل تحلیلی

نقاط	روش تحلیلی	روش ارائه شده
(۰/۱, ۰/۱)	۰/۰۰۸۲	۰/۰۰۷۹
(۰/۲, ۰/۱)	۰/۰۰۱۶۵	۰/۰۰۱۵۹
(۰/۳, ۰/۶)	۰/۱۵۸۷	۰/۱۵۸۱
(۰/۴, ۰/۵)	۰/۱۷۵۲	۰/۱۷۴۶
(۰/۷, ۰/۶)	۰/۳۹۵۴	۰/۳۹۵۰
(۰/۸, ۰/۹)	۰/۸۶۲۷	۰/۸۶۲۳

#### ۴. نتیجه‌گیری

در مطالعه حاضر، یک روش مربع‌ساز دیفرانسیل بی-اسپلاین مکعبی اصلاح‌شده برای حل یک معادله‌ی هذلولوی دوبعدی با شرایط دیریکله و مسایل مقدار مرزی یک بعدی هذلولوی شامل: معادله‌ی گرمای غیرهمگن، معادله‌ی انتقال-انتشار و معادله‌ی تلگراف پیشنهاد داده‌ایم. یک روش مبتنی بر بی-اسپلاین‌های مکعبی اصلاح‌شده برای یافتن ضرایب وزنی به‌جای روش‌های قدیمی درونیایی لاگرانژ ارائه شده که استفاده از توابع بی-اسپلاین با روش مربع‌ساز دیفرانسیل باعث کارایی بهتر این روش و کوتاه شدن محاسبات می‌شود. بکارگیری آسان و دقت بالا نیز از مزایای این روش می‌باشد. همچنین در این روش از تعداد نقاط شبکه‌ی کمتری نسبت به سایر روش‌ها استفاده می‌شود و این موجب می‌شود که به حافظه‌ی کمتری برای ذخیره‌ی اطلاعات نیاز داشته باشیم.

#### مراجع

1. M. Lakestani, B.N. Saray, *Numerical solution of telegraph equation using interpolating scaling functions*, Computers & Mathematics with Applications, 60, no. 7 (2010): 1964-1972.
2. A.R. Haghighi, M. Shojaeifard, *Numerical solution of the one dimensional non-linear Burgers equation using the Adomian decomposition method and the comparison between the modified Local Crank-Nicolson method and the VIM exact solution*, International Journal of Industrial Mathematics, 7, no. 2 (2015): 149-159.
3. AR. Haghighi, Sh. Pakrou, A. Dadvand, *Comparison of the LBM with the modified local Crank-Nicolson method solution of transient one-dimensional nonlinear Burgers' equation*, International Journal of Computing Science and Mathematics, 7, no. 5 (2016): 459-466
4. R.C. Mittal, S. Dahiya, *Numerical simulation on hyperbolic diffusion equations using modified cubic B-spline differential quadrature methods*, Computers & Mathematics with Applications, 70, no. 5 (2015): 737-749
5. R. Bellman, B.G. Kashaf, J. Casti, *Differential quadrature: a technique for the rapid solution of nonlinear partial differential equations*, Journal of computational physics 10, no. 1 (1972): 40-52
6. A. Korkmaz, I. Dağ, *Shock wave simulations using Sinc differential quadrature method*, Engineering Computations, 28, no. 6 (2011): 654-674.
7. A. Korkmaz, I. Dağ, Shock, *A differential quadrature algorithm for nonlinear Schrodinger equation* Nonlinear Dynamics, 56, no. 1-2 (2009): 69-83.

پست الکترونیکی: [ah.haghighi@gmail.com](mailto:ah.haghighi@gmail.com)  
 پست الکترونیکی: [f.rahimiyan.68@gmail.com](mailto:f.rahimiyan.68@gmail.com)

## روش شبه‌طیفی برای حل عددی معادله بلک-شولز با اختیار فروش آمریکایی

صدیقه خانزاده\*

دانشکده ریاضی، دانشگاه صنعتی شیراز، شیراز، ایران

آمنه طالعی

دانشکده ریاضی، دانشگاه صنعتی شیراز، شیراز، ایران

چکیده. از مهم‌ترین مدل‌های ریاضی برای قیمت‌گذاری اختیار معامله، مدل قیمت‌گذاری بلک-شولز است که می‌توان به صورت معادلات دیفرانسیل پاره‌ای بیان شود. قیمت‌گذاری اختیار آمریکایی یک مساله مرز آزاد می‌باشد که تاکنون هیچ فرمول تحلیلی برای آن ارائه نشده است. لذا تحلیل رفتار این اختیار بصورت عددی می‌تواند جایز اهمیت باشد. در این مقاله، مساله قیمت‌گذاری اختیار آمریکایی را به معادله گرما تبدیل کرده و سپس به کمک مساله مکمل خطی به حل آن می‌پردازیم. به منظور بررسی حل عددی معادله بلک-شولز برای قیمت‌گذاری اختیار فروش آمریکایی، از روش شبه‌طیفی برای گسسته‌سازی متغیر قیمت و روش تفاضل متناهی کرانک-نیکلسون برای گسسته‌سازی متغیر زمان استفاده می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: روش شبه‌طیفی، معادله بلک-شولز، اختیار فروش آمریکایی.  
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 65M06, 65M70.

### ۱. پیش‌گفتار

اختیار معامله قراردادی است بین خریدار و فروشنده، که برای تجارت دارایی خاص در زمان معین در آینده استفاده می‌شود. بطور کلی اختیار معامله را می‌توان به دو دسته اختیار خرید و اختیار فروش تقسیم می‌کنند. یک اختیار فروش در واقع این حق (نه الزام) را به دارنده آن می‌دهد که با پرداخت قیمت اختیار، دارایی موضوع قرارداد را با قیمت معین و در تاریخ مشخص یا قبل از آن بفروشد. اختیار معامله خرید نیز به طور مشابه می‌باشد. همچنین اختیار معامله براساس سبک اعمال به دو دسته اختیار اروپایی و آمریکایی تقسیم می‌شود که تفاوت عمده آنها در زمان اجرا می‌باشد. قرارداد اختیار معامله اروپایی تنها در زمان سررسید صورت می‌پذیرد در صورتی که اختیار معامله آمریکایی در هر زمان قبل از تاریخ سررسید قابلیت اجرا را دارد. بنابراین دارنده این نوع اختیار با آزادی بیشتری در طول زمان قادر به اعمال اختیار است و احتمال زیان می‌تواند به صفر برسد. معادله بلک-شولز یک فرمول ریاضی برای ارزش‌گذاری قیمت اختیار است که در یک بازار کامل، بدون هزینه معاملاتی و بازار نقدی در نظر گرفته می‌شود. معادله بلک-شولز با مرز آزاد برای اختیار فروش آمریکایی به صورت زیر است:

$$(1) \quad \frac{\partial v_p}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 v_p}{\partial s^2} + (r - q)s \frac{\partial v_p}{\partial s} - rv_p = 0, \quad s_f(t) < s < +\infty, \quad 0 \leq t < T,$$

که در آن  $r$  نرخ بهره بدون ریسک،  $q$  سود سهام،  $s$  قیمت جاری سهام و  $\sigma$  نوسان‌پذیری قیمت سهام است.  $v_p$  ارزش اختیار معامله می‌باشد که تابعی از دارایی بنیادین  $s$  و زمان  $t$  است. همچنین  $s_f(t) = \min(E, \frac{rE}{q})$  می‌باشد.

در اختیار فروش،  $s_f$  بین  $[0, E]$  است بطوریکه دامنه اختیار توسط این منحنی به دو ناحیه تقسیم می‌شود. لازم به ذکر است که  $s_f$  نشان‌دهنده آخرین نقطه‌ای که تابع بازده با قیمت اختیار فروش برخورد می‌کند در نظر گرفته می‌شود. در ناحیه اول  $(s, t) \in (s_f, \infty) \times (0, T)$  می‌باشد که در این حالت مقدار  $v_p$  معلوم و برابر  $E - s$  است. در ناحیه دوم  $(s, t) \in (0, s_f)$  می‌باشد که در این حالت اختیار نگه‌داشته می‌شود و یا در اصطلاح زنده می‌ماند. در واقع میدان محاسباتی در هر لحظه زمانی  $t$ ، تنها مربوط به این قسمت می‌باشد. شرایط مرزی برای اختیار آمریکایی در یک طرف مرز معلوم  $(\lim_{s \rightarrow +\infty} v_p(s, t) = 0)$  و حالت نامعلوم مرز در سمت دیگر است. لذا خواهیم داشت:

$$v_p > \max(E - s, 0), \quad s > s_f.$$

در هر گام زمانی  $t_i$ ، با یافتن مرز دامنه محاسباتی یعنی  $s_f(t_i)$ ، برای مقادیر  $s < s_f(t_i)$  قیمت اختیار برابر با  $E - s$  خواهد شد. در مورد  $s > s_f(t_i)$  نیز اجرا به یک ضرر آنی منجر می‌شود زیرا

$$-v + E - s < 0,$$

\* ارائه‌دهنده

یعنی قیمت توافقی  $E$  نمی‌تواند ضرر حاصل از  $v$  و  $s$  را جبران کند. لذا نگهدارنده اختیار در هر گام زمانی وقتی  $s > s_f$  است اختیار را اجرا نمی‌کند.

بدلیل مجهول بودن مکان مرز آزاد، نیاز به یک شرط اضافی بر مرز آزاد داریم. برای این هدف، شرط  $\frac{\partial v_p}{\partial s}$  را برای اختیار فروش، متناظر با قسمتی از  $v_p$  که منطبق با خط مستقیم  $E - s$  و دارای شیب است در نظر می‌گیریم. حال با توجه به اصل عدم آربیتراژ می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial v_p}{\partial s} = -1.$$

با توجه به مطالبی که در بالا گفته شد شرایط نهایی و مرزی لازم برای معادله (۱) بصورت زیر می‌باشد:

$$(2) \quad \begin{cases} v_p(s, T) = \max(E - s, 0), & s_f(t) \leq s \leq +\infty, \\ v_p(s_f(t), t) = (E - s_f(t), 0), & \frac{\partial v_p}{\partial s}(s_f(t), t) = -1, \quad 0 \leq t \leq T, \\ \lim_{s \rightarrow +\infty} v_p(s, t) = 0, & 0 \leq t \leq T, \end{cases}$$

که در آن  $T$  زمان سررسید است.

به منظور حل عددی مساله (۲)-(۱)، تغییر متغیرهای زیر را در نظر می‌گیریم

$$x = \ln\left(\frac{s}{E}\right), \quad \tau = \frac{\sigma^2}{\gamma}(T - t), \quad v(x, \tau) = \frac{p}{E}, \quad v = e^{\alpha x + \beta \tau} w(x, \tau),$$

جاییکه  $\beta = -\frac{1}{4}(k' - 1)^2 - k$ ,  $\alpha = -\frac{1}{4}(k' - 1)$ ,  $k' = \frac{\gamma(r-q)}{\sigma^2}$  و  $k = \frac{\gamma r}{\sigma^2}$  می‌باشد. بنابراین با استفاده از مجموعه تغییرات بالا، معادله بلک-شولز را می‌توان بصورت زیر بیان کرد:

$$(3) \quad \frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad \tau > 0,$$

که یک معادله گرما با شرط اولیه زیر است:

$$(4) \quad w(x, 0) = v(x, 0) e^{-\alpha x} = \max(e^{\frac{1}{4}(k' - 1)x} - e^{\frac{1}{4}(k' + 1)x}, 0).$$

همانطور که مشاهده می‌کنیم با این تغییرات، شرط سود سهام بطور صریح در معادله (۳) ظاهر نمی‌شود. یافتن  $w(x, \tau)$  و مرز اعمال بهینه ناشناخته  $x_f(\tau)$  در معادله (۳)، معادل با یافتن مساله مانع برای اختیار فروش آمریکایی با سود سهام است که بصورت زیر در نظر گرفته می‌شود

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & x \leq x_f(\tau), \\ w(x, \tau) = g(x, \tau), & x > x_f(\tau), \end{cases}$$

با شرایط اولیه و مرزی:

$$\begin{cases} w(x, 0) = g(x, 0), \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} w(x, \tau) = g(x, \tau), \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} w(x, \tau) = 0. \end{cases}$$

جاییکه

$$(6) \quad w(x, 0) = e^{(\frac{1}{4}(k' - 1)^2 + k)\tau} \max(e^{\frac{1}{4}(k' - 1)x} - e^{\frac{1}{4}(k' + 1)x}, 0).$$

نظر به اینکه برای حل عددی مساله فوق، نیاز به یک فاصله متناهی داریم با توجه به ایده سوکوویک فقط مساله را برای  $x$  در یک فاصله مناسب  $[x_L, x_R]$  در نظر می‌گیریم. حال با بازنویسی مساله بصورت یک مساله مکمل خطی به فرم زیر می‌رسیم:

$$(7) \quad \frac{\partial w}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot (w(x, \tau) - g(x, \tau)) = 0,$$

با شرایط اولیه و مرزی

$$(8) \quad \begin{cases} w(x, 0) = g(x, 0) \\ w(x_R, \tau) = g(x_R, \tau) = 0, \\ w(x_L, \tau) = g(x_L, \tau). \end{cases}$$

برای یافتن حل عددی رویکرد ما این است که معادله گرمای زیر را حل کنیم

$$(9) \quad \frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

بطوری که

$$(10) \quad w(x, \tau) - g(x, \tau) > 0.$$

## ۲. گسسته سازی روش

برای گسسته‌سازی متغیر مکان از روش شبه‌طیفی در نقاط چبیشف گاوس لوباتو استفاده می‌کنیم [۳]. در این روش، ابتدا تقریبی برای متغیر  $w(x)$  روی بازه  $[-1, 1]$  به صورت

$$(11) \quad w(x) \approx \sum_{j=0}^N \phi_j(x) w(x_j),$$

در نظر می‌گیریم که  $\phi_j$ ها توابع درون‌یاب لاگرانژ می‌باشند. همچنین برای تقریب مشتق  $l$ ام خواهیم داشت

$$w^l(x) \approx \sum_{j=0}^N \phi_j^l(x) w(x_j).$$

اگر در نقاط چبیشف گاوس لوباتو تقریب مشتق را به دست آوریم ماتریس مشتق نظیر آن به صورت  $D^{(l)}$  ماتریسی با درایه‌های

$$(12) \quad d_{ij}^{(l)} = \phi_j^{(l)}(x_i), \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, N,$$

می‌باشد که درایه‌های ماتریس  $D$  را می‌توان به صورت زیر به دست آورد

$$d_{i,j} = \begin{cases} -\frac{c_i}{\sqrt{c_j}} \frac{(-1)^{i+j}}{\sin(i+j(\frac{\pi}{N})) \sin(i-j(\frac{\pi}{N}))}, & i \neq j, \\ \frac{1}{\sqrt{c_j}} \cos(\frac{i\pi}{N}) (1 + \cot^2(\frac{i\pi}{N})), & i = j, i \neq 0, N. \end{cases} \quad d_{0,0} = -d_{N,N} = \frac{2N^2 + 1}{6}.$$

همچنین برای گسسته‌سازی مشتق زمان در معادله (۹) با استفاده از روش کرانک-نیکلسون خواهیم داشت

$$\frac{w^{n+1} - w^n}{dt} = \frac{1}{\tau} (w_{xx}^{n+1} + w_{xx}^n),$$

که در آن  $w^{n+1} = w(x, \tau_{n+1})$ ,  $w^n = w(x, \tau_n)$  و طول گام زمان می‌باشد. معادله فوق را می‌توان به فرم زیر بازنویسی کرد

$$(13) \quad w^{n+1} - \beta w_{xx}^{n+1} = w^n + \beta w_{xx}^n,$$

که در آن  $\beta = \frac{dt}{\tau}$  است.

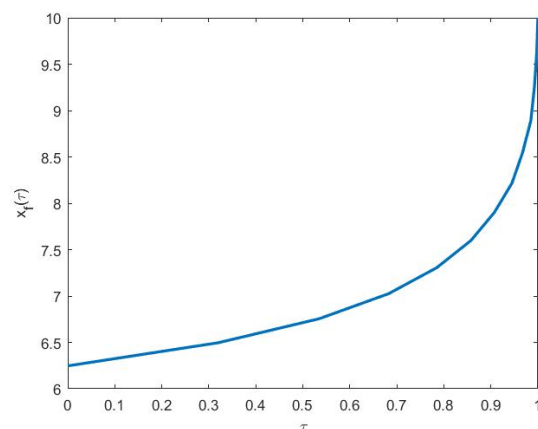
حال با قرار دادن (۱۱) و (۱۲) در معادله (۱۳) به سیستم جبری زیر می‌رسیم

$$\begin{aligned} & \sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^{N+1} (w_i^{n+1} + (-\beta \frac{2}{x_R - x_L})^2 d_{ij}^2) w_j^{n+1} \\ &= \sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^{N+1} (w_i^n + (\beta \frac{2}{x_R - x_L})^2 d_{ij}^2) w_j^n. \end{aligned}$$

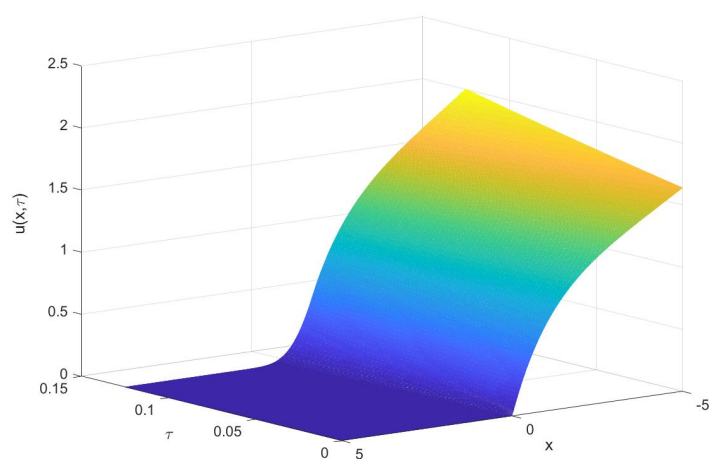
در هر گام زمانی با داشتن مقادیر تابع  $w$  در زمان  $n$ ام، مقادیر تابع در زمان  $n+1$ ام محاسبه می‌شود.

## ۳. نتایج اصلی

برای تمام پیاده‌سازی‌ها از نرم‌افزار متلب با پارامترهای  $1 = T$ ,  $10 = E$ ,  $2 = r$ ,  $5 = \sigma$ ,  $8 = q$ ,  $-5 = x_L$  و  $5 = x_R$  استفاده می‌کنیم. نمودارهای مرز آزاد و قیمت‌گذاری بصورت زیر بدست می‌آید.



شکل ۱. نمودار مرز آزاد  $x_f$



شکل ۲. نمودار ارزش اختیار فروش آمریکایی با سود سهام

### مراجع

1. N. Mavinga and C. Zhang, *Numerical Solutions of American Options with Dividends Using Finite Difference Methods*, North Carolina Journal of Mathematics and Statistics. 1 (2015), 1–16.
2. R. Seydel, *Tools for Computational Finance, fourth edition*, & Springer, Berlin, 2017.
3. L. N. Trefethen, *Spectral methods in MATLAB*, & SIAM, Philadelphia, 2000.

پست الکترونیکی: [sr.khanzade@gmail.com](mailto:sr.khanzade@gmail.com)  
 پست الکترونیکی: [a.taleei@sutech.ac.ir](mailto:a.taleei@sutech.ac.ir)

## بهینه‌سازی مشترک انرژی مراکز داده توزیع شده جغرافیایی و شبکه‌های متصل به آن بر مبنای مهاجرت ماشین‌های مجازی

مرضیه خواجه‌پور تادوانی\*  
بخش ریاضی، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران  
و محمدعلی رعایت‌پناه  
دانشکده ریاضی، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران

چکیده. امروزه نقش اصلی مراکز داده مربوط به تجزیه و تحلیل کلان‌داده‌ها می‌باشد. عمده هزینه عملیاتی در مراکز داده مربوط به مصرف انرژی بوده که می‌توان آن را با استفاده از ماشین‌های مجازی و توزیع مراکز در مناطق مختلف جغرافیایی کاهش داد. این مقاله برای حداقل نمودن هزینه انرژی، یک مدل ریاضی برای مدیریت مشترک انرژی مراکز داده توزیع شده جغرافیایی و شبکه‌های متصل به آن بر مبنای مهاجرت ماشین مجازی پیشنهاد داده که با استفاده از تکنیک‌های خطی‌سازی می‌توان مدل برنامه‌ریزی خطی صحیح آمیخته برای آن ارائه داد. واژه‌های کلیدی: مراکز داده، کلان‌داده، مهاجرت ماشین‌های مجازی. طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 78M50, 65Kxx, 90C27.

## ۱. پیش‌گفتار

عصر حاضر با توسعه شتابان فناوری مواجه است که به واسطه آن همه شرکت‌ها و سازمان‌ها ناچارند در مواجهه با آن راهبردهای خود را از نو تعریف کنند. در این راستا، تولید فزاینده داده‌ها منجر به حجم عظیمی از داده‌ها معروف به کلان‌داده شده است. که توسط مراکز داده یعنی مجموعه‌ای از سرورها، زیرساخت‌های امنیتی و تجهیزات الکترونیکی که وظیفه ارائه، نگهداری و پشتیبانی از سرویس‌های تحت شبکه (اینترنت/اینترنت/اکسترانت) دارند، تجزیه و تحلیل می‌شوند. لذا هزینه انرژی شامل انرژی مصرفی در مراکز داده و لینک‌های بین آن‌ها مورد اهمیت می‌باشد [۲]. از این رو در جهت کاهش هزینه انرژی ایده توزیع جغرافیایی مراکز داده مطرح می‌شود [۳]. توزیع جغرافیایی، قرار دادن مراکز داده در مناطق مختلف ناحیه جغرافیایی می‌باشد که قیمت انرژی در این مناطق با یکدیگر متفاوت است. به عنوان مثال شرکت گوگل مراکز داده خود را در مناطق مختلف جغرافیایی توزیع کرده است که ۱۹ مرکز داده در ایالات متحده، ۱۲ مرکز داده در اروپا، ۱ مرکز در روسیه، ۱ مرکز در آمریکای جنوبی و ۳ مرکز در آسیا می‌باشد [۵]. یک روش دیگر کاهش مصرف انرژی، تغییر اندازه مراکز داده براساس تعداد سرورهای فعال در آن می‌باشد [۴].

با ظهور تکنولوژی ماشین‌های مجازی که ترکیبی از سرورهای فیزیکی و نرم‌افزار مجازی‌ساز است، می‌توان بطور قابل توجهی انرژی را در مراکز داده کاهش داد [۱]. لین و همکاران [۲] به بررسی مساله مکان‌یابی ماشین‌های مجازی و توزیع درخواست کاربران در مراکز داده توزیع شده جغرافیایی پرداختند. آن‌ها برای مساله پیشنهادی یک مدل برنامه‌ریزی صحیح آمیخته ارائه دادند که آن را با استفاده از الگوریتم ابتکاری در سیستم‌های مقیاس بزرگ حل نمودند.

به هر حال در مسایل بیان شده تاثیر مهاجرت ماشین‌های مجازی یعنی انتقال وضعیت ماشین مجازی از یک سرور فیزیکی به سرور دیگر و هزینه انرژی در دوره‌های زمانی لحاظ نگردیده است. در این مقاله، مساله حداقل کردن هزینه‌ی ارتباطی بین مراکز داده و هزینه پردازی کلان داده‌ها در مرکز داده توزیع شده جغرافیایی با در نظر گرفتن مهاجرت ماشین‌های مجازی بین مراکز داده، توزیع درخواست کاربر به ماشین‌های مجازی، کیفیت خدمات برای کاربران و تغییر اندازه مراکز داده در دوره‌های زمانی مختلف مورد بررسی قرار می‌گیرد. مساله بیان شده به صورت یک برنامه‌ریزی غیرخطی صحیح آمیخته (MINLP) مدل می‌شود، که با استفاده از تکنیک‌های خطی‌سازی به یک مدل برنامه‌ریزی خطی صحیح آمیخته (MILP) تبدیل می‌شود. در بخش ۲ به ارایه مدل ریاضی مساله و در بخش ۳ به ارائه نتایج پرداخته می‌شود.

## ۲. مدل‌بندی مسئله

در مساله پیشنهادی مجموعه مراکز داده با  $I$  نمایش داده شده است که در مرکز داده  $i$ ،  $S_i$  سرور وجود دارد که وظیفه تجزیه و تحلیل درخواست‌های کاربر توسط ماشین‌های مجازی دارند. و مجموعه  $F$  درگاه ورودی در نظر گرفته شده است که درگاه‌های ورودی در ناحیه‌های مختلف، نزدیک به کاربران قرار گرفته‌اند و وظیفه جمع‌آوری و توزیع درخواست‌های کاربر دارند. همچنین فرض شده است که مجموعه ماشین‌های مجازی  $L$  و مجموعه درخواست‌ها  $K$  می‌باشد. این مساله، روی افق زمانی  $T$  که به دوره‌های مختلف زمانی تقسیم شده است، بررسی می‌شود. برای مدل کردن این مساله قیود زیر تعریف شده است.

\* ارائه‌دهنده

### (۱) قید تعادل بار

در ابتدا باید مطمئن شد که همه درخواست‌هایی که توسط درگاه‌های ورودی جمع‌آوری می‌شوند بین سرورهای مرکز داده برای تجزیه و تحلیل توزیع می‌شوند. برای چنین هدفی قید زیر داریم:

$$(۱) \quad \sum_{f \in F} \lambda_{fk}^t = \sum_{i \in I} \sum_{s \in S_i} \sum_{j \in I} \sum_{s' \in S_j} \sum_{l \in L_k} x_{ijs'kl}^t, \quad \forall k \in K, \forall t \in T,$$

که پارامتر  $\lambda_{fk}^t$  و متغیر  $x_{ijs'kl}^t$  به ترتیب، نرخ ورودی درخواست نوع  $k$  در درگاه ورودی  $f$  در دوره  $t$  و نرخ ورودی درخواست نوع  $k$  که در مرکز داده  $i$  روی سرور  $s$  توسط ماشین مجازی نوع  $l$  در دوره  $t$  دریافت شده است و در مرکز داده  $j$  روی سرور  $s'$  در همان دوره خدمت‌دهی شده است، را نشان می‌دهند. همچنین  $L_k$  بیانگر مجموعه‌ای از ماشین‌های مجازی است، که می‌توانند درخواست نوع  $k$  را پردازش کنند.

### (۲) قیود فعال بودن ماشین‌های مجازی و سرورها

فرض کنید  $y_{isl}^t \in \{0, 1\}$  یک متغیر دودویی باشد که نشان می‌دهد آیا ماشین مجازی نوع  $l$  در مرکز داده  $i$  روی سرور  $s$  در دوره  $t$  فعال است یا خیر. فعال بودن هر ماشین مجازی توسط قید زیر تعریف می‌شود:

$$(۲) \quad My_{isl}^t \geq \sum_{k \in K} \sum_{j \in I} \sum_{s' \in S_j} x_{ijs'kl}^t, \quad \forall i \in I, \forall s \in S_i, \forall l \in L, \forall t \in T,$$

جایی که  $M$  عددی به اندازه کافی بزرگ است. این قید بدین مفهوم است، زمانی یک ماشین مجازی فعال است که درخواستی دریافت کرده باشد در غیر این صورت مجبور است مقدار صفر اختیار کند.

همچنین  $x_{ijs}^t \in \{0, 1\}$  متغیر دودویی است، که نشان می‌دهد آیا سرور  $s$  در مرکز داده  $i$  در دوره  $t$  فعال است یا خیر. فعال بودن هر سرور نیز توسط قید زیر تعریف می‌شود:

$$(۳) \quad \frac{\sum_{l=1}^L y_{isl}^t}{L} \leq x_{is}^t \leq \sum_{l=1}^L y_{isl}^t, \quad \forall i \in I, \forall s \in S_i, \forall t \in T,$$

این قید نیز تضمین می‌کند زمانی یک سرور فعال است که میزان ماشین مجازی فعال باشد.

### (۳) قیود ظرفیت محاسباتی و نرخ پردازش

در این مدل فرض شده است که سرور  $s$  دارای ظرفیت محاسباتی  $\theta_s$  می‌باشد. لذا مجموع ظرفیت محاسباتی اختصاص داده شده به ماشین‌های مجازی در همه دوره‌ها که روی این سرور قرار گرفته‌اند نباید از این مقدار تجاوز کند. لذا داریم:

$$(۴) \quad \sum_{t \in T} \sum_{l \in L} y_{isl}^t \theta_{isl}^t \leq \theta_s, \quad \forall i \in I, \forall s \in S_i,$$

$$(۵) \quad \mu_{isl}^t = \alpha_l \theta_{isl}^t, \quad \forall i \in I, \forall s \in S_i, \forall l \in L, \forall t \in T,$$

در قید (۴) متغیر  $\theta_{isl}^t$ ، میزان منبع محاسباتی استفاده شده توسط ماشین مجازی نوع  $l$  در مرکز داده  $i$  روی سرور  $s$  در دوره  $t$  را نشان می‌دهد. قید (۵) نشان می‌دهد که نرخ پردازش هر ماشین مجازی با میزان منبع محاسباتی که استفاده می‌کند، متناسب است و در آن  $\alpha_l$  ثابتی وابسته به سرعت ماشین نوع  $l$  است.

### (۴) قید کیفیت خدمات

یکی از اصلی‌ترین قیود کیفیت خدمات، قید تاخیر است. منظور از قید تاخیر زمان پاسخگویی به درخواست‌های کاربران می‌باشد، که نباید از محدودیت زمانی در نظر گرفته شده ( $D$ ) تجاوز کند. با استفاده از نظریه صف مدت زمان پاسخگویی هر سرور به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(۶) \quad d_{is}^t = \frac{1}{\sum_{l \in L} \mu_{isl}^t - \sum_{l \in L} \sum_{k \in K} \sum_{j \in I} \sum_{s' \in S_j} x_{ijs'kl}^t}, \quad \forall i \in I, \forall s \in S_i, \forall t \in T,$$

لذا برای تامین کیفیت خدمات داریم:

$$(۷) \quad \frac{1}{\sum_{l \in L} \mu_{isl}^t - \sum_{l \in L} \sum_{k \in K} \sum_{j \in I} \sum_{s' \in S_j} x_{ijs'kl}^t} \leq D, \quad \forall i \in I, \forall s \in S_i, \forall t \in T,$$



(۵) قیود مهاجرت ماشین‌های مجازی

$$(۸) \quad \sum_{j \in I} \sum_{s' \in S_j} v_{i_s j_s' l}^t \geq \frac{\sum_{k \in K} \left[ \left( \sum_{j \in I} \sum_{s' \in S_j} x_{i_s j_s' k l}^t \right) - x_{i_s i_s k l}^t \right]}{\mu_l}, \quad \forall i \in I, \forall s \in S_i, \forall l \in L, \forall t \in T,$$

$$(۹) \quad \sum_{j \in I} \sum_{s' \in S_j} v_{j_s' i_s l}^t \geq \frac{\sum_{k \in K} \left[ \left( \sum_{j \in I} \sum_{s' \in S_j} x_{j_s' i_s k l}^t \right) - x_{i_s i_s k l}^t \right]}{\mu_l}, \quad \forall i \in I, \forall s \in S_i, \forall l \in L, \forall t \in T,$$

قیود (۸)، (۹) به ترتیب تعداد ماشین‌های مجازی که توسط هر سرور در یک مرکز داده معین، ارسال و دریافت می‌شود را محاسبه می‌کند. که تعداد آن‌ها به ترتیب، با نرخ درخواست‌هایی که ارسال به سرورهای دیگر مراکز داده و دریافت از دیگر سرورهای مراکز داده می‌شوند، وابسته است. در این مدل، متغیر  $v_{i_s j_s' l}^t$  تعداد ماشین‌های مجازی نوع  $l$  که از مرکز داده  $i$  روی سرور  $s$  به مرکز داده  $j$  روی سرور  $s'$  در دوره  $t$  مهاجرت می‌کنند، تعیین می‌کند. همچنین پارامتر  $\mu_l$  حداکثر نرخ خدمت‌دهی برای ماشین مجازی نوع  $l$  می‌باشد.

$$(۱۰) \quad \underline{w}_{i_s l}^t = \bar{w}_{i_s l}^t - \sum_{j \in I} \sum_{s' \in S_j} v_{i_s j_s' l}^t + \sum_{j \in I} \sum_{s' \in S_j} v_{j_s' i_s l}^t, \quad \forall i \in I, \forall l \in L, \forall t \in T,$$

قید (۱۰)، تعداد ماشین‌های مجازی نوع  $l$  در مرکز داده  $i$  روی سرور  $s$  در انتهای دوره  $t$ ، بعد از مهاجرت را محاسبه می‌کند. متغیرهای  $\underline{w}_{i_s l}^t$ ،  $\bar{w}_{i_s l}^t$  به ترتیب، تعداد ماشین‌های مجازی نوع  $l$  در مرکز داده  $i$  روی سرور  $s$  در ابتدای دوره  $t$  قبل از مهاجرت و در انتهای دوره بعد از مهاجرت را نشان می‌دهند.

$$(۱۱) \quad mig_{il}^t = ED_l \sum_{s \in S_i} \sum_{j \in I} \sum_{s' \in S_j} v_{j_s' i_s l}^t + ES_l \sum_{j \in I} \sum_{s' \in S_j} \sum_{s \in S_i} v_{i_s j_s' l}^t, \quad \forall i \in I, \forall l \in L, \forall t \in T,$$

قید (۱۱)، میزان انرژی که صرف عمل مهاجرت شده است را محاسبه می‌کند. پارامتر  $ED_l$  و  $ES_l$  به ترتیب، میزان انرژی که مرکز داده مبدا و مرکز داده مقصد برای مهاجرت ماشین مجازی نوع  $l$  مصرف کرده‌اند، را نشان می‌دهد. در این مدل فرض شده است که هر سرور ظرفیت معینی ( $P_{i_s l}$ ) برای مدیریت ماشین‌های مجازی دارند. قید (۱۲) تضمین می‌کند که تعداد ماشین‌های مجازی بعد از مهاجرت از ظرفیت هر سرور تجاوز نمی‌کند:

$$(۱۲) \quad \underline{w}_{i_s l}^t \leq P_{i_s l}, \quad \forall i \in I, \forall s \in S_i, \forall l \in L, \forall t \in T,$$

$$(۱۳) \quad \bar{w}_{i_s l}^t \geq \sum_{j \in I} \sum_{s' \in S_j} \sum_{k \in K} \frac{x_{i_s j_s' k l}^t}{\mu_l}, \quad \forall i \in I, \forall s \in S_i, \forall l \in L, \forall t \in T,$$

$$(۱۴) \quad \underline{w}_{i_s l}^t \geq \sum_{j \in I} \sum_{s' \in S_j} \sum_{k \in K} \frac{x_{j_s' i_s k l}^t}{\mu_l}, \quad \forall i \in I, \forall s \in S_i, \forall l \in L, \forall t \in T,$$

قید (۱۳)، (۱۴) به ترتیب تعداد ماشین‌های مجازی روی هر سرور قبل و بعد از مهاجرت را نشان می‌دهند. که هر دو تعداد به نرخ درخواست‌های ورودی و خروجی وابسته است.

(۶) پهنای باند

متغیر  $b_{ij}^t$ ، پهنای باند استفاده شده از لینک  $(i, j)$  در دوره  $t$  تعیین می‌کند. پهنای باند استفاده شده مربوط به انتقال ماشین‌های مجازی بین مراکز داده می‌باشد. بعلاوه متغیر  $z_{ij}^t$  یک متغیر دودویی است که نشان می‌دهد لینک  $(i, j)$  در دوره  $t$  فعال است یا خیر.

$$(۱۵) \quad b_{ij}^t = \sum_{l \in L} \sum_{s \in S_i} \sum_{s' \in S_j} v_{i_s j_s' l}^t (VMsize_l) + \sum_{k \in K} \left( B_k \sum_{l \in L} \sum_{s \in S_i} \sum_{s' \in S_j} x_{i_s j_s' k l}^t \right), \quad \forall i \in I, \forall j \in J, \forall t \in T,$$

$$(۱۶) \quad b_{ij}^t + b_{ji}^t \leq Q_{ij} z_{ij}^t, \quad \forall i \in I, \forall j \in J, \forall t \in T,$$

$$(۱۷) \quad z_{ij}^t = z_{ji}^t, \quad \forall i \in I, \forall j \in J, \forall t \in T,$$

قید (۱۵) پهنای باند استفاده شده بین مراکز داده‌های مختلف را محاسبه می‌کند. پارامترهای  $B_k$  و  $VMsize_l$  به ترتیب، پهنای باند مورد نیاز برای ماشین مجازی  $l$  و پهنای باند مورد نیاز برای درخواست نوع  $k$  را تعریف می‌کنند. قید (۱۶) تضمین می‌کند که مبادله ماشین‌های مجازی از ظرفیت لینک  $(Q_{ij})$ ، تجاوز نمی‌کند، و زمانی که لینک  $(i, j)$  غیرفعال است،  $(z_{ij} = 0)$ ، این قید مجبور می‌کند که سمت چپ نامساوی مقدار صفر اختیار کند. قید (۱۵) اطمینان می‌دهد که اگر یک لینک در یک جهت فعال بود در جهت دیگر نیز فعال می‌باشد.

(۷) تابع هدف

$$(18) \quad Z = \sum_{t \in T} \sum_{i \in I} M_i^t \left( \sum_{l \in L} \sum_{s \in S_i} \alpha_{i_s l} w_{i_s l}^t + mig_{il}^t + \sum_{s \in S_i} x_{i_s}^t Pr_i^t \right) + \sum_{t \in T} \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} E_{ij}^t b_{ij}^t z_{ij}^t$$

در تابع هدف، جمله اول هزینه انرژی مراکز داده در تمام دوره‌ها را محاسبه می‌کند. پارامترهای  $M_i^t$  و  $\alpha_{i_s l}$  به ترتیب، هزینه انرژی در مرکز داده  $i$  در دوره  $t$  و انرژی مورد نیاز برای فعال بودن یک ماشین مجازی نوع  $l$  در مرکز داده  $i$  روی سرور  $s$  نشان می‌دهند، همچنین پارامتر  $Pr_i^t$ ، انرژی مصرفی هر سرور در مرکز داده  $i$  معرفی می‌کند. جمله دوم هزینه انرژی لینک‌ها بین مراکز داده در تمام دوره‌ها محاسبه می‌کند. پارامتر  $E_{ij}^t$  هزینه انرژی در لینک  $(i, j)$  تعریف می‌کند.

بنابراین، مدل نهایی شامل حداقل‌سازی تابع هدف (۱۸) مشروط به قیود (۱)–(۵) و (۷)–(۱۷) می‌باشد. در مدل ارائه شده قیود (۴) و (۷) غیرخطی می‌باشند که در ادامه نحوه خطی‌سازی این دو قیود مورد بررسی قرار گرفته است. قید (۴) حاصلضرب یک متغیر دودویی  $(y_{i_s l}^t)$  در یک متغیر پیوسته نامنفی  $(\theta_{i_s l}^t)$  می‌باشد. قرار می‌دهیم:

$$y_{i_s l}^t \theta_{i_s l}^t = P_{i_s l}^t, \quad \forall i \in I, \forall s \in S_i, \forall l \in L, \forall t \in T$$

$$(19) \quad \sum_{t \in T} \sum_{l \in L} P_{i_s l}^t \leq \theta_s, \quad \forall i \in I, \forall s \in S_i,$$

$$(20) \quad P_{i_s l}^t \geq 0, \quad \forall i \in I, \forall s \in S_i, \forall l \in L, \forall t \in T,$$

$$(21) \quad P_{i_s l}^t \leq M y_{i_s l}^t, \quad \forall i \in I, \forall s \in S_i, \forall l \in L, \forall t \in T,$$

$$(22) \quad P_{i_s l}^t \leq \theta_{i_s l}^t, \quad \forall i \in I, \forall s \in S_i, \forall l \in L, \forall t \in T,$$

$$(23) \quad P_{i_s l}^t \geq \theta_{i_s l}^t + M(y_{i_s l}^t - 1), \quad \forall i \in I, \forall s \in S_i, \forall l \in L, \forall t \in T,$$

قید غیرخطی (۴) معادل با قیود خطی ۱۹–۲۳ می‌باشد. در قیود بالا  $M$ ، عددی به اندازه کافی بزرگ می‌باشد. برای قید غیرخطی (۷)، چون پارامتر  $D$  عدد مثبت و متناهی می‌باشد، برای برقراری این قید لازم است که مخرج قید (۷) مخالف صفر شود از این رو این قید را می‌توان به صورت معادل خطی زیر بیان نمود:

$$(24) \quad \sum_{l \in L} \mu_{i_s l}^t - \sum_{l \in L} \sum_{k \in K} \sum_{j \in I} \sum_{s' \in S_j} x_{j_s' i_s k l}^t \geq \frac{1}{D}, \quad \forall i \in I, \forall s \in S_i, \forall t \in T.$$

### ۳. نتایج اصلی

در این مقاله به توزیع درخواست‌ها بین سرورهای مرکز داده، تغییر اندازه مراکز داده، کیفیت خدمات برای کاربران و مهاجرت ماشین‌های مجازی بین مراکز داده توزیع شده جغرافیایی در دوره‌های مختلف برای حداقل نمودن هزینه پردازشی کلان‌داده‌ها و هزینه ارتباطی بین مراکز داده پرداخته شد. مدل‌بندی مشترک هزینه‌های پردازشی و ارتباطی منجر به مدل غیرخطی صحیح آمیخته شده است که با استفاده از تکنیک‌های خطی‌سازی به یک مدل خطی صحیح آمیخته تبدیل شد.

### مراجع

1. A. Barkat, M.T. Kechadi, G. Verticale, I. Filippini, and A. Capone, Green approach for joint management of geo-distributed data centers and interconnection networks, *Journal of Network and Systems Management* 26, 3 (2018), 723–754.
2. L. Gu, D. Zeng, S. Guo, and B. Ye, *Joint optimization of VM placement and request distribution for electricity cost cut in geo-distributed data centers*, In 2015 International Conference on Computing, Networking and Communications (ICNC) (pp. 717–721). IEEE. 2015, February.
3. A.A. Khalaf, and A.H. Abdalla, *Analysis of Cost Minimization Methods in Geo-distributed Data Centers*, In 2016 International Conference on Computer and Communication Engineering (ICCCCE) (pp. 241–245). IEEE. 2016, July.
4. M. Lin, A. Wierman, L.L.H. Andrew, and E. Thereska, *Dynamic right-sizing for power-proportional data centers*, *IEEE/ACM Transactions on Networking (TON)*, 21(5), pp.1378–1391. 2013.

5. T. Robertazzi, *Introduction to computer networking*, Springer, Berlin 2017.

پست الکترونیکی: [khajepur.marzie1370@gmail.com](mailto:khajepur.marzie1370@gmail.com)

پست الکترونیکی: [Raayatpanah@khu.ac.ir](mailto:Raayatpanah@khu.ac.ir)

## نویززدایی تصویر با استفاده از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی: رویکرد کنترل بهینه

نگین خوییینی ها\*

دانشکده ریاضی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران

رامتین داودی

دانشکده ریاضی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران

و دکتر سیدمحمد حسینی

دانشکده ریاضی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران

چکیده. نویززدایی تصویر یکی از زمینه‌های بسیار مهم در علم پردازش تصویر است. ابزارهای ریاضی بسیاری برای این منظور استفاده شده و معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی ( $PDE$ ) یکی از رویکردهای موفق بوده است. معرفی ضرایب مناسب برای  $PDE$  مورد نظر تاثیر بسزایی در بهبود عملکرد معادله در نویززدایی دارد. تاکنون تلاش‌های بسیاری برای تعیین بهترین ضرایب در معادلات معرفی شده صورت گرفته است. یکی از جدیدترین روش‌ها استفاده از کنترل بهینه در یافتن ضرایب معادله بر اساس نوع تصویر است. در این مقاله با معرفی یک معادله و تعیین ضرایب آن با استفاده از مساله‌ی کنترل بهینه، سعی بر دست یافتن به بهترین عملکرد نویززدایی روی تصویر داریم. **واژه‌های کلیدی:** پردازش تصویر، نویززدایی تصویر، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، کنترل بهینه. **طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]:** 65Y99, 35G61.

## ۱. پیش‌گفتار

تصاویر دیجیتال به دلایل گوناگون از جمله فشرده‌سازی، انتقال و... دچار نویز می‌شوند و این مساله پردازش‌های بعدی و استخراج اطلاعات از تصویر را دچار اختلال می‌کند. بنابراین نویززدایی تصویر یک مرحله‌ی بسیار مهم در دید کامپیوتری است [۵، ۷]. کاربرد معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی ( $PDE$ ) در نویززدایی تصویر طی سال‌های اخیر رو به گسترش بوده است و تعداد زیادی  $PDE$  مطرح شد، تا با مساله‌ی نویززدایی ضمن حفظ اطلاعات مهم تصویر برخورد کنند. انگیزه‌ی استفاده از  $PDE$  شامل مدل سازی بهتر ریاضی، ارتباط بیشتر با فیزیک و تقریب اقلیدسی مناسب‌تر از مساله می‌شود. یکی از تلاش‌های ابتدایی در این زمینه، استفاده از معادله‌ی گرما با فرض تصویر نویزدار به عنوان مقدار اولیه است. معادله‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$(۱) \quad u_t = c(u_{xx} + u_{yy})$$

که در آن  $c$  یک مقدار ثابت به نام ضریب انتشار گرما و  $u(x, y, 0)$  تصویر نویزدار به عنوان مقدار اولیه‌ی معادله است. تصویر خروجی این معادله یک تصویر هموارتر نسبت به تصویر اولیه است که نویز کمتری دارد با این وجود مقدار قابل توجهی از اطلاعات مهم تصویر را از دست می‌دهد و تار می‌شود. در واقع هرچه مقدار  $t$  (تراز) در معادله بالاتر باشد، تصویر تارتر خواهد بود. یکی از روش‌های پیشرو برای برطرف کردن این مشکل، معادله‌ی معرفی شده توسط  $Perona$  و  $Malik$  است [۶]، که یک معادله‌ی گرمای غیرخطی به فرم زیر را تعریف کردند:

$$(۲) \quad u_t = c(x, y, t)\Delta u + \nabla c \cdot \nabla u$$

که در آن  $\Delta$  و  $\nabla$  به ترتیب عملگرهای لاپلاسین و گرادین هستند. در این معادله که اختصاراً  $PDE$  مرتبه دوم  $PM$  نامیده می‌شود، ضریب انتشار گرما تابعی وابسته به مکان است که توانایی تشخیص پیکسل‌های لبه‌ی اجسام از نقاط داخلی و بیرونی آن جسم را دارد و ضمن کاهش نویز تصویر از اطلاعات مهم آن نیز محافظت می‌کند. با وجود بهبود چشمگیر این روش نسبت به روش قبل، تصویر پردازش شده دارای نقاط بلوکی بود.

پس از آن محققین بسیاری سعی در بهبود این معادله داشتند. از جمله تلاش‌های انجام شده می‌توان به معرفی ضرایب انتشار گوناگون، معرفی معادلات متفاوت و بالا بردن مرتبه‌ی معادله اشاره کرد.

در سال‌های اخیر با الهام از روش‌های آموزش-محور در یادگیری ماشینی، سعی بر معرفی یک معادله‌ی دیفرانسیل با مشتقات جزئی یادگیر داریم تا بسیاری از نیازهای دید کامپیوتری و پردازش تصویر را برطرف سازد [۴]. در این مقاله به عنوان یک کار مقدماتی، یک  $PDE$  یادگیر<sup>۱</sup> ( $LPDE$ ) را برای پردازش و نویززدایی تصویر معرفی می‌کنیم.

<sup>1</sup> Learning PDE

\* ارائه‌دهنده

## ۲. معرفی مدل PDE

در این بخش ساختار  $LPDE$  مورد نظر را معرفی می‌کنیم که در آن  $f$  به عنوان تصویر ورودی و  $u$  به عنوان تصویر خروجی مطلوب است. معادله ديفرانسیل با مشتقات جزئی مورد نظر را به شکل زیر تعريف می‌کنیم:

$$(۳) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = L(u, a); (x, y, t) \in Q \\ u = \circ; (x, y, t) \in \Gamma \\ u|_{t=\circ} = f; (x, y) \in \Omega \end{cases}$$

که در آن  $inv(u) = [ inv_{\circ}(u) \quad \dots \quad inv_{\Delta}(u) ]^T$  که  $F(u, a) = a(t)^T inv(u)$  و  $L(u, a) = (u_{xx} + u_{yy}) + F(u, a)$  و

$inv_i$	$i$
$f$	$\circ$
$u$	$۱$
$u_x + u_y$	$۲$
$u_{xx} + u_{yy}$	$۳$
$u_{xx} + ۲u_{xy} + u_{yy}$	$۴$
$u_x u_{xx} + u_x u_{xy} u_{xy} + u_y u_{yy}$	$۵$

در این معادله  $a(t) = [ a_{\circ}(t) \quad \dots \quad a_{\Delta}(t) ]^T$ ، ضریب  $PDE$  بوده که تغییرات  $u$  را در طی زمان کنترل می‌کند. مقدار  $a$  در مسائل گوناگون متفاوت خواهد بود و با توجه به مجموعه تصاویر آزمون بدست خواهد آمد. به این منظور یک مساله‌ی کنترل بهينه بر پایه‌ی معادلات ديفرانسیل با مشتقات جزئی معرفی خواهیم کرد تا مقدار  $a$  را بدست آوریم.

## ۳. ضرایب با استفاده از کنترل بهينه

با توجه به شکل کلی معادله‌ی (۳)، برای بدست آوردن یک  $PDE$  قابل حل، باید ضرایب  $a(t)$  در معادله بدست آید. جفت تصاویر آزمون  $(f_k, \tilde{u}_k)$  که در آن  $f_k$  تصویر ورودی و  $\tilde{u}_k$  تصویر خروجی مد نظر است را آماده می‌کنیم. با توجه به اینکه تصویر خروجی از  $PDE$  باید به یک مقدار خاص نزدیک باشد، تابع ضرایب باید تابعی زیر را مینیمم کند [۳]:

$$(۴) \quad J(\{u_k\}_{k=1}^K, a) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \int_{\Omega} (u_k(T_f) - \tilde{u}_k)^2 d\Omega + \frac{1}{K} \sum_{i=\circ}^5 \alpha_i \int_{\circ}^{T_f} a_i^2(t) dt$$

که  $u_k(T_f)$  تصویر خروجی در لحظه‌ی  $t = T_f$  است و  $\alpha_i$  مقدار ثابتی است که در اینجا برابر با  $۱۰^{-۷}$  در نظر گرفته شده است.

۱.۳. حل مساله. برای حل مساله‌ی کنترل بهينه‌ی (۴) از روش گرادینان مزدوج [۸، ۱] استفاده شده است که با بدست آوردن مقدار اولیه برای  $a(t)$  مساله‌ی کنترل بهينه را مینیمم سازی می‌کنیم. خروجی معادله‌ی (۴) تابع ضریب  $a(t)$  است که با جایگذاری در (۳) یک  $PDE$  بدست می‌آید و با در نظر گرفتن تصویر تست نويزدار به عنوان مقدار اولیه‌ی آن، تصویر را نويززدایی می‌کنیم.

## ۴. نتایج عددی

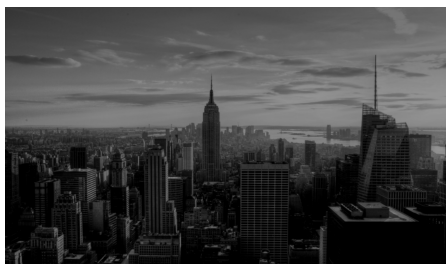
در این بخش کاربرد  $LPDE$  معرفی شده را روی تصاویر گوناگون مشاهده می‌کنیم. از دو گروه تصویر متشکل از شش جفت تصویر نويزدار و واضح برای آموزش  $LPDE$  استفاده کردیم و از نتیجه‌های بدست آمده برای نويززدایی دو تصویر با نويز سفید گاوسی استفاده کردیم. نتایج این دو نويززدایی در مقایسه با روش‌های دیگر از جمله روش مرتبه دو  $PM$  و روش  $YK$  که در [۲] معرفی شده است و  $LPDE$  معرفی شده در [۴] در تصاویر این بخش نشان داده شده. برای مقایسه‌ی کمی بهبود عملکرد روش معرفی شده، مقادیر  $PSNR$  این روش‌ها نیز در جدول (۱) قابل مشاهده است.



(ب)



(آ)



(د)



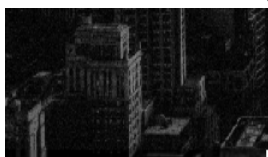
(ج)



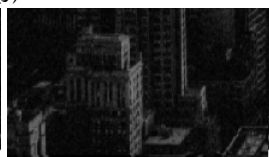
(و)



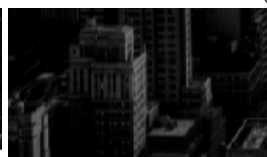
(ه)



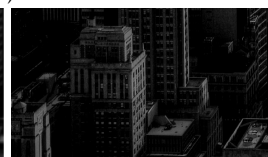
(ی)



(ط)



(ح)

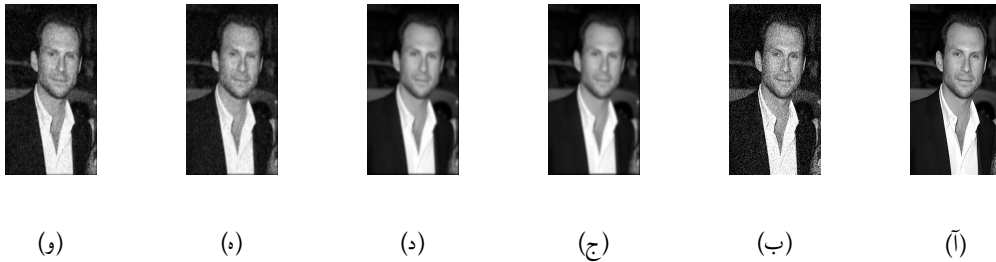


(ز)

شکل ۱. نتایج نویزدایی تصاویر با نویز سفید گاوسی. (آ) تصاویر واضح بدون نویز، (ب) تصویر نویزدار، (ج-ه) تصویر پردازش شده به ترتیب با روش PM، روش مرتبه ۴ YK و PDE معرفی شده در [۴] و (و) تصویر پردازش شده با استفاده از روش معرفی شده در این مقاله. در شکل‌های (ز) تا (ی) نیز قسمتی از تصویر را مشاهده می‌کنید که برای مقایسه‌ی بهتر از نزدیک برش داده شده است. به ترتیب تصویر واضح، تصویر پردازش شده با روش YK، روش LPDE و LPDE معرفی شده در این مقاله.

## ۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله روشی برای ساخت  $PDE$  های آموزشی با استفاده از تصاویر آزمایشی معرفی کردیم که در مقایسه با روش‌های سنتی طراحی PDE برای نویزدایی تصویر، انعطاف بیشتری داشته و با توجه به تصویر مورد نظر ضرایب را تعیین می‌کند. همچنین نسبت به



شکل ۲. (A) تصاویر واضح بدون نویز، (ب) تصویر نویزدار، (ج-ه) تصویر پردازش شده به ترتیب با روش PM، روش مرتبه ۴ YK و PDE معرفی شده در [۴] و (و) تصویر پردازش شده با استفاده از روش معرفی شده در این مقاله. در

جدول ۱. نتایج  $PSNR$  تصاویر تست با نویز سفید گاوسی

Image	روش PM	روش YK	روش LPDE	روش LPDE معرفی شده
Man	۹۰۷۴.۱۹	۴۵۲۰.۲۰	۱۵۷۶.۲۱	۳۶۳.۲۲
Cityview	۳۸۴۲.۲۰	۹۱۴۶.۲۰	۳۸۹۸.۲۱	۷۵۱.۲۲

LPDE معرفی شده در [۴] نیز سرعت و دقت بالاتری دارد. نتایج بدست آمده از مقایسه‌ی تصاویر پردازش شده و محاسبه‌ی PSNR تصاویر نشان دهنده‌ی عملکرد بهتر این روش نسبت به روش‌های گذشته است.

### مراجع

1. Shewchuk J.R (1994), An Introduction to the Conjugate Gradient Method Without the Agonizing Pain.
2. You Y, Kaveh M (2000), Fourth order partial differential equations for noise removal, *IEEE Trans Image Process*, **9**(10): 1723–1730.
3. Kirk D. (1970), Optimal Control Theory, Dover Publication, New York.
4. Lui R. , Lin Z. , Zhang W., Su Z., (2010), Learning PDEs for Image Restoration via Optimal Control, *Springer-Verlag* , **1** 115-128.
5. Own C, Tsai H, Yu P et al (2006), Adaptive type-2fuzzy median filter design for removal of impulse noise. *Image Sci* **54**(1): 3–18.
6. Perona P. and J. Malik J.(1990), Scale-Space and Edge Detection Using Anisotropic Diffusion, *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intellig*, **12**, 629-639.
7. Rudin LI, Osher S, Fatemi E (1992), Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Phys D*, **60**: 259–268.
8. Stoer J., Bulirsch R. (1998), Introduction to Numerical Analysis, 2nd edn, Springer.

پست الکترونیکی: [Neginkhoiniha@modares.ac.ir](mailto:Neginkhoiniha@modares.ac.ir)

پست الکترونیکی: [R.davoudi@modares.ac.ir](mailto:R.davoudi@modares.ac.ir)

پست الکترونیکی: [Hossei\\_m@modares.ac.ir](mailto:Hossei_m@modares.ac.ir)

## تخصیص منصفانه‌ی هزینه‌ی ثابت با استفاده از تحلیل پوششی داده‌ها

مصطفی داوطلب علیانی  
دانشکده ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران  
و فریده داوطلب علیانی\*  
دانشکده ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

چکیده. تحلیل پوششی داده‌ها به عنوان ابزاری مناسب برای ارزیابی عملکرد واحدهای مختلف با چند ورودی و چند خروجی است. یکی از کاربردهای تحلیل پوششی داده‌ها، تخصیص هزینه‌های ثابت میان واحدهای تصمیم‌گیرنده است. هزینه‌ی ثابت عبارت است از هزینه‌ای که برای ایجاد زیرساخت‌های مشترک، یک سازمان استفاده می‌شود. در این مقاله با معرفی جدول هزینه‌ی متقاطع، منصفانه‌ترین مقدار هزینه‌ی تخصیصی برای هر واحد را بدست می‌آوریم. واژه‌های کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، تخصیص هزینه‌های ثابت، هزینه متقاطع. طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 90Bxx, 90B50, 90C05.

## ۱. پیش‌گفتار

تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) یک روش غیر پارامتری برای اندازه‌گیری کارایی نسبی گروهی از واحدهای تصمیم‌گیرنده‌ی همگن است. DEA کاربردهای فراوانی در زمینه‌های مختلف دارد که یکی از آن‌ها تخصیص هزینه‌های ثابت میان واحدها است. این روش در بانک‌ها و سایر سیستم‌های اداری برای زمانی که قسمتی و یا تمام هزینه‌ی یک پروژه از بودجه‌ی موجود تامین نشود کاربرد دارد. کوک و کرس [۲] برای اولین بار تخصیص هزینه‌های ثابت را بر اساس دو اصل تغییرناپذیری کارایی و پاراتومینیمالیتی مطرح کردند. کوک و ژو [۳] رویکرد کوک و کرس را به منظور تخصیص هزینه‌های ثابت، به مدل BCC گسترش دادند. لین [۵] نشان داد روش کوک و ژو با اضافه کردن یکسری محدودیت‌ها نشدنی می‌شود، سپس او برای حل این مشکل مدل جدیدی ارائه داد. جهانشاهلو و همکاران [۴] اصل کمینه پارتو را نقض کردند و روش خود را با استفاده از فرمول ساده‌ای پیشنهاد کردند، اما این رویکرد در برنامه‌های کاربردی واقعی، امکان‌پذیر نیست. بیسلی [۱] با حداکثر کردن میانگین کارایی پس از تخصیص در یک مجموعه‌ی وزن‌های مشترک و با حل یک سری مدل‌های غیر خطی، یک طرح تخصیص منحصر به فرد را به دست آورد. از آنجایی که ممکن است تخصیص هزینه‌ی واحدها، با استفاده از روش‌های بالا منصفانه نباشد، در این مقاله با معرفی جدول هزینه‌ی ثابت متقاطع، روشی جدید برای تخصیص منصفانه‌تر هزینه‌ی ثابت، میان واحدهای تصمیم‌گیری ارائه می‌دهیم.

## ۲. مروری بر مقدمات

فرض کنیم واحدهای تصمیم‌گیرنده  $DMU_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) را داریم و هر DMU از  $m$  ورودی  $x_{ij}$  ( $i = 1, \dots, m$ ) برای تولید  $s$  خروجی،  $y_{rj}$  ( $r = 1, \dots, s$ ) استفاده می‌کند. کارایی نسبی  $DMU_{j_0}$  در ماهیت خروجی، از مدل زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \max \varphi_{j_0} \\ & \text{s.t.} \\ & \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j \leq x_{ij_0}; \quad (i = 1, \dots, m) \\ & \sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j \leq \varphi_{j_0} y_{rj_0}; \quad (r = 1, \dots, s) \\ & \lambda_j \geq 0. \end{aligned}$$

که  $\varphi_{j_0}$  و  $\lambda_j \geq 0$  متغیرهای دوگان هستند. از مدل (۱) می‌توان مقادیر  $\varphi_{j_0}^*$  و مجموعه‌ی مقادیر بهینه‌ی  $\lambda^*$  را بدست آورد. حال اگر  $\varphi_{j_0}^* = 1$  آنگاه  $DMU_{j_0}$  کارا است و اگر  $\varphi_{j_0}^* > 1$  باشد،  $DMU_{j_0}$  ناکارا است. با در نظر گرفتن مجموعه‌ی  $DMU$  های کارا ( $F$ ) و مجموعه‌ی  $DMU$  های ناکارا ( $N$ ) به ازای هر  $t \in N, j \in F$  به عنوان یک مجموعه مقادیر بهینه انتخاب می‌شود.

\* ارائه‌دهنده



کوک و کرس [۲] در مقاله‌ی خود شرط پایایی را به صورت  $r_t \geq \sum_{j \in F} \lambda_j^* r_j (t \in N)$  تعریف کرده‌اند. این شرط کافی نیست و نیاز به شرط پاراتو مینیمالیتی داریم. کوک و کرس این شرط را به صورت

$$r_t = \sum_{j \in F} \lambda_j^* r_j (t \in N) \quad [5]$$

با افزودن متغیر کمکی تساوی را برقرار کرد به طوری که:

$$\sum_{j \in F} \lambda_j^* r_j + s_t = r_t (t \in N) (*)$$

که این متغیر کمکی از فرمول زیر قابل محاسبه است:

$$\begin{aligned} \min \quad & s_t = \sum_{t \in N} s_t \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j \in F} \lambda_j^* r_j + s_t = r_t, (t \in N) \\ & \sum_{j=1}^n r_j = R \\ & r_j \geq 0, \forall j \\ & s_t \geq 0, \forall t \end{aligned}$$

توجه داریم که در پایان تخصیص باید جمع تمامی هزینه‌های تخصیص داده شده به هر  $DMU$  با کل هزینه‌ی تخصیص برابر باشد یعنی  $\sum_{j=1}^n r_j = R (**)$ . هر جوابی که در شرایط  $(*)$  و  $(**)$  صدق کند، تخصیصی به ما می‌دهد که ممکن است منحصر به فرد نباشد در نتیجه می‌توانیم تخصیص‌های متفاوتی خواهیم داشت. به همین دلیل روشی ارائه می‌دهیم که هم عادلانه باشد و هم هر واحد، واحدهای دیگر را در تخصیص خود در نظر بگیرد.

### ۳. مدل پیشنهادی

ابتدا مدل زیر را جهت بدست آوردن بیشترین حالت هزینه‌ی تخصیص یافته برای واحد  $DMU_{j_o} (j_o \in 1, \dots, n)$ ، یعنی  $r_{j_o}$ ، ارائه می‌دهیم. در حقیقت مدل زیر بدبینانه ترین حالت هزینه‌ی تخصیصی را برای  $DMU_{j_o} (j_o \in 1, \dots, n)$  در نظر می‌گیرد.

$$\begin{aligned} (2) \quad & \max \quad r_{j_o} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j \in F} \lambda_j^* r_j + s_t = r_t, (t \in N) \\ & \sum_{j=1}^n r_j = R \\ & \sum_{t \in N} s_t = s_l^* \\ & r_j \geq 0, \forall j \\ & s_t \geq 0, \forall t \end{aligned}$$

فرض کنیم  $(r_{1j_o}, r_{2j_o}, \dots, r_{nj_o})$  جواب بهینه‌ی بدست آمده از مدل (۳) در ارزیابی  $DMU_{j_o} (j_o \in 1, \dots, n)$  باشد. در این بردار نشان‌دهنده بدبینانه ترین تخصیص هزینه برای  $DMU_{j_o} (j_o \in 1, \dots, n)$  است. چون مجموع هزینه‌ها برابر با  $R$  است، در این بردار تخصیص هزینه، برای واحدهای دیگر به صورت خوشبینانه عمل نموده‌ایم. برای برقراری انصاف، مدل (۳) را برای تمام واحدها حل می‌نماییم. جواب بهینه‌ی هر یک از مدل‌ها در ارزیابی  $DMU$  ها را به عنوان سطر جدول هزینه‌ی متقاطع در نظر می‌گیریم. جدول هزینه‌ی متقاطع را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

حال برای بدست آوردن تخصیص هزینه‌ی منصفانه برای هر واحد، به طوری که اثر همه‌ی واحدها در نظر گرفته شود، از میانگین هر ستون به صورت فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$R_j = \frac{1}{n} \sum_{L=1}^n r_{Lj}, \forall j$$

جدول ۱. جدول هزینه‌ی متقاطع

	DMU۱	...	DMUk	...	DMUn
DMU۱	$r_{11}$	...	$r_{k1}$	...	$r_{n1}$
...	...	...	...	...	...
DMUk	$r_{1k}$	...	$r_{kk}$	...	$r_{nk}$
...	...	...	...	...	...
DMUn	$r_{1n}$	...	$r_{kn}$	...	$r_{nn}$

قضیه ۱۰۳. اگر  $(R_1, \dots, R_n)$  بردار هزینه‌های ثابت بدست آمده از طریق روش پیشنهادی برای واحدها باشند، آنگاه داریم:

$$\sum_{j=1}^n R_j = R$$

۴. مثال عددی

در این قسمت با حل یک مثال عددی، به تشریح روش پیشنهادی می‌پردازیم. ۱۲ واحد با سه ورودی و دو خروجی که اطلاعات آن‌ها در جدول (۲) ذکر شده است، را در نظر می‌گیریم.

جدول ۲. داده‌های عددی

DMU	Input۱	Input۲	Input۳	Output۱	Output۲
۱	۳۵۰	۳۹	۹	۶۷	۷۵۱
۲	۲۹۸	۲۶	۸	۷۳	۶۱۱
۳	۴۲۲	۳۱	۷	۷۵	۵۸۴
۴	۲۸۱	۱۶	۹	۷۰	۶۶۵
۵	۳۰۱	۱۶	۶	۷۵	۴۴۵
۶	۳۶۰	۲۹	۱۷	۸۳	۱۰۷۰
۷	۵۴	۱۸	۱۰	۷۲	۴۵۷
۸	۲۷۶	۳۳	۵	۷۸	۵۹۰
۹	۳۲۳	۲۵	۵	۷۵	۱۰۷۴
۱۰	۴۴۴	۶۴	۶	۷۴	۱۰۷۲
۱۱	۳۲۳	۲۵	۵	۲۵	۳۵۰
۱۲	۴۴۴	۶۴	۶	۱۰۴	۱۱۹۹

پس از محاسبه‌ی مقادیر، جدول هزینه‌ی متقاطع را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم.

جدول ۳. جدول هزینه متقاطع

	DMU۱	DMU۲	DMU۳	DMU۴	DMU۵	DMU۶	DMU۷	DMU۸	DMU۹	DMU۱۰	DMU۱۱	DMU۱۲
DMU۱	۲۳/۱۱	۲۳/۲۲	۲/۵	۰	۰	۶/۹۵	۰	۴/۲۲	۰	۰	۰	۰
DMU۲	۰	۲۸/۶	۰	۵۶/۷۱	۰	۶/۸۲	۷/۸۷	۰	۰	۰	۰	۰
DMU۳	۱/۱/۲۲	۰	۱۶/۹۵	۰	۰	۱۵/۴۳	۰	۰	۱۷/۶۲	۲۱/۱۵	۱۷/۶۲	۰
DMU۴	۰	۲۸/۶	۰	۵۶/۷۱	۰	۶/۸۲	۷/۸۷	۰	۰	۰	۰	۰
DMU۵	۰	۱/۶۱	۱۳/۵۸	۰	۴۲/۷	۰	۴۲/۱۱	۰	۰	۰	۰	۰
DMU۶	۱/۱/۲۲	۰	۱۶/۹۵	۰	۰	۱۵/۴۳	۰	۰	۱۷/۶۲	۲۱/۱۵	۱۷/۶۲	۰
DMU۷	۰	۱/۶۱	۱۳/۵۸	۰	۴۲/۷	۰	۴۲/۱۱	۰	۰	۰	۰	۰
DMU۸	۲۳/۱۱	۲۳/۲۲	۲/۵	۰	۰	۶/۹۵	۰	۴/۲۲	۰	۰	۰	۰
DMU۹	۱/۱/۲۲	۰	۱۶/۹۵	۰	۰	۱۵/۴۳	۰	۰	۱۷/۶۲	۲۱/۱۵	۱۷/۶۲	۰
DMU۱۰	۱/۱/۲۲	۰	۱۶/۹۵	۰	۰	۱۵/۴۳	۰	۰	۱۷/۶۲	۲۱/۱۵	۱۷/۶۲	۰
DMU۱۱	۱/۱/۲۲	۰	۱۶/۹۵	۰	۰	۱۵/۴۳	۰	۰	۱۷/۶۲	۲۱/۱۵	۱۷/۶۲	۰
DMU۱۲	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱۰۰	۰
[۲] تخصیص هزینه کوک و ژو	۱/۱/۲	۰	۱۶/۹۵	۰	۰	۱۵/۴۳	۰	۱۷/۶۲	۲۱/۱۵	۱۷/۶۲	۰	۰
[۵] تخصیص هزینه لین	۵/۶۹	۹/۲۴	۵/۴۷	۱۰/۱۶	۷/۰۸	۴/۹۳	۸/۳۹	۷/۳۳	۲/۹۲	۳/۵۰	۲/۸۲	۳۲/۳۲
تخصیص هزینه پیشنهادی	۸/۵۲	۸/۹۰	۹/۷۴	۹/۴۵	۷/۱۱	۸/۷۲	۸/۳۳	۷/۳۷	۷/۳۴	۸/۸۱	۷/۳۴	۸/۳۳

سه سطر آخر جدول به ترتیب، تخصیص هزینه‌ی هر واحد در روش کوک و ژو [۲]، تخصیص هزینه‌ی هر واحد در روش لین [۵] و تخصیص هزینه‌ی هر واحد در روش پیشنهادی را نشان می‌دهند. با مقایسه‌ی این سه سطر، می‌توان دریافت که نتایج بدست آمده از روش پیشنهادی نسبت به دو روش ذکر شده عادلانه‌تر است.

### مراجع

1. J.E. Beasley, *Allocating fixed costs and resources via data envelopment analysis*, European Journal of Operational Research., 147 (2003), 198-216.
2. W.D. Cook, and M. Kress, *Characterizing an equitable allocation of shared costs: A DEA approach*, European Journal of Operational Research., 119 (1999), 652-661.
3. W.D. Cook, and J. Zhu, *Allocation of shared costs among decision making units: a DEA approach*, Computers and Operations Research, 32(2005), 2171-2178.
4. G.R. Jahanshahloo, F.H. Lotfi, N. Shoja and M. Saei *An alternative approach for equitable allocation of shared costs by using DEA*, Applied Mathematics and computation., 153 (2004), 267-274.
5. R. Lin, *Allocating fixed costs or resources and setting targets via data envelopment analysis*, Applied Mathematics and Computation., 217 (2011), 6349-6358.

پست الکترونیکی: [m.davtalab-olyaie@kashanu.ac.ir](mailto:m.davtalab-olyaie@kashanu.ac.ir)

پست الکترونیکی: [farideh.alfa@yahoo.com](mailto:farideh.alfa@yahoo.com)

## یک فرمول دو سطحی برای تخصیص منابع متمرکز بدون تغییر مرز کارا

مصطفی داوطلب علیانی  
دانشکده ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران  
و حدیث محمودی برام\*  
دانشکده ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

چکیده. مدیریت منابع به خصوص تخصیص مناسب منابع یکی از نکات قابل توجه سازمان‌ها است. تحلیل پوششی داده‌ها مدل‌هایی را برای تخصیص منابع در سازمان‌هایی با مدیریت مرکزی ارائه می‌نماید. مدل پیشنهادی در این مقاله، مدل دوسطحی است که در مدل سطح پایین کارایی تک تک واحدها بررسی می‌شود، در حالی‌که با مشخص بودن هزینه ورودی‌ها و قیمت خروجی‌ها در مدل سطح بالا اثربخشی سازمان به بالاترین مقدار خود می‌رسد، علاوه بر این پایداری در مرز کارا نیز حفظ می‌شود. این مدل‌ها با مثال عددی نیز بیان و بررسی شده‌اند. **واژه‌های کلیدی:** تخصیص منابع متمرکز، مدل دوسطحی، تحلیل پوششی داده‌ها. **طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]:** 90Bxx, 90B50, 90C05.

### ۱. پیش‌گفتار

تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) یک روش غیر پارامتری برای ارزیابی واحدهای تصمیم‌گیری (DMU) متجانس است. یکی از مهم‌ترین کاربردهای تحلیل پوششی داده‌ها تخصیص عادلانه منابع جهت رسیدن به اهداف خاص سازمان‌ها است. در مسائل حقیقی DEA با حالتی مواجه می‌شویم که همه‌ی واحدهای تصمیم‌گیری تحت کنترل یک واحد مرکزی (DM) هستند. در این نوع مسائل مدیریت مرکزی با مصرف منابع موجود اهدافی را دنبال می‌کند. تخصیص منابع در چنین سازمان‌هایی تخصیص منابع متمرکز نامیده می‌شود. در مدل‌های رایج DEA هر بار که مدل حل می‌شود تنها یک واحد مورد بررسی قرار می‌گیرد، در حالیکه در مدل‌های متمرکز با یک بار حل مدل همه‌ی واحدها تحت ارزیابی قرار می‌گیرند. اولین مدل تخصیص منابع متمرکز توسط لوزانو و ویلا [۵] ارائه شد. آنها برای محاسبه کارایی کل سیستم دو مدل برنامه ریزی خطی شعاعی و غیرشعاعی تحت فرض بازده به مقیاس متغیر پیشنهاد دادند. می‌توان گفت این مدل‌ها مبنای کلی مطالعات بعدی قرار گرفت. پس از آنها آزمونیلد، پارادی و پاستور [۱] مدل لوزانو را تنها برای تعدیل واحدهای ناکارا اصلاح کردند و ثابت نمودند مدل پیشنهادی آنها همان مدل BCC در ارزیابی میانگین واحدهای کارا است. مارمولینزو، پریور، سگویا و پورتیلو [۶] مدل پیشنهادی لوزانو را به گونه‌ای اصلاح کردند که مدل متمرکز در بسیاری از موارد ساده‌تر اجرا شود و هم‌چنین کاراترین واحد را شناسایی کند. در مطالعات فوق هدف مدل‌های پیشنهادی افزایش کارایی کل سازمان است. علاوه بر این اکثر مدل‌ها کارایی DMU ها را در نظر نمی‌گیرند و واحد مرکزی فقط به دنبال کاهش کل ورودی‌ها و افزایش کل خروجی‌ها است. چنین مکانیزمی قدرت تصمیم‌گیری واحدها را نادیده می‌گیرد و می‌تواند منجر به عدم موافقت واحدها با تنظیمات اهداف سازمان شود. برای جبران این کمبود، دو، کوک، لیانگ و ژو [۲] یک مدل مبتنی بر DEA را برای تخصیص برخی از هزینه‌های ثابت و منابع پیشنهاد دادند که باعث بهبود کارایی می‌شود. با این حال نتایج نشان داد که مدل ارائه شده باعث کاهش اثربخشی برخی از DMU ها شده است. حکیم، سیفی و قائمی [۴] یک مدل تخصیص منابع در سازمان‌های متمرکز با هدف بهینه سازی اثربخشی کلی سازمان ارائه دادند که اجازه می‌دهد هر DMU بهترین عملکرد خود را تخمین بزند. در این پژوهش یک مدل دوسطحی ارائه می‌شود که در آن با حفظ پایداری مرز کارا و توجه به کارایی هر واحد، منابع ورودی و اهداف خروجی به گونه‌ای تعیین می‌شوند که اثربخشی سازمان به حداکثر مقدار خود برسد. در ادامه پس از مروری بر مدل حکیم و همکاران [۴]، روش پیشنهادی مطرح می‌شود. سپس مثال عددی و نتایج بدست آمده بیان و تحلیل می‌شوند.

### ۲. مروری بر مدل دوسطحی تخصیص منابع

در این بخش مدل دوسطحی مبتنی DEA برای تخصیص منابع متمرکز تحت محدودیت کارایی هر واحد بیان می‌شود که توسط حکیم و همکاران [۴] ارائه شده است. این مدل دوسطحی شامل یک مدل سطح بالا مربوط به تعیین منابع ورودی و اهداف خروجی و یک مدل سطح پایین جهت ارزیابی کارایی واحدها است. مدل سطح پایین برای بدست آوردن کارایی هر واحد به طور جداگانه حل می‌شود.

\* ارائه‌دهنده

مدل سطح پایین به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & e_k^* = \max \frac{\sum_{r=1}^s u_{rk} y_{rk} - t_k}{\sum_{i=1}^m v_{ik} x_{ik}} \\
 \text{s.t.} \quad & \\
 (2) \quad & 0 \leq e_{kj} = \frac{\sum_{r=1}^s u_{rk} y_{rj} - t_k}{\sum_{i=1}^m v_{ik} x_{ij}} \leq 1; (j = 1, \dots, n) \\
 (3) \quad & u_{rk} > 0; (r = 1, \dots, s) \\
 (4) \quad & v_{ik} > 0; (i = 1, \dots, m)
 \end{aligned}$$

تابع هدف (۱) به دنبال ماکزیم کردن کارایی هر واحد است. قید (۲) کارایی  $DMU_j$  محاسبه شده توسط وزنهای انتخابی  $t_k$  را بین صفر و یک محدود می‌کند. قیود (۳-۴) نامنفی بودن وزنهای انتخابی را تضمین می‌کند. علاوه بر این متغیر آزاد  $t_k$  منعکس کننده فرض بازده به مقیاس ثابت VRS در مجموعه امکان تولید است. مدل سطح پایین با تبدیلات خطی چارلز و کوپر [۲] به مدل خطی تبدیل می‌شود که به سادگی قابل حل خواهد بود. با توجه به کارایی محاسبه شده مدل سطح پایین، در مدل سطح بالا اهداف خروجی  $y_{rk}$  با قیمت مشخص و منابع ورودی  $x_{ik}$  با هزینه مشخص به عنوان متغیرهای تصمیم به گونه‌ای تعیین می‌شوند که اثربخشی سازمان حداکثر مقدار خود را کسب کند. مدل سطح بالا به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
 (5) \quad & Z = \max \sum_{r=1}^s p_r \sum_{k=1}^n y_{rk} - \sum_{i=1}^m q_i \sum_{k=1}^n x_{ik} \\
 \text{s.t.} \quad & \\
 (6) \quad & Le_k \leq e_{k^*}(x_{1k}, \dots, x_{mk}; y_{1k}, \dots, y_{sk}); (k = 1, \dots, n) \\
 (7) \quad & x_{ik} \geq \sum_{j=1}^n \lambda_{jk} x_{ij}; (i = 1, \dots, m; k = 1, \dots, n) \\
 (8) \quad & y_{rk} \leq \sum_{j=1}^n \lambda_{jk} y_{rj}; (r = 1, \dots, s; k = 1, \dots, n) \\
 (9) \quad & \sum_{j=1}^n \lambda_{jk} = 1; (k = 1, \dots, n) \\
 (10) \quad & \lambda_{jk} \geq 0; (j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, n) \\
 (11) \quad & \sum_{k=1}^n x_{ik} \leq b_i; (i = 1, \dots, m) \\
 (12) \quad & Lx_{ik} \leq x_{ik} \leq Ux_{ik}; (i = 1, \dots, m; k = 1, \dots, n) \\
 (13) \quad & Ly_{rk} \leq y_{rk} \leq Uy_{rk}; (r = 1, \dots, s; k = 1, \dots, n)
 \end{aligned}$$

در تابع هدف (۵)، اثربخشی سازمان با ماکزیم کردن کلی خروجی‌ها منهای کل ورودی‌ها طبق هزینه هر ورودی  $q_i$  و قیمت هر خروجی  $p_r$  تعیین شده توسط مدیریت مرکزی، بدست می‌آید. محدودیت (۶) اطمینان حاصل می‌کند که کارایی هر  $DMU_k$  از کران پایینی  $Le_k$ ، مشخص شده توسط مدیریت مرکزی، بزرگتر است. محدودیت‌های (۷-۱۰) اطمینان حاصل می‌کند که برنامه تولید جدید هر واحد باید متعلق به مجموعه امکان تولید بدست آمده از ترکیب ورودی‌ها ( $x_{ij}$ ) و خروجی‌های ( $y_{rj}$ ) مشاهده شده همه‌ی واحدها باشد. قید (۱۱) محدودیت منابع ورودی موجود را نشان می‌دهد. قید (۱۲) تخصیص منابع ورودی و قید (۱۳) اهداف خروجی را بین کران‌های بالا و پایین آنها که توسط تصمیم گیرنده مرکزی مشخص می‌شوند، محدود می‌کند.

مزیت متمایز مدل دوسطی فوق توجه به معیارهای کارایی هر واحد و اثربخشی سازمان در فرآیند تخصیص منابع است. در ارتباط با مدل فوق چند مسئله وجود دارد که در زیر به آنها اشاره می‌کنیم.

(۱) در مدل فوق توجهی به حفظ پایداری مرکز کارا نمی‌شود. چون در این مدل‌ها هیچ قیدی روی ورودی‌ها و خروجی‌های واحد کارا وجود ندارد و امکان تغییر هر واحد کارا پس از فرآیند تخصیص وجود دارد یعنی ممکن است تصویر یک واحد کارا نقطه‌ی دیگری روی مرز شود که از افزایش ورودی و کاهش خروجی واحد کارا بدست آمده است.

(۲) با توجه به نکته بیان شده غیر قابل قبول است که یک واحد کارایی تکنیکی باشد اما در عین حال نیاز به تغییر داشته باشد، (در برخی موارد به طور قابل ملاحظه‌ای) تا عملکرد آن به نفع سازمان باشد. بنابراین یک مدل جایگزین برای مدل‌های ارائه شده پیشنهاد می‌کنیم که اگرچه ارتباط نزدیکی با هم دارند اما از مشکلات مذکور جلوگیری می‌کند.

### ۳. مدل پیشنهادی

در این بخش ما یک مدل دو سطحی تخصیص مجدد منابع و تنظیم اهداف خروجی را در سازمان‌های متمرکز برای تعدیل واحدهای ناکارا جهت حل مشکلات مذکور، ارائه می‌دهیم. مدل سطح پایین را برای تفکیک واحدها از طریق حل مدل مضربی BCC به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
 (۱۴) \quad & e_k^* = \max \sum_{r=1}^s u_{rk} y_{rk} - t_k \\
 & \text{s.t.} \\
 & \sum_{i=1}^m v_{ik} x_{ik} = 1 \\
 & \sum_{r=1}^s u_{rk} y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_{ik} x_{ij} - t_k \leq 0; \quad (j = 1, \dots, n) \\
 & u_{rk} \geq 0; \quad (r = 1, \dots, s) \\
 & v_{ik} \geq 0; \quad (i = 1, \dots, m) \\
 & t_k \text{ free in sign}
 \end{aligned}$$

تابع هدف مدل سطح پایین مقدار کارایی هر واحد را به طور جداگانه تعیین می‌کند. پس از حل مدل سطح پایین می‌توان واحدها را بر اساس مقدار کارایی آنها در دو دسته واحدهای کارا و ناکارا جای داد به این صورت که:

$$\begin{aligned}
 E &= \{k \mid e_k^* = 1\}; \\
 I &= \{k \mid e_k^* < 1\};
 \end{aligned}$$

پس از تقسیم واحدها به زیر مجموعه E شامل اندیس واحدهای کارا و مجموعه I شامل اندیس واحدهای ناکارا، مدل سطح پایین را برای تعدیل واحدهای ناکارا به صورت زیر پیشنهاد می‌کنیم. در مدل پیشنهادی اعضای زیر مجموعه E شامل نقاط کارا به عنوان نقاط هم‌تا استفاده می‌شوند و اعضای زیر مجموعه I در فرآیند بهینه سازی اثربخشی کلی سازمان در نظر گرفته می‌شوند. چون واحدهای کارا بی تغییر می‌مانند، پس مقدار ثابتی به اثربخشی سازمان در حضور تنها واحدهای ناکارا اضافه می‌شود که بر تابع هدف مدل LP بی تاثیر خواهد بود.

$$\begin{aligned}
 (۱۵) \quad & W = \max \sum_{r=1}^s p_r \sum_{k \in I} y_{rk} - \sum_{i=1}^m q_i \sum_{k \in I} x_{ik} \\
 & \text{s.t.} \\
 (۱۶) \quad & Le_k \leq e_{k(x_{1k}, \dots, x_{mk}; y_{1k}, \dots, y_{sk})}^*; \quad (\forall k \in I) \\
 (۱۷) \quad & x_{ik} \geq \sum_{j \in E} \lambda_{jk} x_{ij}; \quad (i = 1, \dots, m; \forall k \in I) \\
 (۱۸) \quad & y_{rk} \leq \sum_{j \in E} \lambda_{jk} y_{rj}; \quad (r = 1, \dots, n; \forall k \in I) \\
 (۱۹) \quad & \sum_{j \in E} \lambda_{jk} = 1; \quad (\forall k \in I) \\
 (۲۰) \quad & \lambda_{jk} \geq 0; \quad (j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, n) \\
 (۲۱) \quad & \sum_{k \in I} x_{ik} \leq b_i; \quad (i = 1, \dots, n)
 \end{aligned}$$

مدل فوق شامل اثربخشی سازمان با تعدیل واحدهای ناکارا است. تابع هدف (۱۵) فقط شامل اثربخشی سازمان تحت تاثیر واحدهای ناکارا است. چون پس از تخصیص واحدهای کارا بدون تغییر باقی می‌ماند پس بر تابع هدف مدل سطح بالا بی تاثیر خواهند بود. قید (۱۶) تضمین می‌کند که میزان کارایی پس از تخصیص هر واحد ناکارا از کران پایین تعیین شده توسط مدیریت مرکزی کمتر نخواهد بود. دسته قیود (۲۰ - ۱۷) اطمینان حاصل می‌کند که برنامه تولید جدید واحدهای ناکارا باید متعلق به مجموعه امکان تولید بدست آمده از ترکیب ورودی‌ها ( $X_{ij}$ ) و خروجی‌های ( $Y_{rj}$ ) مشاهده شده واحدهای کارا باشد. قید (۲۱) نیز محدودیت موجود در منابع ورودی واحدهای ناکارا را پس از تخصیص نشان می‌دهد. بدیهی است که مقدار کلی اثربخشی بدست آمده از تابع هدف (۱۵) همیشه کمتر یا مساوی اثربخشی محاسبه شده از تابع هدف (۵) است. اما در مدل جدید در فرآیند تخصیص مرزهای کارا پایدار باقی می‌مانند. مثال ۱. داده‌های جدول ۱ مربوط به هفت واحد تصمیم‌گیری با یک ورودی و یک خروجی تحت کنترل یک واحد مرکزی می‌باشد. در این مثال فرض می‌کنیم مقدار کران پایین کارایی برای واحدهای ناکارا مقدار  $Le = 0.5$  باشد. هم چنین محدودیت منابع موجود ورودی برابر با  $b_1 = 38$  و هزینه ورودی برابر با  $q_1 = 0.1$  و قیمت خروجی  $p_1 = 1$  در نظر گرفته شده است. ستون چهارم مقدار کارایی هر واحد محاسبه شده در سطح پایین را نشان می‌دهد. واحدهای C, E, G واحدهای ناکارا هستند که تابع هدف مدل سطح بالا به دنبال تعیین ورودی و خروجی جدید برای آنها است تا اثربخشی سازمان حداکثر مقدار خود را اخذ کند. مقادیر وزن‌های نامنفی  $u, v$  موجود در ستون‌های ششم و هفتم جدول از مدل سطح پایین در ارزیابی هر واحد بدست آمده‌اند. ستون هشتم شامل مقادیر مربوط به فرض بازده به مقیاس متغیر است.

جدول ۱. مقادیر بدست آمده از مدل پیشنهادی

DMU	ورودی	خروجی	کارایی	Le	u	v	t	ورودی جدید	خروجی جدید
A	۳	۳	۱	۱	۰/۰۲	۳۳.۰	-۰/۹۱	۳	۳
B	۴	۸	۱	۱	۰/۰۵	۰/۲۵	-۰/۵۵	۴	۸
C	۵	۵	۰/۸۶	۰/۵	۰/۰۴	۰/۲	-۰/۴۸	۷	۱۱
D	۵	۱۰	۱	۱	۰/۱	۰/۲	۰/۰۱	۵	۱۰
E	۶	۸	۰/۶۶	۰/۵	۰/۰۶	۰/۱۶	-۰/۱	۷	۱۱
F	۷	۱۱	۱	۱	۰/۲۹	۰/۱۴	۲/۲۱	۷	۱۱
G	۸	۹	۰/۵۶	۰/۵۶	۰/۰۶	۰/۱۲	۰	۷	۱۱

ما مدل دو سطحی موجود در مقاله حکیم و همکاران [۴] را با مدل پیشنهادی مقایسه کردیم. مقدار تابع هدف مدل سطح بالا در مدل آنها برابر  $Z^* = 76.51$  و با مدل پیشنهادی ما مقدار تابع هدف برابر  $W^* = 32.79$  است. بدیهی است که مقدار تابع هدف مدل پیشنهادی برای تعدیل واحدهای ناکارا همیشه کمتر از تعدیل کل واحدها است. مقادیر جدید ورودی و خروجی تعیین شده برای هر واحد ناکارا در دو ستون آخر جدول مشاهده می‌شوند.

## مراجع

1. M.Asmild, J.C. Paradi and J.T. Pastor, *Centralized resource allocation BCC models*, Omega 37.1 (2009). 40-49.
2. A.Charnes and W. W.Cooper, *Programming with linear fractional functionals*, Naval Research logistics quarterly 9.3-4 (1962): 181-186.
3. J.Du, W.D.Cook, L. Liang, and J.Zhu, *Fixed cost and resource allocation based on DEA cross-efficiency*, European Journal of Operational Research 235.1 (2014). 206-214.
4. S.Hakim, A.Seifi and A.Ghaemi, *A bi-level formulation for DEA-based centralized resource allocation under efficiency constraints*, Computers and Industrial Engineering 93 (2016). 28-35.
5. S.Lozano and G.Villa, *Centralized resource allocation using data envelopment analysis*, Journal of Productivity Analysis 22.1-2 (2004). 143-161.
6. C.Mar-Molinero, D.Prior, M.Segovia and F.Portillo, *On centralized resource utilization and its reallocation by using DEA.*, Annals of Operations Research 221.1 (2014). 273-283.

پست الکترونیکی: [m.davtalab-olyaie@kashanu.ac.ir](mailto:m.davtalab-olyaie@kashanu.ac.ir)

پست الکترونیکی: [h.mahmoudi.b@gmail.com](mailto:h.mahmoudi.b@gmail.com)

## حل عددی معادلات دیفرانسیل کسری با استفاده از یک روش هم محلی

پ. درخش\*  
بخش ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه یاسوج، یاسوج، ایران  
و. ر. کتانی  
بخش ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه یاسوج، یاسوج، ایران

چکیده. در این مقاله روش هم محلی را برای حل عددی معادلات دیفرانسیل کسری پیشنهاد خواهیم نمود. برای این منظور معادله دیفرانسیل کسری را به معادله انتگرال ولترا تبدیل می‌کنیم. از آنجایی که این معادله انتگرال منفرد بطور ضعیف خواهد بود، جواب در نقاط ابتدایی دارای ناهموازی است که این ناهموازی بر سرعت همگرایی روش عددی تاثیر گذار خواهد بود. برای رفع این مشکل ابتدا از یک روش هموارسازی استفاده کرده و در ادامه با استفاده از روش هم محلی جواب عددی را بدست می‌آوریم. در نهایت مرتبه همگرایی و کارایی روش را با استفاده از مثال عددی می‌آزماییم.

واژه‌های کلیدی: معادلات دیفرانسیل کسری، مشتق کاپوتو، روش هم محلی.  
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 65R20, 65L05, 34A08.

### ۱. پیش‌گفتار

مساله مقدار اولیه

$$(1) \quad \begin{cases} D^\alpha y(t) = f(t, y(t)), & 0 \leq t \leq b, \\ y^i(0) = \gamma_i, & i = 0, 1, \dots, n-1, \end{cases}$$

را در نظر بگیرید که در آن  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n-1 < \alpha < n$ ,  $\gamma_i \in \mathbb{R}$  و  $f : [0, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  تابع پیوسته معلوم است. همچنین  $D^\alpha y$  مشتق کسری نوع کاپوتو

$$D^\alpha y(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{y^n(s)}{(t-s)^{\alpha+1-n}} ds,$$

است. معادلات دیفرانسیل کسری ابراز مناسبی برای مدل‌بندی پدیده‌های طبیعی با حافظه نظیر رفتار مواد ویسکوالاستیک در مکانیک هستند، به همین دلیل در دهه‌های اخیر پژوهشگران توجه زیادی به حل عددی این معادلات داشته‌اند. به عنوان مثال روش‌های انتگرالگیری حاصلضربی [۷]، روش‌های آدومیان [۴] و روش‌های طیفی [۸] را می‌توان نام برد. در اکثر موارد مساله مقدار اولیه (۱) به یک معادله انتگرال ولترا معادل تبدیل می‌شود و سپس روش عددی مورد نظر برای حل این معادله انتگرال بکار می‌رود. در صورتی که  $\alpha < 1$  باشد معادله انتگرال ولترا منفرد بطور ضعیف خواهد بود و بنابراین ممکن است جواب در نقاط ابتدایی دارای ناهموازی باشد [۲]. روش‌های زیادی برای معادلات منفرد بطور ضعیف با جواب هموار [۳] و معادلات منفرد بطور ضعیف با جواب ناهموار [۶] ارائه شده‌اند. در اینجا قصد داریم معادله انتگرال منفرد بطور ضعیف با جواب ناهموار را با استفاده از یک تکنیک هموارسازی که در [۱۱] برای معادلات فردهلم استفاده شده است، به معادله‌ای با جواب هموار تبدیل کنیم و سپس روش هم محلی را برای حل عددی معادله تغییر یافته استفاده کنیم.

### ۲. تبدیل معادله دیفرانسیل کسری به معادله انتگرال ولترا

در ابتدا وجود و یکتایی جواب مساله مقدار اولیه (۱) و تبدیل آن به یک معادله انتگرال ولترا را از منبع [۱۲] یادآوری می‌کنیم.

قضیه ۱۰۲. فرض کنید  $\alpha > 0$  و  $n = [\alpha]$ . علاوه بر این فرض کنید  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1} \in \mathbb{R}$  و  $k > 0$  و  $b^* > 0$  باشند و تعریف کنید  $G := \{(t, y) : t \in [0, b^*], |y - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{t^i \gamma_i}{i!}| \leq k\}$ . همچنین فرض کنید تابع  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  پیوسته باشد، و  $M := \sup_{(t,z) \in G} |f(t, z)|$

$$b := \begin{cases} b^*, & M = 0, \\ \min\{b^*, (\frac{k\Gamma(\alpha+1)}{M})^{\frac{1}{\alpha}}\}, & O.W, \end{cases}$$

\* ارائه‌دهنده



در این صورت  $y \in C[0, b]$  وجود دارد که مساله مقدار اولیه (۱) را حل می‌کند.

قضیه ۲.۲. در نظر بگیرید مفروضات قضیه قبل برقرار باشند و  $f$  نیز نسبت به متغیر دوم در شرط لیپ‌شیتز

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

که برای ثابت  $L > 0$  مستقل از  $t$ ،  $y_1$  و  $y_2$  صدق کند. در این صورت با توجه به  $b$  تعریف شده در قضیه (۱.۲)، تابع یکتای  $y \in C[0, b]$  وجود دارد که یک جواب مساله مقدار اولیه (۱) است.

لم ۳.۲. فرض کنید شرایط قضیه (۱.۲) برقرار باشند. تابع  $y \in C[0, h]$  یک جواب مساله مقدار اولیه (۱) است اگر و فقط اگر  $y$  یک جواب معادله انتگرال غیرخطی ولترا نوع دوم

$$(2) \quad y(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{t^i}{i!} \gamma_i + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds, \quad 0 \leq t \leq b,$$

برای  $n = [\alpha]$  باشد.

### ۳. هموارسازی جواب

مشابه [۱۱] به منظور هموارسازی جواب حالت خطی معادله انتگرال (۲) برای مواردی که  $\alpha < 1$  باشد، تغییر متغیر  $t \rightarrow s$  و  $\gamma(t) = t^p$  و  $\gamma(s) = s^p$  را بر معادله انتگرال خطی

$$y(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{t^i \gamma_i}{i!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} y(s) ds,$$

اعمال می‌کنیم در اینصورت داریم

$$y(\gamma(t)) = \sum_{i=0}^{[\alpha]-1} \frac{(\gamma(t))^i}{i!} \gamma_i + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (\gamma(t) - \gamma(s))^{\alpha-1} y(\gamma(s)) \gamma'(s) ds.$$

در ادامه طرفین رابطه را در  $\gamma'(t)$  ضرب کرده و تعریف می‌کنیم

$$u(t) := \gamma'(t) y(\gamma(t)), \quad q(t) = \gamma'(t) \sum_{i=0}^{[\alpha]-1} \frac{(\gamma(t))^i}{i!} \gamma_i.$$

به این ترتیب خواهیم داشت

$$(3) \quad u(t) = q(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (\gamma(t) - \gamma(s))^{\alpha-1} u(s) \gamma'(s) ds,$$

و در نهایت جواب معادله (۲) از رابطه

$$y(t) = \frac{u(\gamma^{-1}(t))}{\gamma'(\gamma^{-1}(t))},$$

بدست می‌آید. با تعریف

$$\delta_\alpha(t, s) = \begin{cases} \left| \frac{\gamma(t) - \gamma(s)}{t-s} \right|^{\alpha-1}, & t \neq s, \\ |\gamma'(t)|^{\alpha-1}, & t = s \end{cases}$$

معادله انتگرال (۳) بصورت

$$(4) \quad u(t) = q(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t K(t, s) u(s) ds,$$

نوشته می‌شود که در آن

$$K(t, s) = (t-s)^{\alpha-1} \delta_\alpha(t, s) \gamma'(t),$$

است.

#### ۴. روش هم‌محلی

نقاط هم‌محلی را بصورت  $t_i = ih$  برای  $i = 0, 1, \dots, n$  با طول گام  $h = \frac{b}{n}$  در نظر می‌گیریم. همچنین عملگر تصویر

$$p_n : C(D) \longrightarrow X_n, \\ p_n u = \sum_{j=0}^n u(t_j) l_j(t),$$

را در نظر می‌گیریم که در آن توابع  $l_j(t)$  کلاهی

$$l_0(t) = \begin{cases} \frac{t_1 - t}{h}, & t_0 \leq t \leq t_1, \\ 0, & O.W, \end{cases} \\ l_j(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t - t_j|}{h}, & t_{j-1} \leq t \leq t_{j+1}, \\ 0, & O.W, \end{cases} \\ l_n(t) = \begin{cases} \frac{t_n - t}{h}, & t_{n-1} \leq t \leq t_n, \\ 0, & O.W, \end{cases}$$

هستند. به این ترتیب با استفاده از عملگر تصویر  $p_n$ ، معادله انتگرال (۴) را می‌توان در نقاط هم‌محلی  $t_j$  بصورت

$$u_n(t_j) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=0}^n u_n(t_i) \int_0^{t_j} K(t_j, s) l_i(s) ds = q(t_j), \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

نوشت. با تعریف  $\alpha_{j,i} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_j} K(t_j, s) l_i(s) ds$  از رابطه بالا داریم

$$(5) \quad u_n(t_j) - \sum_{i=0}^n \alpha_{j,i} u_n(t_i) = q(t_j), \quad j = 0, 1, \dots, n$$

در نهایت با حل دستگاه فوق، مقادیر تابع مجهول در نقاط هم‌محلی  $(u_n(t_j))$  حاصل می‌شوند. در این دستگاه  $\alpha_{j,i}$  ها از رابطه

$$\alpha_{j,i} = \begin{cases} \frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_1} k(t_j, s)(t_1 - s) ds, & i = 0, \\ \frac{1}{h} \int_{t_{i-1}}^{t_i} k(t_j, s)(s - t_{i-1}) ds, & i = j, \\ \frac{1}{h} \int_{t_{i-1}}^{t_i} k(t_j, s)(s - t_{i-1}) ds + \frac{1}{h} \int_{t_i}^{t_{i+1}} k(t_j, s)(t_{i+1} - s) ds, & i < j, \\ 0, & i > j, \end{cases}$$

محاسبه می‌شوند.

#### ۵. آنالیز همگرایی

قضیه ۱۰۵. روش عددی ارائه شده توسط دستگاه (۵) برای  $h$  به اندازه کافی کوچک همگراست و برای  $y(t) \in C^2[0, b]$  مرتبه همگرایی آن برابر با  $O(h^2)$  است.

اثبات. با استفاده از قضیه (۲۰۱۱) از [۱] و تعریف عملگر تصویر  $p_n$  حکم حاصل می‌شود.  $\square$

#### ۶. نتایج عددی

مثال ۱۰۶. مساله مقدار اولیه خطی

$$(6) \quad \begin{cases} D^\alpha y(t) = -y(t), & 0 < \alpha, \\ y(0) = 1, & y'(0) = 0, \end{cases}$$

را در نظر بگیرید. شرط اولیه دوم فقط برای  $\alpha > 1$  است و جواب دقیق این مساله

$$y(t) = E_\alpha(-t^\alpha), \quad E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)},$$

که در آن  $E_\alpha$  تابع میتاگ لفلر<sup>۱</sup> از مرتبه  $\alpha$  است [۹]. در این مثال  $b = 1$  و قدر مطلق خطا در برخی نقاط شبکه برای مقادیر مختلف  $h$  در جدول ۱ گزارش شده است. همانطور که از نتایج مشخص است با کوچکتر شدن طول گام سرعت همگرایی روش افزایش می‌یابد. همچنین برای  $1 < \alpha < \infty$  مقدار خطا در ستون  $p = 2$  کمتر از  $p = 1$  است که تایید کننده کارایی هموارسازی می‌باشد.

جدول ۱. نتایج عددی مثال (۱.۶)

$\alpha = 1/5$	$\alpha = 0.5$		h	t
	p=2	p=1		
$5.9638e-8$	$2.3869e-5$	$1.4005e-3$	0.1	0.1
$5.8156e-5$	$1.5660e-3$	$1.1832e-2$	0.1	0.1
$7.4942e-7$	$2.2650e-5$	$2.6351e-4$	0.1	0.1
$2.9172e-4$	$1.4438e-4$	$2.3321e-3$	0.1	0.5
$3.2120e-6$	$1.4486e-5$	$6.7063e-5$	0.01	0.01
$3.8184e-4$	$3.065e-4$	$1.1247e-3$	0.1	1
$4.1166e-6$	$5.3619e-7$	$3.3071e-5$	0.01	0.01

## REFERENCES

1. K. Atkinson, W. Han, *A Functional Analysis Framework, Theoretical Numerical Analysis*, Sptinger-Verlag New York Inc (2001).
2. H. Brunner, P. J. van der Houwen *The numerical solution of Volterra equations*, Elsevier Science Publisher B.V. (1985).
3. R. F. Cameron, S. McKee, *Product integration methods for second kind Abel integral equations*, J.Comput.Appl. Math.11 (1984) 1–10.
4. V. Daftardar-Gejji, H. Jafari, *Adomian decomposition: a tool for solving a system of fractional differential equations*, J. Math. Anal. Appl., 301 (2005), 503-518.
5. K. Diethelm, N. J. Ford, A. D. Freed, *A predictor-corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations*, Nonlinear Dynam., 29 (2002), 3(22), Fractional order calculus and its applications.
6. J. Dixon, *On the order of the error in discretization methods for weakly singular second kind Volterra integral equations with non-smooth solutions*, BIT 25 (1985) 624–634.
7. R. Garrappa, *On linear stability of predictor-corrector algorithms for fractional differential equations*, Int. J. Comput. Math., 87 (2010), 2281-2290.
8. C. Huang and Z. Zhang, *Convergence of a p-version/hp-version method for fractional differential equations*, J. Comput. Phys., 286 (2015), 118-127.
9. P. Kumar, O. P. Agrawal, *An approximate method for numerical solution of fractional differential equations*, Signal Proc. 86 (2006) 2602–2610.
10. Ch. Lubich, *Fractional linear multistep methods for Abel–Volterra integral equations of the second kind*, Math. Comput.45 (1985) 463–469.
11. G. Monegato, L.Scuderi, *High order methods for weakly singular integral equations with nonsmooth input functions*, Math.Comput.67 (1998) 1493–1515.
12. G. Vainikko, *Multidimensional Weakly Singular Integral Equations*, vol. 1549 of Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, (1993).

پست الکترونیکی: [Pdrkhsh@gmail.com](mailto:Pdrkhsh@gmail.com)  
 پست الکترونیکی: [katani@yu.ac.ir](mailto:katani@yu.ac.ir)

## روش هم محلی لژاندر برای حل تقریبی معادله دیفرانسیل ریکاتی کسری با ضرایب متغیر

ک. درخشان\* و م. عرب عامری  
دانشکده ریاضی، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران

چکیده. در این مقاله به ارائه ی یک روش ترکیبی برای حل تقریبی معادله دیفرانسیل ریکاتی غیر خطی کسری با ضرایب متغیر پرداخته می شود. این روش، ترکیبی از ماتریس عملیاتی انتگرال و روش هم محلی لژاندر می باشد. کران خطای ماتریس عملیاتی انتگرال آورده شده است. همچنین نتایج عددی برای معادله دیفرانسیل ریکاتی کسری از مرتبه های متفاوت در قالب نمودار بیان شده است. **واژه های کلیدی:** معادله دیفرانسیل ریکاتی کسری، روش هم محلی، چندجمله ای های لژاندر، ماتریس عملیاتی انتگرال. 34A08, 65R10: [۲۰۱۰]

### ۱. پیش گفتار

معادله دیفرانسیل ریکاتی که به افتخار جاکوپو ریکاتی<sup>۱</sup> نام گذاری شده است، نقش مهمی در علوم مختلف از جمله مدل سازی مسائل فیزیک، مسائل انتشار، مسائل کنترل بهینه و... دارد، که بیانگر اهمیت این نوع معادله می باشد. از جمله ی کارهایی که در این زمینه انجام شده است می توان به موارد ذیل اشاره کرد.

سینگ<sup>۲</sup> و سریواستاوا<sup>۳</sup> روش هم محلی ژاکوبی را برای حل تقریبی معادلات دیفرانسیل ریکاتی به کار بردند [۷]. پاپیلون<sup>۴</sup> و ترمبلی<sup>۵</sup> به حل معادله دیفرانسیل ریکاتی سه بعدی و بیان کاربردهای آن پرداختند [۶]. قمنجانی<sup>۶</sup> و خرم<sup>۷</sup> با استفاده از روش منحنی بزیر<sup>۸</sup> به حل این معادله پرداختند [۴]. در این مقاله روش هم محلی لژاندر برای حل عددی معادله دیفرانسیل ریکاتی کسری با ضرایب متغیر ارائه می شود [۷]. معادله به شکل کلی زیر در نظر گرفته می شود:

$$(1) \quad p(t)D^\alpha y(t) + q(t)y(t) + r(t)y^\gamma(t) - h(t) = 0, \quad \alpha > 0, \quad t \in [0, 1]$$

که توابع  $p(t), q(t), r(t), h(t)$  توابع پیوسته روی  $[0, 1]$  و به ازای هر  $t \in [0, 1]$  داریم  $p(t) \neq 0$ . شرایط اولیه برای معادله فوق به صورت زیر در نظر گرفته می شوند:

$$D^m y(0) = \xi_m, \quad m = 0, 1, 2, \dots, M-1, \quad M = [\alpha].$$

#### ۱.۱ تعاریف و مقدمات.

تعریف ۱.۱. عملگر انتگرال کسری ریمان-لیوویل از مرتبه  $\alpha \geq 0$  به صورت زیر تعریف می گردد [۳]:

$$I^\alpha y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} y(s) ds, \quad I^0 y(t) = y(t).$$

تعریف ۲.۱. عملگر مشتق کسری کاپوتو از مرتبه  $\alpha$  که  $m-1 < \alpha \leq m$  به صورت زیر تعریف می شود [۳]:

$$D^\alpha y(t) = I^{m-\alpha}(D^m y(t)) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{m-\alpha-1} y^{(m)}(s) ds, \quad m \in \mathbb{N}, \quad t > 0.$$

لم ۳.۱. اگر  $m \in \mathbb{N}, m-1 < \alpha < m$  و  $y(t) \in L^\gamma[0, 1]$  آنگاه

$$D^\alpha I^\alpha y(t) = y(t)$$

\* ارائه دهند: 1 Jacopo Riccati 2 Singh 3 Srivastava 4 Papillon 5 Tremblay 6 Ghomangani 7 Khorram 8 Bezier

$$I^\alpha D^\alpha y(t) = y(t) - \sum_{k=\circ}^{m-1} y^{(k)}(\circ^+) \frac{t^k}{k!}$$

تعریف ۴.۱. حالت کلی چند جمله ای های انتقال یافته لژاندر از درجه  $i$  روی  $[\circ, 1]$  به صورت زیر می باشد [۷]:

$$p_i(t) = \sum_{k=\circ}^i (-1)^{(i-k)} \frac{(i+k)!}{(i-k)!(k!)^2} t^k$$

که رابطه تعامد این چند جمله ای ها به شکل زیر است:

$$\int_{\circ}^1 p_m(t) p_n(t) dt = l_{mn} \delta_{mn}$$

$$l_{mn} = \frac{1}{(2m+1)!} \quad \delta_{mn} \text{ تابع دلتای کرونکر می باشد و}$$

اگر تابع  $y(t) \in L^2[\circ, 1]$

$$(2) \quad y(t) = \sum_{k=\circ}^{\infty} d_k p_k(t)$$

که

$$(3) \quad d_k = \frac{1}{l_k} \int_{\circ}^1 p_k(t) y(t) dt, \quad k = \circ, 1, 2, \dots$$

با قطع کردن سری به ازای  $k = m$  داریم:

$$(4) \quad y(t) \cong \sum_{k=\circ}^m d_k p_k(t) = d^T \varphi_m(t)$$

که  $d$  و  $\varphi_m(t)$  بردار های  $m+1$  مولفه ای هستند که به صورت زیر نمایش داده می شوند:

$$(5) \quad d = [d_{\circ}, d_1, \dots, d_m]^T, \quad \varphi_m(t) = [p_{\circ}(t), p_1(t), \dots, p_m(t)]^T.$$

قضیه ۵.۱. [۲] فرض کنید  $\varphi_m(t) = [p_{\circ}(t), p_1(t), \dots, p_m(t)]^T$  بردار شامل چند جمله ای های لژاندر باشد و  $\alpha > \circ$ ، آنگاه

$$(6) \quad I^\alpha p_i(t) = I^{(\alpha)} \varphi_m(t),$$

که  $I^{(\alpha)} = (\lambda(i, j))$  ماتریس عملیاتی انتگرال لژاندر می باشد که درایه های آن به صورت زیر حاصل می شوند:

$$(7) \quad \lambda(i, j) = \sum_{k=\circ}^i (-1)^{i-k} \frac{(i+k)!}{k!(i-k)!(k+\alpha)!} \times \sum_{l=\circ}^j (-1)^{j-l} \frac{(j+l)!(k+l+\alpha)!(2j+1)}{(j-l)!(l!)^2(l+k+\alpha+1)!}, \quad \circ \leq i, j \leq m.$$

## ۲. روش حل و همگرایی روش

در این بخش روشی برای حل تقریبی معادله (۱) ارائه می شود [۷]. ابتدا قرار می دهیم

$$(8) \quad D^\alpha y(t) = w(t).$$

با تاثیر عملگر انتگرال ریمان-لیوویل بر هر دو طرف معادله (۸) و استفاده از لم (۳.۱) داریم:

$$(9) \quad y(t) - \sum_{m=\circ}^{M-1} D^m y(\circ) \frac{t^m}{m!} = I^\alpha w(t).$$

از معادله (۸) و (۹) می توان نوشت:

$$(10) \quad y(t) = I^\alpha w(t) + a(t), \quad a(t) = \sum_{m=\circ}^{M-1} D^m y(\circ) \frac{t^m}{m!}.$$

با قرار دادن معادلات (۸) و (۱۰) در معادله (۱) و با مرتب کردن آن داریم:

$$(11) \quad p(t)w(t) + q(t)(I^\alpha w(t) + a(t)) + r(t)(I^\alpha w(t) + a(t))^2 - h(t) = \circ$$

معادله های (۱) و (۱۱) با هم معادلند. همچنین با در نظر گرفتن تقریب های زیر با استفاده از چند جمله ای های لژاندر داریم:

$$(۱۲) \quad w(t) \approx d^T \varphi_n(t),$$

$$(۱۳) \quad a(t) \approx A^T \varphi_n(t),$$

$$(۱۴) \quad q(t)a(t) - h(t) \approx B^T \varphi_n(t).$$

با استفاده از ماتریس عملیاتی انتگرال و با جایگذاری معادلات (۱۲) - (۱۴) در معادله (۱۱) معادله زیر حاصل می شود:

$$(۱۵) \quad p(t)d^T \varphi_n(t) + q(t)d^T I^{(\alpha)} \varphi_n(t) + r(t)(d^T I^{(\alpha)} \varphi_n(t) + A^T \varphi_n(t))^2 + B^T \varphi_n(t) \approx 0,$$

که  $I^{(\alpha)}$  ماتریس عملیاتی انتگرال چندجمله ای های لژاندر از مرتبه  $(n+1) \times (n+1)$  است. باقیمانده معادله (۱۵) به صورت زیر تعریف می شود:

$$(۱۶) \quad R_n(t) = p(t)d^T \varphi_n(t) + q(t)d^T I^{(\alpha)} \varphi_n(t) + r(t)(d^T I^{(\alpha)} \varphi_n(t) + A^T \varphi_n(t))^2 + B^T \varphi_n(t).$$

ضرایب مجهول در تقریب ها با حل دستگاه معادلات جبری غیر خطی که با استفاده از رویکرد هم محلی و به کارگیری نقاط هم محلی، حاصل می شوند، به دست می آیند. در واقع داریم:

$$(۱۷) \quad R_n(t_i) = 0, \quad t_i = \frac{i}{n}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

با حل دستگاه معادلات غیر خطی حاصل از (۱۷)، ضرایب مجهول (۱۵) و به دنبال آن جواب تقریبی معادله (۱)، بدست می آید.

**قضیه ۱۰۲.** [۱] فرض کنید تابع  $y: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  و  $y \in C^{(m+1)}[0, 1]$  و  $-m, y_m(t)$  امین تقریب از تابع

$$q_m(t) = \text{span}\{p_0(t), p_1(t), \dots, p_m(t)\}$$

آنگاه

$$(۱۸) \quad e_m^1 = \|y - y_m\|_1 \leq \frac{M}{(m+1)!} \sqrt{\frac{(2+2m)!}{(3+2m)!}}, \quad M = \max_{t \in [0, 1]} |y^{(m+1)}(t)|.$$

**اثبات.** فرض کنید  $y_1(t)$  چندجمله ای تیلور از  $y$  در نقطه ی صفر باشد، که کران بالای خطای چند جمله ای تیلور به ازای هر  $t \in [0, 1]$  عبارتست از  $|y - y_1| \leq \frac{M t^{m+1}}{(m+1)!}$ ، چون  $y_m$  تقریبی از  $q_m(t)$  است لذا،  $y_1, y_m \in q_m(t)$

$$\|y - y_m\|_1 \leq \|y - y_1\|_1 = \int_0^1 (y - y_1)^2 dt \leq \frac{M}{(m+1)!} \sqrt{\frac{(2+2m)!}{(3+2m)!}}.$$

□

**قضیه ۲۰۲.** [۵] اگر  $e_{I,m}^{\alpha,1}$  بردار خطای ماتریس عملیاتی انتگرال مرتبه  $\alpha$  باشد و با استفاده از تعداد  $(m+1)$  چندجمله ای لژاندر بدست آمده باشد، داریم:

$$(۱۹) \quad e_{I,m}^{(\alpha,1)} = I^{(\alpha)} \varphi_m(x) - I^\alpha(x).$$

و بردار خطا در معادله (۱۹) وقتی که  $m$  به سمت بی نهایت میل کند، به سمت صفر میل می کند.

### ۳. نتایج عددی

در این قسمت ما دقت و کارایی روش موردنظر را با اعمال روش روی یک مثال مورد بررسی قرار می دهیم.

**مثال ۱۰۳.** معادله دیفرانسیل ریکاتی کسری زیر را در نظر بگیرید:

$$(۲۰) \quad D^\alpha y(t) = 1 - y^2(t) \quad t \in [0, 1], \quad 0 < \alpha \leq 1$$

$$(۲۱) \quad y(0) = 0.$$

جواب دقیق معادله (۲۰) برای مرتبه صحیح  $\alpha = 1$  برابر است با:

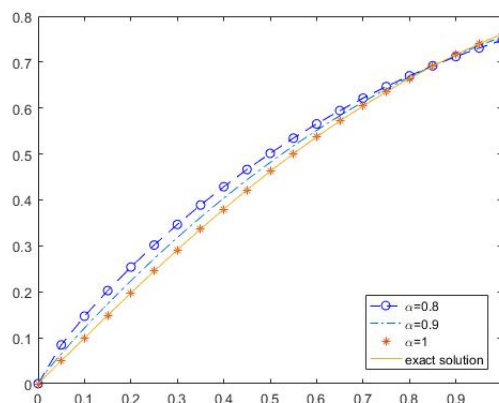
$$(۲۲) \quad y(t) = \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1}$$

که تابع باقیمانده معادله (۲۰) و (۲۱) به صورت زیر می باشد:

$$(23) \quad R_n(t) = d^T \varphi_n(t) + (d^T I^{(\alpha)} \varphi_n(t))^2 - B^T \varphi_n(t).$$

با بکارگیری روش گفته شده و با در نظر گرفتن نقاط هم محلی به صورت  $t_i = \frac{i}{n}$ ;  $i = 0, 1, \dots, 10$  جواب تقریبی معادله (۲۰) بدست می آید. شکل (۱)، نمودار جواب دقیق و تقریبی به ازای مقادیر مختلف  $\alpha$  را نشان می دهد.

$$(24) \quad R_n(t_i) = 0, \quad t_i = \frac{i}{n}, \quad i = 0, 1, \dots, 10.$$



شکل ۱. رفتار جواب دقیق و جواب تقریبی برای مقادیر مختلف  $\alpha = 0.8, 0.9, 1$

#### ۴. نتیجه گیری و پیشنهادات

در این مقاله روشی مبتنی بر چندجمله ای های متعامد لژاندر برای حل معادله دیفرانسیل ریکاتی کسری با ضرایب متغیر به کار برده شد. با توجه به شکل، می توان دریافت که به ازای مقادیر مختلف کسری  $\alpha$  جواب تقریبی قابل قبولی به دست می آید. و در  $\alpha = 1$  جواب تقریبی با جواب دقیق سازگاری بیشتری دارد. پیشنهاد می شود برای افزایش دقت از توابع موجک لژاندر و لژاندر کسری استفاده شود.

#### مراجع

- [1] M. Behroozifar, A.Sazmand, *An approximate solution based on jacobi polynomials for time-fractional convection-diffusion equation*, Appl. Math. Comput. 296 (2017) 1–17.
- [2] A. H. Bhrawy, M.M. Tharwat, M.A. Alghamdi, *A new operational matrix of fractional integration for shifted jacobi polynomials*, Bull. Malay. Math. Sci. Soc. 37 (2014) 1–14.
- [3] K. Diethelm, *The analysis of fractional differential equation*, Berlin, Springer-Verlag, (2010).
- [4] F. Ghomangani, E.Khorram, *Approximate Solution for quadratic riccati differential equation*, Taibah university for science. 11(2017), 2, 240–250.
- [5] S. Kazem, *An integral operational matrix based on Jacobi polynomials for solving fractional-order differential equation*, App. Math. Model. 37 (2013), 1126–1136.
- [6] Ch. Papillon, S.Tremblay, *On a tree-dimensional riccati differential equation and its symmetries*, Mathematical Anal. and Appl. 458 (2018), 1, 611–621.
- [7] H. Singh, H.M. Srivastava, *Jacobi collocation method for the approximate solution of some fractional-order riccati differential equations with variable coefficients*, Physica A, 523 (2019), 1130–1149.

پست الکترونیکی: [Derakhshan.k@pgs.usb.ac.ir](mailto:Derakhshan.k@pgs.usb.ac.ir)  
 پست الکترونیکی: [arabameri@math.usb.ac.ir](mailto:arabameri@math.usb.ac.ir)

## ارائه یک مدل استوار برای مدیریت منابع آب

عاطفه عبدالله ایبانه\*

دانشکده ریاضی، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران  
محمد علی رعایت پناه، مریم بیرامی ایناللو و گلر حزیبی  
دانشکده ریاضی، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران

چکیده. مساله مدیریت منابع آب، برآورد کردن تقاضاها با توجه به منابع موجود آب با کمترین هزینه می‌باشد. در این مساله معمولاً ظرفیت منابع تقاضا نامشخص و هزینه‌های انتقال در شبکه آب‌رسانی دارای عدم قطعیت می‌باشد؛ بنابراین در این مقاله به ارائه مدلی با استفاده از بهینه‌سازی استوار برای مساله مدیریت منابع آب، با عدم قطعیت هزینه‌های انتقال و نامشخص بودن ظرفیت منابع تقاضا پرداخته می‌شود. کارایی مدل پیشنهادی توسط نتایج عددی نشان داده شده است.  
واژه‌های کلیدی: مدیریت منابع آب، عدم قطعیت، بهینه‌سازی استوار.  
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 78M50, 65Kxx, 90C27

## ۱. پیش‌گفتار

سیستم مدیریت منابع آب دارای مراکز عرضه، تقاضا، انتقال و ذخیره‌سازی آب بوده که شامل اجزایی مانند مخازن، شبکه انتقال آب، تاسیسات تصفیه، ایستگاه‌های پمپاژ و غیره می‌باشد. معمولاً پیکربندی فیزیکی سیستم آب‌رسانی توسط یک گراف جهت‌دار یا یک ابرگراف جهت‌دار بیان می‌شود که در یک افق زمانی چند ماهه یا چند ساله تجزیه و تحلیل می‌گردد [۱]، [۲]. کاو و همکارانش [۳] به ارائه مدل برنامه‌ریزی خطی برای سیستم مدیریت منابع آب جهت کاهش پیامدهای ناشی از خشکسالی با استفاده از منابع ذخیره شده و با توجه به اتصال داخلی بین سیستم‌های آب پرداختند. نیدا و همکاران [۴] برنامه‌ریزی یک سیستم منطقه‌ای چند مخزنی در یک افق زمانی بلندمدت را با استفاده از متغیرهای طراحی شبکه و متغیرهای جریان پیشنهاد و یک روش تجزیه برای حل آن ارائه دادند که در آن از ساختار جبری مدل حاصل، برای نگه داشتن مزایای اصلی الگوریتم‌های شبکه استفاده می‌شود. اخیراً، بهینه‌سازی شبکه با استفاده از رویکرد ابرگراف برای طراحی مساله مدیریت آب توسط سکی و همکاران [۲] پیشنهاد شده است. با توجه به ساختار مساله مدیریت آب و اینکه در اکثر کاربردها میزان تقاضا نامشخص بوده و هزینه انتقال آب دارای عدم قطعیت می‌باشد، در این مقاله به بررسی تخصیص منابع آب با ظرفیت ثابت مخزن در یک دوره مشخص برای تقاضاهای داده شده پرداخته می‌شود. در اینجا، برای مدل کردن اندازه تقاضاهای نامعلوم، از قیود برابری انتقال جریان در کمان‌های بین گره‌های اتصال و گره‌های تقاضا استفاده می‌گردد. همچنین به دلیل اینکه مساله مدیریت منابع آب در یک دوره زمانی بلندمدت بررسی می‌شود، هزینه انتقال روی کمان‌ها به طور دقیق مشخص نمی‌باشد؛ از این رو در اینجا برای مواجهه با عدم قطعیت، از بهینه‌سازی استوار استفاده می‌گردد که هدف آن یافتن جوابی است که در تمام حالت‌های عدم قطعیت، شدنی و نزدیک به بهینه باقی بماند. ساختار مقاله به شرح ذیل می‌باشد:  
در بخش ۲ به تعریف نمادها، متغیرها و ارائه مدل برای مساله پیشنهادی پرداخته می‌شود. در بخش ۳ نتایج عددی بیان می‌گردد و در نهایت نتیجه کلی از مقاله ارائه می‌شود.

## ۲. مدل ریاضی

همان‌طور که بیان شد، مساله مدیریت منابع آب می‌تواند توسط گراف چند دوره‌ای  $G = (N, A)$  بیان گردد که  $N$  مجموعه گره‌ها و  $A$  مجموعه کمان‌های جهت‌دار است. هر گره معرف نقاط عرضه، تقاضا، انتقال و ذخیره‌سازی آب است و هر کمان  $(i, j)$  متعلق به  $A$  معرف خطوط لوله یا کانال بین گره‌های مراکز  $i$  و  $j$  می‌باشد. هر گره  $i \in N$  متناظر با عدد صحیح  $b_i$  است که اگر  $b_i > 0$  نشان دهنده عرضه و اگر  $b_i < 0$  تقاضا و اگر  $b_i = 0$  بیانگر گره میانی می‌باشد. هر کمان  $(i, j)$  متناظر با پارامترهای هزینه هر واحد جریان،  $c_{ij}$ ، کران بالای جریان  $u_{ij}$  و متغیر میزان جریان  $x_{ij}$  می‌باشد. در حالتی که تمام پارامترهای مساله مشخص باشد، مساله مدیریت منابع آب



را می‌توان توسط مساله حداقل هزینه جریان زیر مدل‌بندی نمود:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j:(i,j) \in A} x_{ij} - \sum_{j:(j,i) \in A} x_{ji} = b_i, \quad \forall i \in N, \\ & 0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}, \quad \forall (i,j) \in A, \end{aligned}$$

در اکثر مسائل کاربردی، ظرفیت مراکز تقاضا مشخص نیست؛ در این حالت می‌توان با اضافه کردن متغیر طراحی  $y$  و محدودیت‌های برابری برای انتقال جریان از کمان‌های بین گره اتصال و گره تقاضا مساله ظرفیت مراکز تقاضا را مدل‌بندی کرد، بطوریکه هر مرکز، نسبت مساوی یا ضریبی از نسبت جریان بقیه مراکز را دریافت کند. همچنین هزینه انتقال آب معمولاً در یک بازه تغییر می‌کند، یعنی  $\tilde{c}_{ij} \in [c_{ij}, c_{ij} + d_{ij}]$  است که در آن مقدار اسمی هزینه و  $d_{ij}$  میزان انحراف از هزینه اسمی است؛ بنابراین در این حالت، مدل مدیریت منابع آب را می‌توان بصورت زیر بیان کرد:

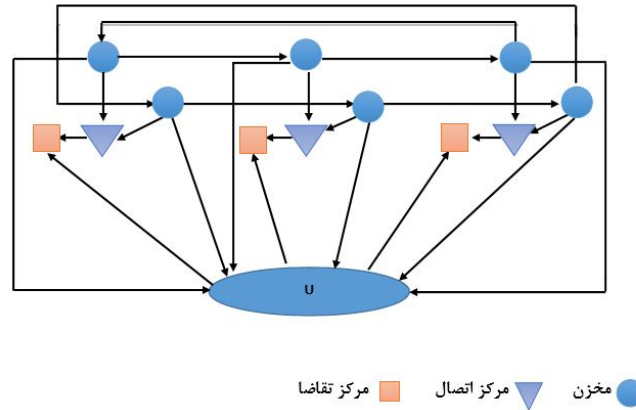
$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{(i,j) \in A} \tilde{c}_{ij} x_{ij} + \gamma y \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j:(i,j) \in A} x_{ij} - \sum_{j:(j,i) \in A} x_{ji} = b_i, \quad \forall i \in N, \\ & x_{ij} = \alpha y, \quad \forall (i,j) \in R \subseteq A, \\ & 0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}, \quad \forall (i,j) \in A, \\ & 0 \leq y \leq y_{max}. \end{aligned}$$

که در آن،  $R$  بیانگر مجموعه کمان‌ها از گره‌های اتصال به گره‌های تقاضا است. در مدل فوق برای مواجهه با عدم قطعیت از مدل بهینه‌سازی استوار سیم و برتسیماس [۵] استفاده می‌گردد. فرض کنید مجموعه  $J = \{(i,j) | d_{ij} > 0\}$  شامل تمام کمان‌هایی است که هزینه آنها عدم قطعیت دارند؛ از آن جایی که در دنیای واقعی فرض اینکه در یک دوره تمام کمان‌ها عدم قطعیت داشته باشند غیر محتمل است، فرض می‌شود که  $\Gamma$  کمان دارای هزینه عدم قطعیت است که پارامتر  $\Gamma \in [0, |J|]$  تعریف می‌شود. پارامتر  $\Gamma$  درجه محافظه کاری است و تعیین می‌کند چه تعداد از پارامترهای هزینه عدم قطعیت دارند، واضح است که اگر  $\Gamma = 0$  هزینه تمام کمان‌ها هزینه اسمی و اگر  $\Gamma = |J|$  هزینه تمام کمان‌ها غیر قطعی می‌باشد. در اینجا  $\Gamma$  عدد صحیح فرض شده است، بنابراین مدل بهینه‌سازی استوار به شرح زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} + \gamma y + \max_{\{S | S \subseteq J, |S| \leq \Gamma\}} \sum_{(i,j) \in S} d_{ij} x_{ij} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j:(i,j) \in A} x_{ij} - \sum_{j:(j,i) \in A} x_{ji} = b_i, \quad \forall i \in N, \\ & x_{ij} = \alpha y, \quad \forall (i,j) \in R \subseteq A, \\ & 0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}, \quad \forall (i,j) \in A, \\ & 0 \leq y \leq y_{max}. \end{aligned}$$

باتوجه به اینکه در مدل فوق تابع هدف غیر خطی است، می‌توان جمله حداکثرسازی در تابع هدف یعنی  $\max_{\{S | S \subseteq J, |S| \leq \Gamma\}} \sum_{(i,j) \in S} d_{ij} x_{ij}$  را با فرض ثابت بودن مقدار  $x_{ij}$  به صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \max \sum_{(i,j) \in J} d_{ij} x_{ij} z_{ij} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{(i,j) \in J} z_{ij} \leq \Gamma \\ (2) \quad & 0 \leq z_{ij} \leq 1 \quad (i,j) \in J \end{aligned}$$



شکل ۱. یک نمونه از سیستم عرضه آب

با توجه به نظریه دوگان، اگر متغیرهای دوگان  $q_{ij}$  و  $p$  به قیود (۱) و (۲) اختصاص یابد، مدل دوگان به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \min \quad & \Gamma p + \sum_{(i,j) \in J} q_{ij} \\ \text{s.t.} \quad & p + q_{ij} \geq d_{ij} x_{ij}, & (i,j) \in J, \\ & p, q_{ij} \geq 0, & (i,j) \in J, \end{aligned}$$

بنابراین مدل همتای استوار به مدل خطی زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} + \gamma y + \Gamma p + \sum_{(i,j) \in J} q_{ij} \\ \text{s.t.} \quad & p + q_{ij} \geq d_{ij} x_{ij}, & (i,j) \in J, \\ & \sum_{j:(i,j) \in A} x_{ij} - \sum_{j:(j,i) \in A} x_{ji} = b_i, & \forall i \in N, \\ & x_{ij} = \alpha y, & \forall (i,j) \in R \subseteq A, \\ & 0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}, & \forall (i,j) \in A, \\ & 0 \leq y \leq y_{max} \\ & p \geq 0 \\ & q_{ij} \geq 0, & (i,j) \in J. \end{aligned}$$

### ۳. نتایج عددی

برای ارزیابی مدل پیشنهادی، سیستم تک دوره‌ای عرضه آب نشان داده شده در شکل ۱ را در نظر بگیرید که شامل ۷ گره مخزن، ۳ گره مرکز تقاضا و ۳ گره مرکز اتصال می‌باشد. نتایج بدست آمده در جدول ۱ آمده است. در جدول نتایج، ستون  $ROPT$  بیانگر مقدار بهینه استوار به ازای  $\Gamma$ های مختلف می‌باشد که برای  $\Gamma = 0$  مقدار بهینه در حالت اسمی محاسبه شده است. ستون  $\frac{ZR-ZD}{ZD}$  مقدار بهینه استوار را برای  $\Gamma$ های مختلف با مقدار بهینه اسمی مقایسه می‌کند، که نشان می‌دهد با افزایش میزان محافظه کاری، فاصله مقدار بهینه استوار از حالت اسمی زیاد می‌شود. در ستون  $\frac{ZRD-ZD}{ZD}$  به مقایسه عملکرد جواب بهینه استوار برای پارامترهای اسمی با مقدار تابع هدف اسمی پرداخته شده است؛ در واقع این ستون میزان محافظت از جواب بهینه استوار را نشان می‌دهد. با توجه به نتایج حاصل در جدول، مقادیر ستون  $\frac{ZRD-ZD}{ZD}$  در مقایسه با مقادیر ستون  $\frac{ZR-ZD}{ZD}$  کمتر است و در واقع بیان کننده این است که جواب بهینه استوار در تمام حالت‌ها، شدنی و نزدیک به بهینه مدل اسمی می‌باشد.

$\frac{ZRD-ZD}{ZD}\%$	$\frac{ZR-ZD}{ZD}\%$	ROPT	$\Gamma$
		۱۲۸۴۵/۴۷۱	۰
۱/۲۰۸	۲۱/۰۰۸	۱۵۵۴۴/۱۱	۱
۷۸۵۱	۳۸/۷۴۲	۱۷۸۲۲/۰۵۴	۲
۹۳۶۶	۵۳/۶۶۵	۱۹۷۳۹/۰۳۶	۳
۱۰۵۱۸	۶۶/۵۳۲	۲۱۳۹۱/۸۷۹	۴
۱۰۵۵۲	۷۸/۱۱۳	۲۲۸۷۹/۴۲۹	۵
۱۰/۴۸۴	۸۹/۶۹۲	۲۴۳۶۶/۸۹۳	۶
۸۴۷۵	۱۰۰/۶۴	۲۵۷۷۳/۱۰۷	۷
۵۴۳۰	۱۱۰/۸۰۹	۲۷۰۷۹/۳۵۹	۸
۴۸۳۰	۱۱۹/۲۵۱	۲۸۱۶۳/۸۴۷	۹
۱۱/۷۵۰	۱۲۵/۲۴۹	۲۸۹۳۴/۳۳۱	۱۰
۱۲/۰۶۲	۱۳۰/۲۰۲	۲۹۵۷۰/۴۷۹	۱۱
۱۰/۹۹۲	۱۳۴/۱۰۱	۳۰۰۷۱/۳۴۱	۱۲
۱۱/۳۷۶	۱۳۷/۳۶۳	۳۰۴۹۰/۴۵۵	۱۳
۱۱/۱۹۱	۱۴۰/۴۵۶	۳۰۸۸۷/۷۲۵	۱۴
۱۱/۷۹۹	۱۴۳/۲۹۹	۳۱۲۵۲/۸۶۸	۱۵
۱۱/۸۹۳	۱۴۵/۶۱۶	۳۱۵۵۰/۴۸۲	۱۶
۱۱/۸۹۳	۱۴۷/۸۳۳	۳۱۸۳۵/۳۵۲	۱۷

جدول ۱. نتایج حاصل از مدل پیشنهادی و مدل قطعی

## مراجع

1. Manca, A., Sechi, G. M. and Zuddas, P., *Water supply network optimisation using equal flow algorithms*, Water resources management. 24 (2010), no. 13, 3665-3678.
2. Sechi, G. M., Zuddas, P., *Multiperiod hypergraph models for water systems optimization*, Water resources management. 22 (2008), no. 3, 307-320.
3. Cao, C., Sechi, GM., and Zuddas, P., *A linear programming algorithm for water resources system planning*, Proceeding of the 21st conference hydraulic and hydraulic works. L'Aquila. (1988), 59-73.
4. Niedda, M., Sechi, G., M., *Mixed optimization technique for large-scale water-resource systems*, Water Resources Planning and Management. 122 (1996), no. 6, 387-393.
5. Bertsimas, D., and Melvyn, S., *The price of robustness*, Operations research. 52 (2004), no. 1, 35-53.

پست الکترونیکی: [raayatpanah@gmail.com](mailto:raayatpanah@gmail.com)

پست الکترونیکی: [abyaneh.abh@gmail.com](mailto:abyaneh.abh@gmail.com)

پست الکترونیکی: [maryambeirami73@gmail.com](mailto:maryambeirami73@gmail.com)

پست الکترونیکی: [hezbigollar74@gmail.com](mailto:hezbigollar74@gmail.com)

## روش عملیاتی موجک لژاندر برای حل عددی دستگاه معادلات دیفرانسیل انتگرال ولترای غیر خطی

م. رئیسی\*

دانشکده ریاضی، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران

و م. عرب عامری

دانشکده ریاضی، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران

چکیده. در این مقاله، روش موجک لژاندر برای محاسبه جواب تقریبی دستگاه معادلات دیفرانسیل انتگرال ولترای غیر خطی توسعه داده شده است. ابتدا خواص موجک لژاندر ارائه سپس خواص گفته شده برای تبدیل دستگاه معادلات انتگرال به یک دستگاه معادلات جبری مورد استفاده قرار می‌گیرد. دستگاه حاصل نیز به روش نیوتن حل می‌شود. در نهایت نتایج به دست آمده به روش فعلی با روش موجک بی اسپلین مقایسه شده است.

واژه‌های کلیدی: موجک لژاندر، معادله دیفرانسیل انتگرال کسری، ماتریس عملیاتی.  
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 34A08, 65R10.

### ۱. پیش‌گفتار

نظریه موجک‌ها در طیف گسترده‌ای از رشته‌های مهندسی کاربرد دارد به ویژه در تحلیل سیگنال برای نمایش و تجزیه شکل موج، تجزیه و تحلیل فرکانس زمان و الگوریتم‌های سریع برای پیاده‌سازی آسان بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرند [۲]. در چند دهه گذشته، روش‌های متعددی برای به دست آوردن حل تقریبی یا عددی معادلات دیفرانسیل انتگرال خطی و غیر خطی ارائه شده است. در گذشته روش موجک لژاندر برای حل معادلات انتگرال و معادلات دیفرانسیل انتگرال از اشکال مختلف استفاده شده است. در [۷]، ونکاتش<sup>۱</sup> و همکاران روش موجک لژاندر را برای حل نوعی از معادلات دیفرانسیل انتگرال غیرخطی استفاده کرده‌اند. دستگاه معادلات دیفرانسیل انتگرال ولترای غیر خطی با شرایط اولیه داده شده را به شکل زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$(1) \quad y_i^{(p)}(x) = G_i(x, Y(x)) + \sum_{j=1}^l \int_0^x k_{i,j}(x, t) F_{i,j}(t, Y(t)) dt, \quad i = 1, 2, \dots, l$$

$$y_i^{(s)}(0) = \beta_{i,s}, \quad s = 0, 1, \dots, p-1, \quad i = 1, 2, \dots, l$$

$$G_i(x, Y(x)) = G_i(x, y_1(x), y_1^{(1)}(x), \dots, y_1^{(p)}(x), \dots, y_l(x), y_l^{(1)}(x), \dots, y_l^{(p)}(x)),$$

$$F_{i,j}(t, Y(t)) = G_i(t, y_1(t), y_1^{(1)}(t), \dots, y_1^{(p)}(t), \dots, y_l(t), y_l^{(1)}(t), \dots, y_l^{(p)}(t)),$$

که  $k_{i,j}(x, t)$  هسته انتگرال و  $y_i^{(p)}(x)$ ، مشتق مرتبه  $p$ -ام  $y_i(x)$  می‌باشد.

### ۲. موجک لژاندر

موجک لژاندر  $\psi_{nm}(x) = \psi(k, \hat{n}, m, x)$  دارای چهار آرگومان  $k, \hat{n}, m, x$  است، که  $\hat{n} = 2n - 1$ ،  $n = 1, 2, \dots, 2^{k-1}$ ،  $k \in \mathbb{Z}^+$ ،  $m$  درجه چندجمله‌ای لژاندر و  $x$  متغیر مستقل می‌باشند. این تابع بر بازه  $[0, 1]$  به صورت زیر تعریف می‌شود [۷]:

$$\psi_{n,m}(x) = \psi(k, \hat{n}, m, x) \begin{cases} \sqrt{m + \frac{1}{4}} 2^{k/2} p_m(2^k x - \hat{n}), & \frac{\hat{n}-1}{2^k} \leq x < \frac{\hat{n}+1}{2^k} \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

که در رابطه فوق  $p(x)$  چند جمله‌ای لژاندر از مرتبه  $m$  و ضریب  $\sqrt{m + \frac{1}{4}}$  برای متعامد یک‌ه بودن موجک‌های لژاندر استفاده شده است.

### ۳. بهترین تقریب توابع با استفاده از موجک لژاندر

هر تابع دلخواه  $f(x) \in L^Y[0, 1]$  را می توان بر حسب بسط نامتناهی از توابع متعامد موجک لژاندر به صورت زیر نوشت:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_{nm} \psi_{nm}(x),$$

که  $c_{nm} = \langle f(x), \psi_{nm}(x) \rangle$  ضرب داخلی  $f(x)$  و  $\psi_{nm}(x)$  می باشد.

هم چنین باتوجه به کامل بودن فضای  $L^Y[0, 1]$  بهترین تقریب تابع  $f(x)$  به صورت زیر است:

$$(2) \quad f(x) \approx \sum_{n=1}^{2^{k-1}} \sum_{m=0}^{M-1} c_{nm} \psi_{nm}(x) = C^T \Psi(x),$$

که  $C$  و  $\Psi(x)$  بردارهای ستونی از مرتبه  $2^{k-1}M$  به صورت زیر می باشند:

$$(3) \quad C = [c_{10}, c_{11}, \dots, c_{m-1}, c_{20}, c_{21}, \dots, c_{2M-1}, \dots, c_{2^{k-1}0}, c_{2^{k-1}1}, \dots, c_{2^{k-1}M-1}]^T,$$

$$(4) \quad \Psi(x) = [\psi_{10}(x), \psi_{11}(x), \dots, \psi_{m-1}(x), \psi_{20}(x), \dots, \psi_{2M-1}(x), \dots, \psi_{2^{k-1}0}(x), \dots, \psi_{2^{k-1}M-1}(x)]^T.$$

۱.۳. ماتریس عملیاتی مشتق. ماتریس عملیاتی مشتق برای موجک لژاندر به صورت زیر تعریف می شود [۳]:

$$\Psi'(x) = D^{(1)} \Psi(x),$$

که

$$(5) \quad D^{(1)} = \begin{bmatrix} H & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & H & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & H & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & H \end{bmatrix},$$

در رابطه (۵)،  $H$  ماتریس از مرتبه  $M \times M$  است و عناصر آن به صورت زیر تعریف می شوند:

$$H_{r,s} = \begin{cases} 2^{k+1} \sqrt{(2r-1)(2s-1)}, & r = 1, \dots, M, \quad (r+s) \text{ فرد} \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

۲.۳. ماتریس عملیاتی انتگرال. ماتریس عملیاتی انتگرال  $p$  گانه برای موجک لژاندر به صورت زیر تعریف می شود [۴]:

$$\int_0^x \dots \int_0^x \underbrace{\Psi(x) dx \dots dx}_{\text{مرتبه } p} = Q^{(p)} \Psi(x),$$

که  $Q$  یک ماتریس از مرتبه  $2^{k-1}M \times 2^{k-1}M$  به فرم زیر می باشد:

$$(6) \quad Q = \frac{1}{2^k} \begin{bmatrix} X & W & W & \dots & W \\ 0 & X & W & \dots & W \\ 0 & 0 & X & \dots & W \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & X \end{bmatrix},$$

که  $X$  و  $W$  ماتریس هایی از مرتبه  $M \times M$  می باشند و به صورت زیر تعریف می شوند:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{5}} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{7}} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\sqrt{2M-3}\sqrt{2M-1}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{\sqrt{2M-3}\sqrt{2M-1}} & 0 \end{bmatrix},$$

$$W = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

#### ۴. روش موجک لژاندر برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل انتگرال ولترای غیر خطی

دستگاه معادلات دیفرانسیل انتگرال ولترای غیرخطی داده شده در معادله (۱) را در نظر می گیریم. ابتدا توابع مجهول را با روش موجک لژاندر، با استفاده از (۲) به صورت زیر تقریب می زنیم:

$$(۷) \quad y_i(x) = A_i^T \Psi(x), \quad i = 1, 2, \dots, l$$

که  $A_i^T$  مشابه  $C^T$  در رابطه (۳) و  $\Psi(x)$ ، به صورت رابطه (۴) تعریف می شود.

حال  $L \equiv \frac{d^p}{dx^p}$  و  $L^{-1} = \int_0^x \dots \int_0^x (\cdot) \underbrace{dx \dots dx}_{p\text{-مرتبه}}$  در نظر می گیریم. هم چنین مشتق و انتگرال  $y_i(x)$ ،  $i = 1, 2, \dots, l$

را می توان به صورت تقریبی، با استفاده از ماتریس های عملیاتی موجک لژاندر به فرم زیر بدست آورد:

$$y_i^{(s)}(x) = A_i^T \Psi^{(s)}(x) = A_i^T D^{(s)} \Psi(x), \quad s = 1, 2, \dots, p, \quad i = 1, 2, \dots, l$$

و

$$\int_0^x \dots \int_0^x y_i(x) \underbrace{dx \dots dx}_{s\text{-مرتبه}} = Q^s \Psi(x), \quad s = 1, 2, \dots, p, \quad i = 1, 2, \dots, l$$

حال با قرار دادن رابطه (۷) در رابطه (۱) و با اثر دادن عملگر  $L^{-1}$  بر طرفین معادله داریم:

$$(۸) \quad L^{-1} L [A_i^T \Psi(x)] = L^{-1} [G_i(x, \Omega(x))] + L^{-1} \left[ \sum_{j=1}^l \int_0^x k_{i,j}(x, t) F_{i,j}(t, \Omega(t)) dt \right], \quad i = 1, 2, \dots, l$$

که

$$(۹) \quad \Omega(x) = (x, A_1^T \Psi(x), A_1^T D \Psi(x), \dots, A_1^T D^p \Psi(x), \dots, A_l^T \Psi(x), A_l^T D \Psi(x), \dots, A_l^T D^p \Psi(x)),$$

قرار می دهیم:

$$U_i(x) = L^{-1} [G_i(x, \Omega(x))], \quad V_i(x) = L^{-1} \left[ \sum_{j=1}^l \int_0^x k_{i,j}(x, t) F_{i,j}(t, Y(t)) dt \right],$$

به این ترتیب، رابطه ی (۸) به صورت زیر نوشته می شود:

$$(۱۰) \quad A_i^T \Psi(x) = \sum_{s=0}^{p-1} \beta_{i,s} x^s + U_i(x) + V_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, l$$

که

$$\beta_{i,s} = y_i^{(s)}(\circ) = A_i^T D^s \Psi(\circ), \quad i = 1, 2, \dots, l, \quad s = \circ, 1, \dots, p-1$$

حال با استفاده از نقاط هم محلی  $2^{k-1}M$  برای  $r = 1, 2, \dots, 2^{k-1}M$  در معادله (۱۰) یک دستگاه جبری با  $2^{k-1}Ml$  معادله و  $2^{k-1}Ml$  مجهول برای  $i = 1, 2, \dots, l$  بدست می آید. با حل این دستگاه به روش نیوتون، می توان مقادیر مجهول  $A_i$  در نتیجه جواب  $y_i(x) = A_i^T \Psi(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, l$  را تعیین کرد.

### ۵. مثال عددی

مثال ۱۰۵. دستگاه معادلات دیفرانسیل انتگرال ولترای زیر را با شرایط اولیه داده شده در نظر بگیرید [۱]:

$$\begin{cases} y_1''(x) = \cosh(x) - \frac{1}{4} \sinh^2(x) - \frac{1}{6} x^4 - \frac{1}{4} x^2 + \int_0^x ((x-t)y_1'(t) + (x-t)y_2'(t))dt, \\ y_2''(x) = -(1-4x) \cosh(x) + 8 \sinh(x) - 4x + \int_0^x ((x-t)y_1'(t) - (x-t)y_2'(t))dt, \\ y_1(\circ) = 1, y_1'(\circ) = 1, y_2(\circ) = -1, y_2'(\circ) = 1. \end{cases}$$

دستگاه فوق با استفاده از روش توضیح داده شده بر اساس موجک لژاندر حل شده است و جواب تقریبی به ازای  $M = 8$  و  $k = 2$  بدست آمده است. خطای  $L_2$  حاصل از این تقریب در نقاط متساوی الفاصله از بازه  $[0, 1]$  در جدول ۱ نشان داده شده است. هم چنین خطای جواب بدست آمده از روش موجک بی اسپلین [۵، ۶] در جدول ۱ آمده است. همان طور که از جدول مشخص است، جواب بدست آمده از روش موجک لژاندر در مقایسه با روش موجک بی اسپلین از دقت قابل ملاحظه ای برخوردار است.

جدول ۱. خطای مطلق بدست آمده توسط روش موجک لژاندر و روش موجک بی اسپلین برای مثال ۱۰۵

$x$	روش موجک لژاندر		روش موجک بی اسپلین	
	$y_1(x)$	$y_2(x)$	$y_1(x)$	$y_2(x)$
۰	$4.69155 \times 10^{-11}$	$4.69159 \times 10^{-11}$	$1.22177 \times 10^{-4}$	$1.22177 \times 10^{-4}$
۰/۱	$3.6593 \times 10^{-13}$	$3.65152 \times 10^{-13}$	$3.92678 \times 10^{-5}$	$3.92671 \times 10^{-5}$
۰/۲	$2.40918 \times 10^{-13}$	$2.43361 \times 10^{-13}$	$1.49084 \times 10^{-5}$	$1.49195 \times 10^{-5}$
۰/۳	$2.367 \times 10^{-13}$	$2.44027 \times 10^{-13}$	$4.06007 \times 10^{-5}$	$4.06552 \times 10^{-5}$
۰/۴	$3.85914 \times 10^{-13}$	$3.68039 \times 10^{-13}$	$3.64909 \times 10^{-5}$	$3.66545 \times 10^{-5}$
۰/۵	$5.82778 \times 10^{-11}$	$5.82324 \times 10^{-11}$	$3.42951 \times 10^{-7}$	$2.43668 \times 10^{-8}$
۰/۶	$5.1581 \times 10^{-13}$	$4.55191 \times 10^{-13}$	$4.04541 \times 10^{-5}$	$4.11247 \times 10^{-5}$
۰/۷	$2.05169 \times 10^{-13}$	$3.06866 \times 10^{-13}$	$4.86185 \times 10^{-5}$	$4.96506 \times 10^{-5}$
۰/۸	$1.47882 \times 10^{-13}$	$3.16414 \times 10^{-13}$	$1.83757 \times 10^{-5}$	$1.97573 \times 10^{-5}$
۰/۹	$7.10543 \times 10^{-13}$	$4.46421 \times 10^{-13}$	$5.80461 \times 10^{-5}$	$5.64004 \times 10^{-5}$

### مراجع

1. J. Biazar, H. Ghazvini, M. Eslami, *He's homotopy perturbation method for systems of integro-differential equations*, Chaos, Solitons Fractals 39 (2009) 1253–1258.
2. C.K. Chui, *Wavelets, a mathematical tool for signal analysis*, in: SIAM Monographs on Mathematical Modeling and Computation, SIAM, Pennsylvania, 1997.
3. F. Mohammadi, M.M. Hosseini, *A new Legendre wavelet operational matrix of derivative and its applications in solving the singular ordinary differential equations*, J. Franklin Inst. 348 (2011) 1787–1796.
4. M. Razzaghi, S. Yousefi, *The Legendre wavelets operational matrix of integration*, Int. J. Syst. Sci. 32 (4) (2001) 495–502.
5. P.K. Sahu, S.S. Ray, *A new approach based on semi-orthogonal B-spline wavelets for the numerical solutions of the system of nonlinear Fredholm integral equations of second kind*, Comput. Appl. Math. (2013).
6. P.K. Sahu, S. Saha Ray, *Legendre wavelets operational method for the numerical solutions of nonlinear Volterra integro-differential equations system*, Appl. Math. Comput. 256 (2015) 715–723.
7. S.G. Venkatesh, S.K. Ayyaswamy, S.R. Balachandar, K. Kannan, *Wavelet solution for class of nonlinear integro-differential equations*, Indian J. Sci. Technol. 6 (2013) 4670–4677.

پست الکترونیکی: [majed.raisi@yahoo.com](mailto:majed.raisi@yahoo.com)  
پست الکترونیکی: [arabameri@math.usb.ac.ir](mailto:arabameri@math.usb.ac.ir)

## حل مسئله کنترل بهینه غیرخطی درجه دوم با استفاده از سری مودال

محبوبه زارعی\*

بخش ریاضی، دانشگاه حکیم سبزواری، سبزوار، خراسان رضوی، ایران  
و محمدعلی پرتانیان  
بخش ریاضی، دانشگاه حکیم سبزواری، سبزوار، خراسان رضوی، ایران

چکیده. در این مقاله روشی ابتکاری برای حل مسئله کنترل بهینه غیرخطی درجه دوم ارائه می‌دهیم. براین اساس با استفاده از اصل بیشینه پونتریاگین مسئله مقدار مرزی دونقطه ای بدست آورده و سپس با استفاده از سری مودال تبدیل به حل مسئله مقدار مرزی دونقطه ای زمان ثابت می‌کنیم. از این رو، جواب تقریبی را با استفاده از قضایای همگرایی ذکر شده بدست خواهیم آورد. برای نشان دادن کارایی، سادگی و دقت بالای روش مثال‌هایی را حل خواهیم کرد.  
واژه‌های کلیدی: کنترل بهینه؛ سیستم غیرخطی؛ اصل بیشینه پونتریاگین؛ شرایط بهینگی؛ سری مودال.  
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 49M37, 35G60, 35G20.

### ۱. مقدمه

یکی از مباحث اساسی در نظریه کنترل، کنترل بهینه سیستم‌های غیرخطی است. در حالت کلی برای حل این سیستم‌ها روش‌های روش مستقیم نظیر کمینه کردن تابع هدف و روش غیرمستقیم مانند بکار بردن شرایط بهینگی وجود دارد. در این مقاله با استفاده از روش غیرمستقیم ذکر شده به یافتن جواب می‌پردازیم.

### ۲. آنالیز روش

مسئله کنترل بهینه غیرخطی درجه دوم زیر را در نظر می‌گیریم

$$(1) \quad \begin{aligned} \min J &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \left[ x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t) \right] dt \\ \dot{x}(t) &= F(x(t)) + G(x(t)) u(t), \quad t \in [t_0, t_f] \\ x(t_0) &= x_0, \quad x(t_f) = x_f \end{aligned}$$

که در آن بردار حالت و بردار کنترل،  $x \in R^n$  و  $u \in R^m$  بردار کنترل،  $F: R^n \rightarrow R^n$  میدان برداری تحلیلی غیرخطی بطوری که  $F(0) = 0$  و  $G: R^n \rightarrow R^{n \times m}$  نگاهت تحلیلی غیرخطی،  $x_0 \in R^n$  حالت ابتدایی و  $x_f \in R^n$  حالت انتهایی،  $Q \in R^{n \times n}$  و  $R \in R^{m \times m}$  به ترتیب ماتریس‌های نیمه معین مثبت و معین مثبت هستند [۱]. با استفاده از اصل بیشینه پونتریاگین خواهیم داشت

$$(2) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= F(x(t)) - G(x(t)) R^{-1} G^T(x(t)) \lambda(t), \quad t \in [t_0, t_f] \\ \dot{\lambda}(t) &= -Q x(t) - \left( \frac{\partial F(x(t))}{\partial x(t)} \right)^T \lambda(t) + \begin{bmatrix} \lambda^T(t) \frac{\partial G(x(t))}{\partial x_1(t)} R^{-1} G^T(x(t)) \lambda(t) \\ \vdots \\ \lambda^T(t) \frac{\partial G(x(t))}{\partial x_n(t)} R^{-1} G^T(x(t)) \lambda(t) \end{bmatrix} \\ x(t_0) &= x_0, \quad x(t_f) = x_f \end{aligned}$$

که  $\lambda \in R^n$  بردار هم حالت و قانون کنترل بهینه توسط معادله

$$u^*(t) = -R^{-1} G^T(x(t)) \lambda(t), \quad t \in [t_0, t_f]$$

بدست می‌آید. توابع تحلیلی غیرخطی  $\Psi$  و  $\bar{\Psi}$  را به صورت

$$(3) \quad \begin{aligned} \Psi(x(t), \lambda(t)) &= F(x(t)) - G(x(t)) R^{-1} G^T(x(t)) \lambda(t) \\ \bar{\Psi}(x(t), \lambda(t)) &= -Q x(t) - \left( \frac{\partial F(x(t))}{\partial x(t)} \right)^T \lambda(t) + \begin{bmatrix} \lambda^T(t) \frac{\partial G(x(t))}{\partial x_1(t)} R^{-1} G^T(x(t)) \lambda(t) \\ \vdots \\ \lambda^T(t) \frac{\partial G(x(t))}{\partial x_n(t)} R^{-1} G^T(x(t)) \lambda(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

\* ارائه‌دهنده



در نظر می‌گیریم. باتوجه به روابط (۲) و (۳)، مسئله مقدارمرزی دونه‌ای

$$(۴) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = \Psi(x(t), \lambda(t)), & t \in [t_0, t_f] \\ \dot{\lambda}(t) = \bar{\Psi}(x(t), \lambda(t)), & t \in [t_0, t_f] \\ x(t_0) = x_0, \quad x(t_f) = x_f. \end{cases}$$

نتیجه می‌شود. از آنجا که (۴) غیرخطی می‌باشد، بطورکلی به روش تحلیلی نمی‌توان آن را حل کرد؛ لذا با استفاده از بسط سری تیلور چندجمله‌ای‌های غیرخطی حول نقطه عملیاتی  $(x^0, \lambda^0) = (x_0, \lambda_0) \in \Phi \times \Omega$ ؛ در صورتی که  $\Psi$  و  $\bar{\Psi}$  در (۳) چند جمله‌ای نباشند، می‌توان نوشت [۲]:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{10}x(t) + A_{01}\lambda(t) + \frac{1}{1!} \begin{pmatrix} x^T(t)H_{\lambda^0}^1x(t) \\ \vdots \\ x^T(t)H_{\lambda^0}^n x(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x^T(t)H_{\lambda^0}^1\lambda(t) \\ \vdots \\ x^T(t)H_{\lambda^0}^n \lambda(t) \end{pmatrix} + \frac{1}{1!} \begin{pmatrix} \lambda^T(t)H_{x^0}^1\lambda(t) \\ \vdots \\ \lambda^T(t)H_{x^0}^n \lambda(t) \end{pmatrix} + \dots \\ \dot{\lambda}(t) &= \bar{A}_{10}x(t) + \bar{A}_{01}\lambda(t) + \frac{1}{1!} \begin{pmatrix} x^T(t)\bar{H}_{\lambda^0}^1x(t) \\ \vdots \\ x^T(t)\bar{H}_{\lambda^0}^n x(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x^T(t)\bar{H}_{\lambda^0}^1\lambda(t) \\ \vdots \\ x^T(t)\bar{H}_{\lambda^0}^n \lambda(t) \end{pmatrix} + \frac{1}{1!} \begin{pmatrix} \lambda^T(t)\bar{H}_{x^0}^1\lambda(t) \\ \vdots \\ \lambda^T(t)\bar{H}_{x^0}^n \lambda(t) \end{pmatrix} + \dots \end{aligned}$$

که

$$\begin{cases} A_{10} = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_{\lambda=x^0}, & \bar{A}_{10} = \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x} \Big|_{\lambda=x^0} \\ A_{01} = \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=x^0}, & \bar{A}_{01} = \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=x^0} \\ H_{\lambda^0}^j = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \Big|_{\lambda=x^0}, & \bar{H}_{\lambda^0}^j = \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial x^2} \Big|_{\lambda=x^0} \\ H_{\lambda^0}^j = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \lambda \partial x} \Big|_{\lambda=x^0}, & \bar{H}_{\lambda^0}^j = \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \lambda \partial x} \Big|_{\lambda=x^0} \\ H_{x^0}^j = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \lambda^2} \Big|_{\lambda=x^0}, & \bar{H}_{x^0}^j = \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \lambda^2} \Big|_{\lambda=x^0}. \end{cases}$$

قضایای زیر تضمین‌کننده همگرایی یکنواخت به سمت جواب می‌باشند [۱].

**قضیه ۱۰۲.** جواب مسئله مقدار مرزی دو نقطه‌ای غیرخطی (۲)،  $x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i(t)$  و  $\lambda(t) = \sum_{i=1}^{\infty} h_i(t)$  می‌باشد که  $g_i(t)$  و  $h_i(t)$  از حل مسئله مقدار مرزی دو نقطه‌ای خطی زمان ثابت به صورت دنباله بازگشتی زیر حاصل می‌شود.

$$(۵) \quad \begin{aligned} \dot{g}_1(t) &= A_{10}g_1(t) + A_{01}h_1(t) \\ \dot{h}_1(t) &= \bar{A}_{10}g_1(t) + \bar{A}_{01}h_1(t) \end{aligned}$$

و به همین ترتیب

$$\begin{aligned} \dot{g}_2(t) &= A_{10}g_2(t) + A_{01}h_2(t) + \frac{1}{1!} \begin{bmatrix} g_1^T(t)H_{\lambda^0}^1g_1(t) \\ \vdots \\ g_1^T(t)H_{\lambda^0}^n g_1(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1^T(t)H_{\lambda^0}^1h_1(t) \\ \vdots \\ g_1^T(t)H_{\lambda^0}^n h_1(t) \end{bmatrix} + \frac{1}{1!} \begin{bmatrix} h_1^T(t)H_{x^0}^1h_1(t) \\ \vdots \\ h_1^T(t)H_{x^0}^n h_1(t) \end{bmatrix} \\ \dot{h}_2(t) &= \bar{A}_{10}g_2(t) + \bar{A}_{01}h_2(t) + \frac{1}{1!} \begin{bmatrix} g_1^T(t)\bar{H}_{\lambda^0}^1g_1(t) \\ \vdots \\ g_1^T(t)\bar{H}_{\lambda^0}^n g_1(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1^T(t)\bar{H}_{\lambda^0}^1h_1(t) \\ \vdots \\ g_1^T(t)\bar{H}_{\lambda^0}^n h_1(t) \end{bmatrix} + \frac{1}{1!} \begin{bmatrix} h_1^T(t)\bar{H}_{x^0}^1h_1(t) \\ \vdots \\ h_1^T(t)\bar{H}_{x^0}^n h_1(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(۶)

بایدست آوردن  $g_1(t)$  و  $h_1(t)$  از (۵)،  $g_2(t)$  و  $h_2(t)$  در (۶) بدست آمده و با ادامه این روند برای  $i \geq 2$ ،  $g_i(t)$  و  $h_i(t)$  حاصل می‌شود.

**قضیه ۲۰۲.** مسیر بهینه و قانون کنترل بهینه مسئله کنترل بهینه غیرخطی (۱) به صورت زیر می‌باشد

$$(۷) \quad \begin{cases} x^*(t) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i(t) \\ u^*(t) = -R^{-1}G^T \left( \sum_{i=1}^{\infty} g_i(t) \right) \left( \sum_{i=1}^{\infty} h_i(t) \right) \end{cases}$$

قضیه ۳.۲. دنباله های  $\{x^{(k)}(t)\}_{k=1}^{\infty}$ ،  $\{\lambda^{(k)}(t)\}_{k=1}^{\infty}$  و  $\{u^{(k)}(t)\}_{k=1}^{\infty}$  را به صورت

$$\begin{cases} x^{(k)}(t) = \sum_{i=1}^k g_i(t) \\ \lambda^{(k)}(t) = \sum_{i=1}^k h_i(t) \\ u^{(k)}(t) = -R^{-1}G^T(x^{(k)}(t))\lambda^{(k)}(t). \end{cases}$$

در نظر می گیریم. بنابراین برای مسئله کنترل بهینه غیرخطی (۱) دنباله های  $\{x^{(k)}(t)\}_{k=1}^{\infty}$  و  $\{u^{(k)}(t)\}_{k=1}^{\infty}$  به ترتیب همگرای یکنواخت به مسیر بهینه و قانون کنترل بهینه هستند.

برای بدست آوردن جواب تقریبی  $N$  جمله از (۷) به صورت

$$(8) \quad u_N(t) = -R^{-1}G^T\left(\sum_{i=1}^N g_i(t)\right)\left(\sum_{i=1}^N h_i(t)\right).$$

انتخاب می کنیم. پس از جایگذاری (۸) در (۱)، می توان نوشت:

$$(9) \quad J^{(N)} = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (x^T(t)Qx(t) + u_N^T(t)Ru_N(t))dt$$

چنانچه برای هر دو مقدار مثبت  $e_1 > 0$  و  $e_2 > 0$  شرایط

$$\left| \frac{J^{(N)} - J^{(N-1)}}{J^{(N)}} \right| < e_1, \quad \|x(t_f) - x_f\| < e_2$$

داشته باشیم؛  $N$ -امین مرتبه قانون کنترل زیربهینه دقت موردنظر را دارا می باشد. همچنین اگر محدوده خطای  $e_1 > 0$  و  $e_2 > 0$  به اندازه کافی کوچک انتخاب شوند،  $N$ -امین مرتبه قانون کنترل زیربهینه بسیار نزدیک به قانون کنترل بهینه  $u^*(t)$  می شود، لذا کنترل بهینه غیرخطی درجه دوم در (۹) بسیار نزدیک به مقدار بهینه  $J^*$  خواهد بود و شرایط مرزی قویا برقرار می باشد.

### ۳. مثال های عددی

مثال ۱۰.۳. کنترل بهینه غیرخطی [۳]

$$\begin{aligned} \text{Min } J &= \int_0^1 u^2(t)dt \\ \text{s.t. : } \dot{x}(t) &= 0.5x^2(t)\sin(x(t)) + u(t), \quad t \in [0, 1] \\ x(0) &= 0, \quad x(1) = 0.5 \end{aligned}$$

را براساس اصل بیشینه پونتریاگین، شرایط بهینگی، تبدیل به مسئله مقدار مرزی دونقطه ای غیرخطی

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= 0.5x^2(t)\sin(x(t)) - 0.5\lambda(t) \\ \dot{\lambda}(t) &= -\lambda(t)x(t)\sin(x(t)) \\ &\quad - 0.5\lambda(t)x^2(t)\cos(x(t)) \\ x(0) &= 0, \quad x(1) = 0.5 \end{aligned} \quad (10)$$

شده و قانون کنترل بهینه  $u^*(t) = -0.5\lambda(t)$  است. بر اساس روش جدید، به جای حل مستقیم (۱۰)، دنباله ی مسئله مقدار مرزی دونقطه ای خطی زمان ثابت به صورت بازگشتی حاصل می شود که:

$$\begin{aligned} \text{از حل دستگاه} \quad \begin{cases} g_1(t) = 0.5(t) \\ h_1(t) = -1 \end{cases} \quad \text{خواهیم داشت} \quad \begin{cases} \dot{g}_1(t) = -0.5h_1(t), \quad \dot{h}_1(t) = 0 \\ g_1(0) = 0, \quad g_1(1) = 0.5 \end{cases} \\ \text{واز} \quad \begin{cases} g_2(t) = 0 \\ h_2(t) = 0 \end{cases} \quad \text{نتیجه می شود} \quad \begin{cases} \dot{g}_2(t) = -0.5h_2(t), \quad \dot{h}_2(t) = 0 \\ g_2(0) = 0, \quad g_2(1) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{و همچنین از} \quad \begin{cases} g_3(t) = 0 \\ h_3(t) = 0.125t^3 \end{cases} \quad \text{داریم} \quad \begin{cases} \dot{g}_3(t) = -0.5h_3(t) + 0.5g_1^2(t), \quad \dot{h}_3(t) = -1.5h_1(t)g_1^2(t) \\ g_3(0) = 0, \quad g_3(1) = 0 \end{cases}$$

بنابراین فرم بسته  $u_5(t) = -0.5\sum_{i=1}^5 h_i(t) = \frac{0.95}{1792} - \frac{1}{16}t^3 + \frac{1}{384}t^5 + \frac{1}{3584}t^6$  با شرط توقف  $10^{-3} \times 2 = e_1$  و  $e_2 = 5 \times 10^{-5}$  پس از ۵ تکرار خاتمه می یابد. مقادیر تابع و خطا در جدول ۱ درج شده است.

جدول ۱. خطاهای مثال ۱.۳

تعداد تکرار	مقادیر تابع درجه دوم	خطای نسبی	خطای حالت انتهایی
$i$	$J^{(i)}$	$\left  \frac{J^{(i)} - J^{(i-1)}}{J^{(i)}} \right $	$\ x(t_f) - x_f\ $
۱	۰.۲۵	-	$۱.۶۰۱ \times ۱۰^{-۲}$
۲	۰.۲۵	۰	$۱.۶۰۱ \times ۱۰^{-۲}$
۳	۰.۲۳۴۹	$۶.۴۳ \times ۱۰^{-۲}$	$۴.۴۷۷ \times ۱۰^{-۴}$
۴	۰.۲۳۴۹	۰	$۴.۴۷۷ \times ۱۰^{-۴}$
۵	۰.۲۳۴۹	$۱.۳ \times ۱۰^{-۳}$	$۲.۸ \times ۱۰^{-۵}$

مثال ۲.۳. مدل جت جنگنده FA به صورت زیر در نظر می‌گیریم [۴]

$$\text{Min } J = \int_0^1 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 10u^2) dt$$

$$s.t : x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0$$

$$x_1(1) = 0.22, \quad x_2(1) = 0.25, \quad x_3(1) = 0.3.$$

پس از ۵ تکرار با خطای  $e_1 = 5 \times 10^{-3}$  و  $e_2 = 2 \times 10^{-4}$  مقادیر محاسبه و در جدول ۲ درج شده است.

جدول ۲. خطاهای مثال ۲.۳

تعداد تکرار	$J^{(i)}$	$\left  \frac{J^{(i)} - J^{(i-1)}}{J^{(i)}} \right $	$\ x(t_f) - x_f\ $
۱	۰.۲۴۹۷	-	$۱.۵۵ \times ۱۰^{-۲}$
۲	۰.۲۴۲۱	$۳.۱ \times ۱۰^{-۲}$	$۱.۲۲ \times ۱۰^{-۲}$
۳	۰.۲۳۸۱	$۱.۶ \times ۱۰^{-۲}$	$۱.۵۷ \times ۱۰^{-۳}$
۴	۰.۲۳۷۱	$۴.۲ \times ۱۰^{-۳}$	$۱.۰۴ \times ۱۰^{-۳}$
۵	۰.۲۳۶۵	$۲.۵ \times ۱۰^{-۳}$	$۱.۰۱ \times ۱۰^{-۴}$

۴. نتیجه

در این مقاله روشی برای حل دسته ای از مسائل کنترل بهینه غیرخطی با استفاده از فرایند بازگشتی، قانون کنترل بهینه، مسیر بهینه و روش غیرمستقیم در قالب سری های همگرای یکنواخت ارائه گردید. باتوجه به جدول ۱ و ۲ ملاحظه می‌شود که خطای نسبی با افزایش تکرار؛ روند کاهشی و خطا در انتها نیز نزولی است، چنانچه تعداد تکرارها افزایش یابد خطا به سمت صفر و بنابراین جواب تقریبی به جواب واقعی میل خواهدکرد. در مطالعات آینده تعمیم روش برای مسئله کنترل بهینه غیرخطی کلی تر را می‌توان مورد توجه قرار داد.

مراجع

1. A. Jajarmi, N.Pariz, A.V.Kamyad, and S.Effati, *A novel modal series representation approach to solve a class of nonlinear optimal control problems*, International Journal of Innovative Computing, Information and Control, vol. 7, no. 3, pp. 1413-1425, (2011).
2. G.Y.Tang, *Suboptimal control for nonlinear systems : a successive approximation approach* Systems Control Letters 54 429-434 (2005).
3. J. E. Rubio, *Control and Optimization*, the Linear Treatment of Nonlinear Problems, Manchester University Press, Manchester, (1986).
4. W. L. Garrard and J. M. Jordan, *Design of nonlinear automatic ight control systems*, Automatica, vol.13, no.5, pp.497-505, (1977).

پست الکترونیکی: mahbobezarei96@gmail.com  
پست الکترونیکی: partanian@hsu.ac.ir

## روش‌های عنصر متناهی توسعه‌یافته و گالرکین آزاد از عنصر اصلاح‌شده برای مساله مرز مشترک الاستیسیته

پریسا شاهی\*

دانشکده ریاضی، دانشگاه صنعتی شیراز، شیراز، ایران

آمنه طالعی

دانشکده ریاضی، دانشگاه صنعتی شیراز، شیراز، ایران

چکیده. در این مقاله قصد داریم دو روش عنصر متناهی توسعه‌یافته و گالرکین آزاد از عنصر اصلاح‌شده را برای مساله الاستیسیته با مرز مشترک بسته بررسی کنیم. روش عنصر متناهی توسعه‌یافته روشی مبتنی بر شبکه‌بندی است. در این روش یک شبکه‌بندی منظم بدون در نظر گرفتن مرز مشترک ایجاد می‌شود. سپس اطراف مرز مشترک، تقریب در المان‌ها اصلاح می‌گردد. روش گالرکین آزاد از عنصر اصلاح‌شده مشابه روش عنصر متناهی توسعه‌یافته است با این تفاوت که در تقریب تابع به جای درونیابی لاگرانژ از تقریب کمترین مربعات متحرک استفاده می‌شود و به همین دلیل یک روش بدون شبکه است. با ارائه نتایج عددی، به بررسی موثر بودن این روش‌ها برای حل مساله مرز مشترک الاستیسیته می‌پردازیم.

واژه‌های کلیدی: روش عنصر متناهی توسعه‌یافته، روش گالرکین آزاد از عنصر، مرز مشترک، تقریب کمترین مربعات متحرک، مساله الاستیسیته.

طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 35J15, 35J67, 65N30.

### ۱. تعریف مساله

مساله الاستیسیته خطی دو بعدی با دامنه  $\Omega$ ، مرز کراندار  $\partial\Omega$  و مرز مشترک  $\Gamma$  به فرم زیر را در نظر بگیرید

$$(1) \quad \nabla \cdot \sigma(\mathbf{u}) + \mathbf{b} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad [\mathbf{u}] = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad [\sigma(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}] = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma,$$

که در آن  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T$  بردار جابجایی و  $\mathbf{b} = (b_1, b_2)^T$  بردار نیروی خارجی است. همچنین تانسور تنش  $\sigma = (\sigma_{ij})$  ماتریسی  $2 \times 2$  و متقارن،  $\nabla$  عملگر گرادینان و  $\mathbf{n}$  بردار نرمال یکه مرز مشترک  $\Gamma$  می‌باشد [۵]. فرم ضعیف معادله (۱) با اعمال شرط مرزی به صورت زیر می‌باشد

$$(2) \quad \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{v}) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} d\Omega, \quad \sigma(\mathbf{u}) = \mathbf{C} : \varepsilon(\mathbf{u}), \quad \varepsilon(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T).$$

### ۲. اصلاح تقریب تابع

به طور کلی در روش‌های کلاسیک می‌توان تقریب تابع را به فرم زیر در نظر گرفت

$$(3) \quad u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I} u_i \phi_i(\mathbf{x}),$$

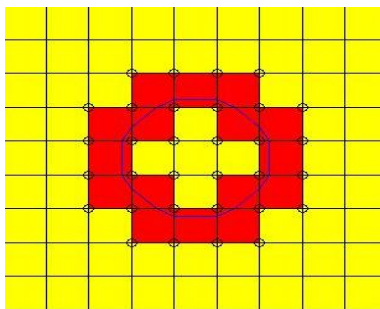
جاییکه  $I$  تعداد نقاط در دامنه و  $\phi_i$ ها توابع پایه می‌باشند. توابع پایه در روش عنصر متناهی معمولاً تابع درونیاب لاگرانژ و در روش گالرکین آزاد از عنصر نیز تقریب کمترین مربعات متحرک در نظر گرفته می‌شود. برای حل مساله با جواب‌های ناپیوسته می‌توان تقریب (۲) را به صورت زیر اصلاح کرد

$$(4) \quad u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I} \phi_i(\mathbf{x}) u_i + \sum_{i \in I^*} \phi_i(\mathbf{x}) \cdot \psi(\mathbf{x}) a_i,$$

به طوری که  $I^* \subset I$  مجموعه‌ای از نقاط ناپیوسته در نزدیکی مرز مشترک است. تابع اصلاحی  $\psi(\mathbf{x})$  می‌تواند بر اساس رفتار جواب نزدیک مرز مشترک به طور مناسب انتخاب گردد. به عنوان نمونه می‌توان تابع اصلاحی را به فرم زیر در نظر گرفت

$$(5) \quad \psi_{abs}(\mathbf{x}) = |\varphi(\mathbf{x})|,$$

\* ارائه‌دهنده



شکل ۱. شبکه‌بندی دامنه برای انتگرال‌گیری (تقریب در ناحیه قرمز رنگ اصلاح شده است).

به طوری که تابع سطح تراز  $\varphi(\mathbf{x})$  به صورت زیر است

$$\varphi(\mathbf{x}) = \pm \min_{X \in \Gamma} \|\mathbf{x} - X\|.$$

همچنین مؤسس برای بهتر شدن دقت جواب در روش عنصر متناهی توسعه‌یافته، به جای تابع اصلاحی (۵) فرم زیر را در نظر گرفت [۴]

$$(۶) \quad \psi_{Moes}(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I} |\varphi_i| N_i(\mathbf{x}) - \left| \sum_{i \in I} \varphi_i N_i(\mathbf{x}) \right|.$$

در رابطه (۴)، جمله اول همان تقریبی است که در روش‌های عنصر متناهی کلاسیک و گالرکین آزاد از عنصر در نظر گرفته می‌شود و جمله دوم به منظور اصلاح تقریب اضافه می‌گردد. برای حفظ خاصیت دلتای کرونکر در تقریب روش عنصر متناهی توسعه‌یافته با تابع اصلاحی (۵)، تقریب (۴) را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I} N_i(\mathbf{x}) u_i + \sum_{i \in I^*} N_i(\mathbf{x}) \cdot [\psi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x}_i)] a_i.$$

### ۳. تقریب کمترین مربعات متحرک

لنکستر در سال ۱۹۸۱ تقریب کمترین مربعات متحرک را در نظریه‌ی تقریب معرفی کرد. این تقریب در واقع توسعه‌ی روش شپارد بود که به منظور ساخت تقریب‌هایی هموار، متناظر با مجموعه‌ی مشخصی از نقاط دلخواه ارایه شد. در این روش تقریب تابع  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  در داده‌های مکانی  $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  به فرم زیر در نظر گرفته می‌شود

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \phi_i(\mathbf{x}) u_i,$$

که تابع پایه کمترین مربعات متحرک  $\phi_i(\mathbf{x})$  عبارت است از

$$\phi_i(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^m p_k(\mathbf{x}) [A^{-1}(\mathbf{x}) B(\mathbf{x})]_{ki},$$

به طوری که  $p(\mathbf{x})$  پایه‌ای برای فضای چندجمله‌ای‌های  $d$ -متغیره از مرتبه  $q$  می‌باشد و

$$A(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) p(\mathbf{x}_i) p^T(\mathbf{x}_i), \quad B(\mathbf{x}) = [w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) p(\mathbf{x}_1), w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) p(\mathbf{x}_2), \dots, w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) p(\mathbf{x}_n)].$$

تابع وزن از نوع اسپلاین مکعبی و به فرم زیر در نظر گرفته می‌شود

$$w(r) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4r^2 + 4r^3, & r < \frac{1}{3}, \\ \frac{4}{3} - 4r + 4r^2 - \frac{4}{3}r^3, & \frac{1}{3} \leq r \leq 1, \\ 0, & r > 1, \end{cases}$$

که در آن  $r = \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|}{d_i}$  است.

همچنین تقریب مشتق برای کمترین مربعات متحرک به صورت زیر می‌باشد

$$\phi_{i,l} = \sum_{j=1}^m (p_{j,l}[A^{-1}B]_{ji} + p_j[A^{-1}B]_{l,l} + A_{l,l}^{-1}[B]_{ji}),$$

که در آن  $A_{l,l}^{-1} = (A^{-1})_{l,l}$ ، نمایانگر مشتق معکوس ماتریس  $A$  نسبت به  $x_l$  و به فرم  $A_{l,l}^{-1} = -A^{-1}A_{,l}A^{-1}$  است.

#### ۴. روش عنصر متناهی توسعه‌یافته

در سال ۱۹۹۶ ملنک و بابوشکا با استفاده از روش عنصر متناهی و ایده افزایی از واحد، روش عنصر متناهی افزایی از واحد<sup>۱</sup> را مطرح کردند. پس از آن روش عنصر متناهی توسعه‌یافته توسط بلیتچکو و همکاران در سال ۱۹۹۹ مطرح شد [۶]. در واقع این روش بر اساس خواص افزایی از واحد و کاربرد مستقیمی از روش عنصر متناهی افزایی از واحد می‌باشد. در روش عنصر متناهی توسعه‌یافته، شبکه‌بندی مدل بدون در نظر گرفتن ناپیوستگی‌ها انجام می‌شود و سپس با کمک گرفتن از توابع اصلاحی مناسب، ناپیوستگی‌ها مدل می‌گردند. توابع اصلاحی، درجات آزادی اطراف ناپیوستگی یا به عبارت دیگر تعداد مجهول‌ها را افزایش داده و از این طریق ناپیوستگی داخل المان‌ها را مدل می‌کند. در این روش تقریب توابع کوششی و آزمون به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{j \in J} N_j(\mathbf{x})u_j + \sum_{j \in J^*} N_j(\mathbf{x}) \cdot \psi(\mathbf{x})a_j, \quad v^h(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I} N_i(\mathbf{x})v_i + \sum_{i \in I^*} N_i(\mathbf{x}) \cdot \psi(\mathbf{x})b_i,$$

که  $N_i$  و  $N_j$  توابع درونیاب خطی لاگرانژ می‌باشند. با قرار دادن توابع کوششی و آزمون در فرم ضعیف (۲) و اعمال شرایط پرش، سیستم خطی  $\mathbf{Kd} = \mathbf{F}$  حاصل می‌شود به طوری که

$$(7) \quad \mathbf{K}_{ij} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_i^T \mathbf{C} \mathbf{B}_j d\Omega, \quad \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \hat{\phi}_{i,x} & \circ \\ \circ & \hat{\phi}_{i,y} \\ \hat{\phi}_{i,y} & \hat{\phi}_{i,x} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_i = \int_{\Omega} \hat{\phi}_i \mathbf{b} d\Omega,$$

که در آن برای نقاطی که باید اصلاح شوند  $\hat{\phi}_i \equiv N_i \psi$ ، برای نقاطی که به اصلاح نیازی ندارند  $\hat{\phi}_i \equiv N_i$  و  $\mathbf{C}$  ماتریسی  $3 \times 3$  و وابسته به جنس جسم می‌باشد [۱].

#### ۵. روش گالرکین آزاد از عنصر اصلاح‌شده

روش گالرکین آزاد از عنصر در سال ۱۹۹۴ توسط بلیتچکو و همکاران ارایه شد [۲]. همچنین در سال ۱۹۹۷ روش گالرکین آزاد از عنصر اصلاح‌شده توسط فلمینگ و همکاران در بحث مکانیک شکست مطرح گردید [۳]. در روش گالرکین آزاد از عنصر، برای تقریب تابع تنها به مجموعه‌ای از گره‌های پخش شده درون دامنه و روی مرز مساله نیاز است و از ایجاد اتصالات بین گره‌ها بی‌نیاز می‌باشد. چرا که ارتباط بین گره‌ها طبق تابع وزن گره‌ای که محمل فشرده دارد، تعریف می‌شود. در این روش تقریب کمترین مربعات متحرک، فاقد خاصیت دلتای کروکر می‌باشد. بنابراین بر خلاف روش عنصر متناهی، شرایط مرزی دریکله مستقیم اعمال نمی‌شود. لذا برای اعمال این شرایط، از روش ضرایب لاگرانژ استفاده می‌کنیم. در این روش برای ساخت دستگاه معادلات نهایی، از انتگرال‌گیری استفاده می‌شود و برای این منظور به شبکه‌بندی دامنه مساله نیاز می‌باشد. به همین جهت شاید نتوان این روش را یک روش کاملاً بدون شبکه در نظر گرفت. فرم ضعیف (۲) با اعمال روش ضرایب لاگرانژ به صورت زیر می‌باشد:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} d\Omega - \int_{\partial\Omega} \delta \lambda^T (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) d\Gamma - \int_{\partial\Omega} \lambda^T \delta (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) d\Gamma = 0.$$

رابطه فوق را می‌توان به شکل ماتریسی  $\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix}$  نوشت. که در آن  $\mathbf{K}$  و  $\mathbf{F}$  مشابه (۷) تعریف می‌شود و

$$\mathbf{G}_{ij}^T = - \int_{\partial\Omega} \mathbf{N}_i \Phi_j d\Gamma, \quad \Phi_i = \begin{bmatrix} \phi_i & \circ \\ \circ & \phi_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} N_i & \circ \\ \circ & N_i \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{q}_i = - \int_{\partial\Omega} \mathbf{N}_i \bar{\mathbf{u}} d\Gamma, \quad \lambda = \sum_{i=1}^{n_\lambda} N_i \lambda_i, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega.$$

## ۶. نتایج عددی

مساله الاستیسیته در صفحه مربعی  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  با مرز مشترک بسته دایره‌ای به مرکز  $(0, 0)$  و شعاع  $0.4$  در نظر گرفته شده است. بردار جابجایی در هر نقطه می‌تواند به صورت  $\mathbf{u} = (u_r, u_\theta)$  نوشته شود به طوری که مولفه شعاعی از جابجایی  $u_\theta$  و مولفه محیطی می‌باشد. همچنین جواب تحلیلی این مساله با در نظر گرفتن  $\alpha = \frac{4(\lambda^+ + \mu^- + \mu^+)}{(\lambda^+ + \mu^+)a^2 + (\lambda^- + \mu^-)(4 - a^2) + 4\mu^+}$  به صورت زیر می‌باشد [۴]

$$u_r(r, \theta) = \begin{cases} [(1 - \frac{r}{a^2})\alpha + \frac{r}{a^2}]r, & \Omega^-, \\ (r - \frac{r}{a^2})\alpha + \frac{r}{a^2}, & \Omega^+, \end{cases} \quad u_\theta(r, \theta) = 0.$$

در تمام محاسبات، پارامترهای مواد به صورت  $(E^+, \nu^+) = (10, 0.3)$  و  $(E^-, \nu^-) = (1, 0.25)$  می‌باشند.

جدول ۱. مقایسه روش‌های عنصر متناهی توسعه‌یافته با تابع اصلاحی (۵) (روش ۱)، عنصر متناهی توسعه‌یافته با تابع اصلاحی (۶) (روش ۲) و گالرکین آزاد از عنصر اصلاح‌شده با تابع اصلاحی (۵) (روش ۳) با تعداد نقاط ۱۰۰

روش ۳	روش ۲	روش ۱	
$1/3324 \times 10^{-1}$	$2/7056 \times 10^{-2}$	$4/6919 \times 10^{-2}$	خطا
$4/087371$	$0/545369$	$0/530264$	زمان محاسبه (ثانیه)

جدول ۲. مقایسه روش‌های عنصر متناهی توسعه‌یافته با تابع اصلاحی (۵) (روش ۱) و عنصر متناهی توسعه‌یافته با تابع اصلاحی (۶) (روش ۲) با تعداد نقاط مختلف

تعداد نقاط	روش ۱ خطا زمان محاسبه (ثانیه)	روش ۲ خطا زمان محاسبه (ثانیه)
$20 \times 20$	$4/1251 \times 10^{-2}$ ۱/۲۷۱۱۷۰	$9/4042 \times 10^{-3}$ ۱/۲۲۲۶۷۴
$45 \times 45$	$2/5523 \times 10^{-2}$ ۷/۴۲۷۴۹۸	$2/3508 \times 10^{-3}$ ۷/۳۱۶۱۶۵
$75 \times 75$	$1/6343 \times 10^{-2}$ ۳۶/۱۸۴۱۳۸	$1/1210 \times 10^{-3}$ ۳۶/۵۹۹۵۶۶
$100 \times 100$	$1/1200 \times 10^{-2}$ ۹۹/۳۷۰۲۵۱	$6/1362 \times 10^{-4}$ ۹۶/۲۳۹۱۳۰

جدول (۱) خطای مطلق و زمان محاسبات در روش عنصر متناهی توسعه‌یافته با دو تابع اصلاحی (۵) و (۶) و روش گالرکین آزاد از عنصر اصلاح‌شده با تابع اصلاحی (۵) را نمایش می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌کنیم زمان محاسبه در روش عنصر متناهی توسعه‌یافته به مراتب کمتر از زمان محاسبه در روش گالرکین آزاد از عنصر اصلاح‌شده است، در حالی که نتایج دقیق‌تری را به دست می‌آوریم. این محاسبات برای ۱۰۰ نقطه در شبکه‌بندی یکنواخت در نظر گرفته شده است. همچنین در جدول (۲) نتایج حاصل از اعمال توابع اصلاحی (۵) و (۶) برای تعداد نقاط مختلف در روش عنصر متناهی توسعه‌یافته گزارش شده است. در جدول‌های (۱) و (۲) مشاهده می‌کنیم که تابع اصلاحی (۶) نتایج دقیق‌تری را نشان می‌دهد.

## مراجع

1. F.n. Bai, D.M. Li, J.F. Wang and Y.M. Cheng, *An improved complex variable element-free Galerkin method for two-dimensional elasticity problems*, Chin. Phys. B. 21 (2012), no. 2, 020204-1(10).
2. T. Belytschko, Y.Y. Lu and L. Gu, *Element-free Galerkin methods*, Internat. J. Numer. Methods Engrg. 37 (1994), no. 2, 229–256.
3. M. Fleming, Y.A. Chu, B. Moran and T. Belytschko, *Enriched element-free Galerkin methods for crack tip fields*, Internat. J. Numer. Methods Engrg. 40 (1997), no. 8, 1483–1504.
4. T.P. Fries, T. Belytschko, *The extended/generalized finite element method: an overview of the method and its applications*, Internat. J. Numer. Methods Engrg. 84 (2010), no. 3, 253–304.
5. R. Guo, T. Lin and Y. Lin, *Approximation capabilities of immersed finite element spaces for elasticity interface problems*, Numer. Methods Partial Differential Equations 35 (2019), no. 3, 1243–1268.
6. N. Moes, J. Dolbow and T. Belytschko, *A finite element method for crack growth without remeshing*, Internat. J. Numer. Methods Engrg. 46 (1999), no. 1, 131–150.

پست الکترونیکی: [p.shahedi@sutech.ac.ir](mailto:p.shahedi@sutech.ac.ir)

پست الکترونیکی: [a.taleei@sutech.ac.ir](mailto:a.taleei@sutech.ac.ir)

## حل دستگاه معادلات انتگرو-دیفرانسیل ولترا-فردهلم خطی با استفاده از چندجمله ای های برنشتاین و بسل

جواد شریف پیرانی \*

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه حکیم سبزواری، سبزوار، ایران

و امین رفیعی

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه حکیم سبزواری، سبزوار، ایران

چکیده. در این مقاله به ارائه یک روش مستقیم و موثر برای حل یک سیستم خطی از معادلات انتگرو-دیفرانسیل ولترا-فردهلم می پردازیم. با تقریب تابع مجهول و استفاده از ماتریس های عملیاتی انتگرال، مشتق و حاصل ضرب متناظر با پایه برنشتاین و به کار بردن نقاط هم محلی، دستگاه معادلات انتگرو-دیفرانسیل ولترا-فردهلم را به یک دستگاه معادلات جبری خطی تبدیل می کنیم. در پایان، به منظور بررسی دقت و کارایی روش پیشنهادی مثال عددی ارائه شده است. در نهایت با مقایسه نتایج عددی به دست آمده با جواب های دقیق، اعتبار این روش برای حل این نوع معادلات مورد تایید قرار گرفته است.

واژه های کلیدی: چند جمله ای های برنشتاین، چند جمله ای های بسل، معادلات انتگرال ولترا، معادلات انتگرال فردهلم، معادلات انتگرو-دیفرانسیل ولترا-فردهلم.

طبقه بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 13D45, 39B42

## ۱. پیش گفتار

سیستم معادلات انتگرو دیفرانسیل نقش مهمی در زمینه های علوم و مهندسی دارند. بعضی از مسائل مربوط به نظریه الکترومغناطیسی منجر به مسئله حل معادلات انتگرو دیفرانسیل می شود برای تعیین مدل رقابت بین سلول های تومور و سیستم ایمنی، از یک دستگاه غیر خطی معادلات انتگرو دیفرانسیل با مقدار اولیه استفاده می شود. در یک مسئله غیر خطی با امواج مایع، به یک سیستم معادلات انتگرو دیفرانسیل کاهش یافته است. در این مقاله به حل سیستم خطی مرتبه بالا انتگرو-دیفرانسیل ولترا-فردهلم به فرم زیر می پردازیم.

$$\sum_{\theta=0}^m \sum_{j=1}^k g_{ij}(x) U_j^{(\theta)}(x) - \int_0^x \sum_{j=1}^k K_{ij}(x, s) U_j(s) ds - \int_0^1 \sum_{j=1}^k F_{ij}(x, s) U_j(s) ds = f_i(x) \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (1)$$

 $0 \leq x, s < 1$  و با شرایط اولیه

$$\sum_{\theta=0}^{m-1} (a_{i,j}^n g_n^{(\theta)}(a) + b_{i,j}^n g_n^{(\theta)}(b)) = c_{n,i} \quad i = 0, 1, \dots, m-1 \quad n = 1, 2, \dots, k$$

## ۲. چند جمله ای های برنشتاین

چند جمله ای های برنشتاین درجه  $n$  به صورت زیر تعریف می شوند:

$$B_{i,n}(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} = \sum_{k=0}^{n-i} (-1)^k \binom{n}{i} \binom{n-i}{k} x^{i+k} \quad (2)$$

همچنین بردار برنشتاین به صورت  $\phi(x) = A \Delta_n(x)$  که  $A$  ماتریس ضرایب و  $\Delta_n(x) = [1, x, \dots, x^n]^T$  است [۱].۱.۲. تقریب توابع. هر تابعی مانند  $f \in L^2[0, 1]$  را می توان با استفاده از چند جمله ای برنشتاین بصورت زیر تقریب زد:

$$f(x) \simeq \sum_{i=0}^n C_i B_{i,n}(x) = C^T \phi(x)$$



که  $\phi(x)$  چند جمله ای برنشتاین و  $C$  بردار ضرایب می باشد و همچنین تقریب هر تابع دو متغیره  $k(x, s)$  با استفاده از چند جمله ای های برنشتاین به صورت زیر می باشد:

$$K(x, s) = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^n K_{ij} B_{i,n}(x) B_{j,n}(s) = \phi^T(x) K \phi(s)$$

۲.۲. ماتریس عملیاتی متناظر با پایه برنشتاین. اگر  $\phi(x)$  بردار چندجمله ای های برنشتاین باشد آنگاه ماتریس عملیاتی انتگرال  $\phi(x)$  به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\int_0^x \phi(x) dx \simeq P \phi(x)$$

که  $P_{(n+1)(n+1)}$  ماتریس عملیاتی انتگرال چند جمله ای های برنشتاین می باشد که  $p = AMX_p$  و  $A$  ماتریس ضرایب برنشتاین  $M = [1, 2, \dots, \frac{1}{n+1}]^T$  و  $X_p = [x, x^2, \dots, x^{n+1}]$  می باشد [۱].

۳.۲. ماتریس عملیاتی مشتق. با مشتق گرفتن از بردار چند جمله ای برنشتاین خواهیم داشت:  $\phi'(x) \simeq D \phi(x)$  که  $D$  ماتریس عملیاتی مشتق چندجمله ای های برنشتاین می باشد. همچنین ماتریس عملیاتی مشتق مرتبه  $n$  این چند جمله ای به صورت زیر تقریب زده می شود: [۱]

$$U^{(n)}(x) \simeq U^T \phi(x) \simeq U^T D^n \phi(x)$$

۴.۲. ماتریس عملیاتی ضرب. اگر  $C^T$  یک بردار  $1 \times m$  و  $\phi(x)$  بردار چند جمله ای های برنشتاین باشد آنگاه داریم:  $C^T \phi(x)^T \phi(x) = \hat{C}^T \phi(x)^T \hat{C}$  که  $\hat{C}_{(n+1)(n+1)}$  می باشد [۱].

### ۳. آنالیز روش

با تقریب زدن قسمت های مختلف دستگاه (۱) خواهیم داشت:

$$I_1 = \sum_{\theta=0}^m \sum_{j=1}^k g_{ij}^{(\theta)}(x) U_j^{(\theta)}(x) \simeq \sum_{\theta=0}^m \sum_{j=1}^k g_{ij}^{(\theta)}(x) U_j^{(\theta)} D^{(\theta)} \phi(x) \quad i = 1, 2, \dots, k$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^x K_{ij}(x, s) U_j(s) ds \simeq \int_0^x \phi^T(x) K_{ij} \phi(s) \phi(s)^T U_j ds \\ &= \phi^T(x) K_{ij} \int_0^x \phi(s)^T U_j(s) ds = \phi^T(x) K_{ij} \hat{U}_j^T \int_0^x \phi(s) ds = \phi^T(x) K_{ij} \hat{U}_j^T P \phi(s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^1 f_{ij}(x, s) U_j(s) ds \simeq \int_0^1 \phi^T(x) F_{ij} \phi(s) \phi(s)^T U_j ds \\ &= \phi^T(x) F_{ij} \left( \int_0^1 \phi(s) \phi(s)^T ds \right) U_j = \phi^T(x) F_{ij} Q U_j \end{aligned}$$

که  $Q_{(n+1)(n+1)} = [Q_{ij}]$  می باشد و  $Q_{ij} = \frac{\binom{n}{i} \binom{n}{j}}{\binom{n+1}{i+j}}$  به دست می آید. حال با قرار دادن تقریب های  $I_1, I_2, I_3$  در دستگاه (۱) داریم:

$$\begin{aligned} (3) \quad \sum_{\theta=0}^m \sum_{j=1}^k g_{ij}(x) U_j^T(x) D^{(\theta)} \phi(x) - \sum_{j=1}^k \phi^T(x) k_{ij} \hat{U}_j^T P \phi(x) - \sum_{j=1}^k \phi^T(x) F_{ij} \phi U_j &= f(x) \\ i = 1, 2, \dots, k, \quad 0 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

و شرایط معادله به صورت زیر تقریب زده می شود:

$$\sum_{\theta=0}^{m-1} \left[ \alpha_{r,n}^i U_j^T D^{(\theta)}(\circ) + \beta_{r,n}^i U_j^T D^n \phi(1) + \gamma_{r,n}^i U_j^T D^n \phi(\Im) \right] = \delta_r^i, \quad r = 1, 2, \dots, m, \quad 0 \leq \Im \leq 1$$

اکنون با قرار دادن نقاط هم محلی نیوتون کاتس  $km$  -  $k(n+1) - km$  و تعداد  $km$  شرط اولیه، دستگاه به یک دستگاه جبری خطی تبدیل می شود که با حل این دستگاه و بدست آوردن ضرایب مجهول یک جواب تقریبی برای دستگاه (۱) خواهیم داشت.

#### ۴. چند جمله ای های بسل

چند جمله ای های بسل نوع اول به صورت زیر تعریف می شود :

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{N-n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} \quad n \in N \quad 0 \leq x \leq \alpha$$

هر تابعی مانند  $y_j^{(i)}$  را با استفاده از چند جمله ای های بسل به صورت

$$y_j^{(i)}(x) = j^{(i)}(x)A_j = X^i(x)D^T A_j = X(x)(B^T)^i D^T A_j$$

تقریب زده می شود که  $D$  و  $B^{(i)}$  ماتریس  $(n+1)(n+1)$  و  $A_j$  بردار ضرایب چند جمله ای و  $X(x) = [1, x, \dots, x^n]$  [۲]. هر تابع دو متغیره مانند  $k(x, t)$  با استفاده از بسط تیلور به صورت زیر تقریب زده می شود:

$$(۴) \quad k(x, t) = \sum_{m=0}^N \sum_{r=0}^N K_{mr} x^m t^r = X(x) K_T^{ij} X^T(t)$$

همچنین توابع دو متغیره با استفاده از توابع بسل به صورت زیر بسط داده می شود.

$$(۵) \quad K(x, t) = J(x) K_B^{ij} J^T(t)$$

با استفاده از رابطه (۴) و (۵) داریم :

$$K_T^{ij} = D^T K_B^{ij} D$$

در نتیجه برای هر تابع

$$K_{ij}(x, t) = X(x) D^T K_B^{ij} D X^T(t)$$

حال با استفاده از چند جمله ای های بسل معادله اصلی به صورت

$$I_i(x) = \int_a^b \sum_{j=1}^k X(x) D^T K_{\mathfrak{S}}^{ij} D X^T(t) X(t) D^T A_j dt$$

$$\sum_{j=1}^k X(x) D^T K_{\mathfrak{S}}^{ij} D \int_a^b F^T(t) X(t) dt D A_j = \sum_{j=1}^k X(x) D^T K_{\mathfrak{S}}^{ij} D Q D^T A_j$$

تقریب زده می شود که در آن  $Q$  یک ماتریس  $(n+1)(n+1)$  به صورت

$$Q[Q_{ij}] = Q_{ij} = \frac{b^{i+j+1} - a^{i+j+1}}{i+j+1} \quad i, j = 0, 1, \dots, N$$

بدست می آید همچنین  $V_i(t)$  مانند  $I_i(t)$  به صورت زیر تقریب زده می شود.

$$V_i(x) = \int_a^x K'(x, t) y(t) dt = \sum_{j=1}^k X(x) D^T K_B^{ij} D Q(x) D^T A_i \quad , \quad Q(x) = \int_a^x X^T(t) X(t) dt = [q_{ij}(x)]$$

که

$$q_{ij}(x) = \frac{x^{i+j+1} - a^{i+j+1}}{i+j+1}, \quad i, j = 0, 1, \dots, N$$

$$\sum_{n=0}^m \sum_{j=1}^k P_{ij}(x) y_j^{(n)}(x) = \sum_{n=0}^m \sum_{j=1}^k P_{ij}(x) X(x) B^{(i)} D A_i$$

اکنون با قرار دادن تقریب های فوق در دستگاه (۱) داریم:

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^k P_{ij}(x) X(x) B^{(i)} D A_i - \sum_{j=1}^k X(x) D^T K_B^{ij} D(x) D^T A_j - \sum_{j=1}^k X(x) D^T K_B^{ij} D(x) D^T A_j = g_i(x)$$

و شرایط اولیه دستگاه به صورت

$$V = \sum_{j=0}^{m-1} \left[ a_{is} X(b) B' D^T A_i + b_{ij} X(x) B' D^T A_j \right] = h_i \quad i = 0, 1, \dots, m-1, \quad n = 1, 2, \dots, k$$

تقریب زده می شود و با قرار دادن نقاط هم محلی دستگاه (۱) به یک دستگاه معادلات جبری خطی تبدیل شده که با حل این دستگاه یک جواب تقریبی برای این معادله به دست می آید.

مثال ۱۰۴. معادله زیر را در نظر بگیرید:

$$(6) \quad \begin{cases} y_1^{(1)}(x) + Y_2(X) = 1 + x + x^2 + \int_0^x [-y_1(t) - y_2(t)] dt & 0 \leq x, t \leq 1 \\ y_2(2)(x) - y_1(x) = -1 - x + \int_0^x [-y_1(t) - y_2(t)] dt \end{cases}$$

جدول ۱

x	برنشتاین		بسل	
	خطای مطلق $y_1(t)$ n=7	خطای مطلق $y_2(t)$ n=7	خطای مطلق $y_1(t)$ n=7	خطای مطلق $y_2(t)$ n=7
0	$9.0174 \times 10^{-1}$	$5.9892 \times 10^{-10}$	0	0
0.2	$3.3120 \times 10^{-3}$	$5.0754 \times 10^{-3}$	$3.053 \times 10^{-9}$	$2.0681 \times 10^{-9}$
0.4	$9.2837 \times 10^{-3}$	$1.9808 \times 10^{-2}$	$3.2758 \times 10^{-9}$	$1.6889 \times 10^{-9}$
0.6	$1.2034 \times 10^{-2}$	$4.1368 \times 10^{-2}$	$3.117 \times 10^{-9}$	$1.1459 \times 10^{-9}$
0.8	$6.6710 \times 10^{-3}$	$6.3459 \times 10^{-2}$	$2.4377 \times 10^{-9}$	$2.0071 \times 10^{-10}$
1	$1.7613 \times 10^{-3}$	$6.9835 \times 10^{-2}$	$0.4851 \times 10^{-8}$	$8.8769 \times 10^{-8}$

## ۵. نتیجه گیری

در این مقاله به حل دستگاه معادلات را با دو روش چند جمله ای های برنشتاین و چندجمله ای های بسل (به کمک نرم افزار متلب) پرداخته و با توجه به جدول ۱ مشاهده می نمایم که حل این دستگاه با استفاده از چند جمله ای های بسل بسیار دقیق تر از روش حل با استفاده از چند جمله ای های برنشتاین می باشد.

## مراجع

- [1] Maleknejad, K., Basirat, B., Hashemizadeh, E., A Bernstein operational matrix approach for solving a system of high order linear Volterra–Fredholm integrodifferential equations, Mathematical and Computer Modeling 55 (2012) 1363–1372
- [2] suayip yuzbasl, Numerical solutions of system of linear Fredholm–Volterra integro-differential equations by the Bessel collocation method and error estimation, Applied Mathematics and Computation 250 (2015) 320–338

پست الکترونیکی: [shahramsharifi274@gmail.com](mailto:shahramsharifi274@gmail.com)

پست الکترونیکی: [rafiei.am@gmail.com](mailto:rafiei.am@gmail.com)

## پایداری بهینه‌سازی شده روش‌های رونگه-کوتا ضمنی با نویز جمعی

نیلوفر صالحی مکاری\*

گروه ریاضی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران

و سید محمد حسینی

دانشکده ریاضی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران

چکیده. معادلات دیفرانسیل تصادفی اغلب در مسیر خود دارای تغییرات بزرگی هستند که این تغییرات با نام سختی‌مسیری (pathwise stiffness) شناخته می‌شوند. برای برطرف نمودن این مشکل معادلات دیفرانسیل تصادفی راهکارهایی ارائه شده است. از میان تکنیک‌های موجود می‌توان به پایداری بهینه‌سازی شده (Optimized-stability) روش‌های مرتبه بالا برای معادلات دیفرانسیل تصادفی اشاره نمود. در این مقاله، تعمیمی از روش‌های رونگه-کوتا ضمنی به فرم روش‌های رونگه-کوتا تصادفی با نویز جمعی برای حفظ پایداری روش ارائه شده است. نتایج عددی مرتبط با روش‌ها نیز ارائه گردیده است.

واژه‌های کلیدی: معادلات دیفرانسیل تصادفی، رونگه-کوتا صریح-ضمنی، پایداری بهینه‌سازی شده، تابع پایداری. طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 39A50, 34k20.

## ۱. پیش‌گفتار

مدل‌های معادلات دیفرانسیل تصادفی در حوزه‌های مختلف همچون زیست‌شناسی، شیمی، مکانیک، اقتصاد، پزشکی، ریاضی، نجوم و ... مورد استفاده قرار می‌گیرد. از آنجایی که این نوع معادلات می‌توانند رفتارهایی را که در معادلات دیفرانسیل معمولی قابل مشاهده نیستند را نمایش بدهند، بیشترین توجه را به خود جلب می‌کنند. برای حل این نوع از معادلات سخت، از روش‌های صریح استفاده نمی‌گردد، زیرا که این روش‌ها محدودیت‌هایی را برای طول‌گام مورد انتظار در پایداری ایجاد می‌کنند که در نتیجه، روش کارایی خوبی را نخواهد داشت. اگرچه روش‌های ضمنی نسبت به روش‌های دیگر دارای ناحیه پایداری بزرگتری می‌باشند اما هزینه محاسباتی در استفاده از این روش‌ها افزایش می‌یابد. در حالت کلی، حل‌کننده‌های ضمنی و صریح برای حل این نوع از معادلات دیفرانسیل تصادفی با سختی مسیری به صورت پایدار عمل نمی‌کنند و در نتیجه این روش‌ها برای این نوع از معادلات سخت کارآمد نیستند. هدف از این پژوهش تعمیم روش‌های عددی رونگه-کوتا ضمنی برای رفع سختی‌مسیری این معادلات است به‌گونه‌ای که برای مسائل بزرگ‌تر کارآمدتر باشند و در عین حال بتوانند ویژگی‌های پایداری را حفظ کنند.

## ۲. مفاهیم

فرض کنید که  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  یک فضای احتمال کامل با فیلتر  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq t_0}$  روی بازه‌ی زمانی متناهی  $\mathcal{I} = [t_0, T]$  تعریف شده باشد به‌گونه‌ای که  $0 \leq t_0 < T < \infty$ . معادلات دیفرانسیل تصادفی، معادلات دینامیکی به صورت

$$(1) \quad dX_t = f(t, X_t)dt + g(t, X_t)dW_t$$

هستند که در اینجا  $X_t$  جواب معادلات دیفرانسیل تصادفی ایتو  $n$  - بعدی باشد. تابع  $f: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n$  ضریب رانش و تابع  $g: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^{n \times m}$  ضریب انتشار باشند و  $W(t)$  یک حرکت براونی استاندارد (فرآیند وینر)  $m$  - بعدی است. روش‌های رونگه-کوتا تصادفی قوی مرتبه بالا با نویز جمعی در [۵] ارائه شده است.

## ۳. پایداری بهینه‌سازی شده روش‌های رونگه-کوتا تصادفی با نویز جمعی

تعریف ۱.۳. یک تقریب گسسته است اگر برای هر بازه‌ی زمانی متناهی  $[t_0, T]$  یک ثابت مثبت  $\Delta_0$  وجود دارد که برای هر  $\varepsilon_0 > 0$  و هر  $\delta \in (0, \Delta_0)$ ،

$$(2) \quad \limsup_{|X_t^\delta - \bar{X}_t^\delta| \rightarrow 0, t_0 \leq t \leq T} P(|X_t^\delta - \bar{X}_t^\delta| \geq \varepsilon) = 0.$$

که در اینجا  $X_n^\delta$  و  $\bar{X}_n^\delta$  تقریب‌های زمانی گسته با طول گام ماکزیم  $\delta > 0$  و با مقادیر اولیه  $X_0^\delta$  و  $\bar{X}_0^\delta$  می‌باشند.

\* ارائه‌دهنده

برای معادلات آزمون با نویزهای جمعی فرم کلی معادلات به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$(3) \quad dX_t = \mu X_t dt + dW_t$$

که  $\mu$  یک عدد مختلط باشد. در حالت کلی، معادله‌ی آزمون را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$(4) \quad X_{n+1}^h = X_n^h G(\mu h) + Z_n^h$$

که در اینجا  $h$  یک طول گام ثابت و  $Z_n^h$  یک متغیر تصادفی مستقل از  $X_n^h$  می‌باشد.

تعریف ۲.۳. یک تقریب گسسته، پایدار مطلق (Absolute Stability) گفته می‌شود اگر برای  $z = \mu h$  تمام ریشه‌های چندجمله‌ای  $G(z)$  داخل و روی دایره‌ی واحد قرار بگیرند. همچنین ناحیه پایداری مطلق به صورت

$$(5) \quad \mathcal{S} = \{z \in \mathbb{C} \mid |G(z)| \leq 1\}.$$

تعریف می‌شود.

چگونگی بدست آوردن تابع پایداری روش‌های رونگه-کوتا با نویز جمعی در [۵] ارائه شده است. تابع پایداری برای روش‌های رونگه-کوتا با نویز جمعی به صورت

$$(6) \quad G(z) = 1 + z\alpha.(I - zA^{(\circ)})^{(-1)}$$

در نظر گرفته می‌شود.

حال می‌خواهیم تابع پایداری را برای روش‌های رونگه-کوتا صریح-ضمنی بدست بیاوریم. ماتریس  $A^{(\circ)}$  و بردار  $\alpha$  و  $c^{(\circ)}$  و  $c^{(1)}$  و  $\beta^{(1)}$  و  $\beta^{(2)}$  را به صورت زیر در نظر بگیریم.

$$A^{(\circ)} = \begin{bmatrix} \circ & \circ & \circ & \circ & \dots & \circ \\ \gamma & \gamma & \circ & \circ & \dots & \circ \\ a_{31} & a_{32} & \gamma & \circ & \dots & \circ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn-1} & \gamma \end{bmatrix} \quad B^{(\circ)} = \begin{bmatrix} \circ & \circ & \circ & \circ & \dots & \circ \\ b_{21} & \circ & \circ & \circ & \dots & \circ \\ b_{31} & a_{32} & \circ & \circ & \dots & \circ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn-1} & \circ \end{bmatrix}$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \quad c^{(\circ)} = \begin{bmatrix} c_{\circ 1} \\ c_{\circ 2} \\ c_{\circ 3} \\ \vdots \\ c_{\circ n} \end{bmatrix} \quad c^{(1)} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ c_{13} \\ \vdots \\ c_{1n} \end{bmatrix} \quad \beta^{(1)} = \begin{bmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{12} \\ \beta_{13} \\ \vdots \\ \beta_{1n} \end{bmatrix} \quad \beta^{(2)} = \begin{bmatrix} \beta_{21} \\ \beta_{22} \\ \beta_{23} \\ \vdots \\ \beta_{2n} \end{bmatrix}$$

با جایگذاری ماتریس  $A^{(\circ)}$  و بردار  $\alpha$  در معادله‌ی (۶) تابع پایداری روش رونگه-کوتا صریح-ضمنی مورد نظر حاصل می‌شود. از آنجایی که ناحیه پایداری روش‌های رونگه-کوتا تصادفی با نویز جمعی مشابه با روش‌های رونگه-کوتا معمولی [۲، ۱] به وسیله‌ی بخش غیرتصادفی ماتریس  $A^{(\circ)}$  تعریف می‌شود، در بسیاری از موارد ممکن است که بتوان برای روش‌های ضمنی از نوع معادلات دیفرانسیل معمولی تعمیم مناسبی یافت که بتواند همچنان ویژگی‌های پایداری را حفظ کند. این تعمیم باید در صورتی برقرار گردد که ضریب  $A^{(\circ)}$  و بردار  $\alpha$  و  $c^{(\circ)}$  برای معادلات دیفرانسیل معمولی موجود باشد و ضرایب  $B^{(\circ)}$  و  $c^{(1)}$  و  $\beta^{(1)}$  و  $\beta^{(2)}$  به گونه‌ای تعیین شوند که در شرایط مرتبه روش‌های رونگه-کوتا با نویز جمعی که توسط روسلر در [۷] ارائه شده‌اند، صدق کنند. برای بدست آوردن ضرایب  $B^{(\circ)}$  و  $c^{(1)}$  و  $\beta^{(1)}$  و  $\beta^{(2)}$  با استفاده از شرایط مرتبه از الگوریتم FindInstance در ممتیکا می‌توان استفاده کرد.

#### ۴. روش‌های رونگه-کوتا ضمنی تعمیم داده شده با ناحیه پایداری بهینه شده

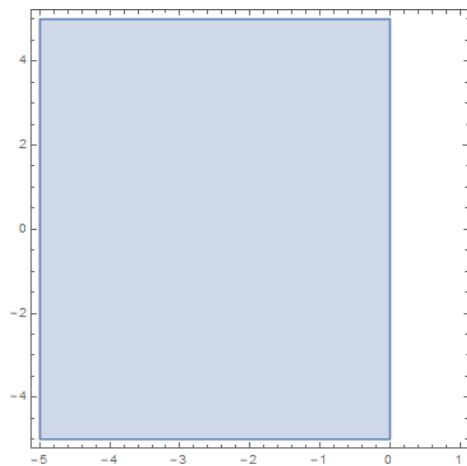
برای این کار، یکی از روش‌های رونگه-کوتا صریح-ضمنی از معادلات دیفرانسیل معمولی را برای نمونه تعمیم داده می‌شود. روش ESDIRK ۶ مرحله‌ای مرتبه ۴ که توسط Kenndy و Carpenter در [۷] ارائه شده است را مورد بررسی قرار داده و تعمیم یافته آن به شرح زیر حاصل شد:

$$A^{(\circ)} = \begin{bmatrix} \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \circ & \circ & \circ \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \circ & \circ \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \circ \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

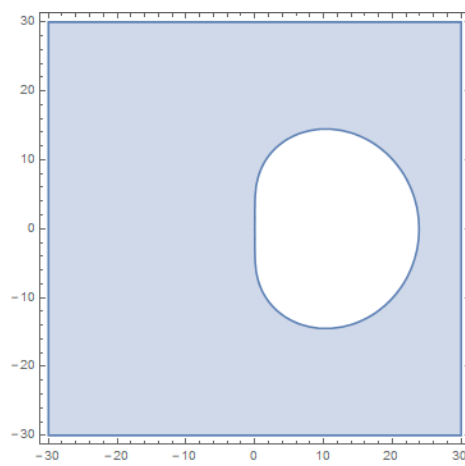
$$B^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 298412 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.669792 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} 82889 \\ 524892 \\ 0 \\ 15625 \\ 83664 \\ 69875 \\ 102672 \\ -2260 \\ 8211 \\ 4 \end{bmatrix} \quad c^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 83 \\ 250 \\ 19 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad c^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \beta^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \beta^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

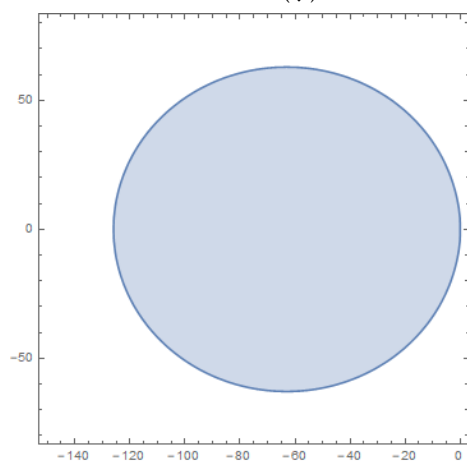
از میان روش‌های معادلات دیفرانسیل معمولی می‌توان به روش ۴ مرحله‌ای مرتبه ۳ (SKenCarp) که توسط Kenndy و Carpenter [۵] ارائه شد، اشاره کرد که این روش، در [۶] تعمیم داده شده‌است.



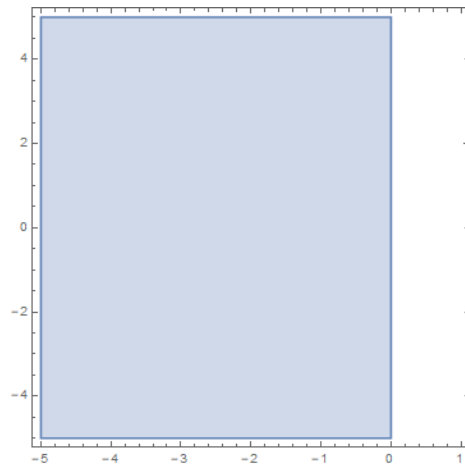
LobattoIIIA (ب)



ESDIRK (آ)



DIRK (د)



LobattoIIIB (ج)

شکل ۱. ناحیه پایداری روش‌های رونگه-کوتا ( $|G(z)| < 1$ ) برای متغیر  $z = x + iy$  در صفحه مختصات  $(x, y)$  رسم شده است. ESDIRK (آ) Lobatto IIIA (ب) Lobatto IIIB (ج) DIRK (د)

به این نکته توجه کنید که همواره برای تمامی روش‌های رونگه-کوتا ضمنی از معادلات دیفرانسیل معمولی، تعمیمی از روش‌های رونگه-کوتا

از نوع معادلات دیفرانسیل تصادفی وجود ندارد. برای مثال، روش Lobatto IIA دومرحله‌ای مرتبه ۲، Lobatto IIB دو مرحله‌ای مرتبه ۲ [۳] و DIRK چهار مرحله‌ای مرتبه ۴ [۴] اشاره نمود. ناحیه پایداری روش‌های نامبرده در شکل ۱ مشاهده می‌شوند. روش‌های نامبرده همگی دارای تعداد مرحله و مرتبه یکسان می‌باشند اما برای این روش‌ها تعمیمی یافت نشد که بتواند در شرایط مرتبه متناظر با روش‌های رونگه-کوتا با نویز جمعی صدق کند [۶]. در نتیجه، برای تمامی روش‌ها با مرحله و مرتبه یکسان از روش‌های رونگه-کوتا ضمنی تعمیم مناسب از روش‌های رونگه-کوتا تصادفی ضمنی وجود ندارد. به یاد داشته باشید که چون روش‌های با نویز جمعی به متغیرهای بخش تصادفی خود وابسته نیستند، در مقایسه با روش‌های دیگر راحت‌تر می‌توان به تعمیم تصادفی آن‌ها دست یافت.

### مراجع

1. J. C. Butcher, A history of runge-kutta methods, Applied Numerical Mathematics, 20 (1996), pp. 247-260.
2. J. C. Butcher, Numerical Methods for Ordinary Differential equations. WILEY (2016).
3. E. Hairer and G. Wanner, Solving Ordinary Differential Equations II-Stiff and Differential-Algebraic Problems, Springer, 1991.
4. N.I.C. Jawias, F. Ismail, M. Suleiman and A. Jaafar, Fourth Order Four-Stage Diagonally Implicit Runge-Kutta Method for Linear Ordinary Differential Equations, Malaysian Journal of Mathematical Sciences 4(1):95-105 (2010).
5. C. A. Kennedy and M. H. Carpenter, Additive runge-kutta schemes for convection-diffusion-reaction equations, Applied Numerical Mathematics, 44 (2003), pp. 139-181.
6. C. Rackauckas and Q. Nie, Stability-Optimized High Order Methods and Stiffness Detection for Pathwise Stiff Stochastic Differential Equations, arXiv, (2018), pp. 1-36.
7. A. Rössler, Runge kutta methods for the strong approximation of solutions of stochastic differential equations, SIAM Journal on Numerical Analysis, 48 (2010), pp. 922-952.

پست الکترونیکی: [s.niloofar@modares.ac.ir](mailto:s.niloofar@modares.ac.ir)  
 پست الکترونیکی: [hossei\\_m@modares.ac.ir](mailto:hossei_m@modares.ac.ir)

## بهینه سازی متغیرهای طراحی فرآیند ایزومریزاسیون به کمک الگوریتم تکامل تفاضلی

مهرناز محبی\*

دانشجوی دکتری ریاضی، دانشگاه صنعتی شیراز، شیراز، ایران  
و حمیدرضا ملکی  
استاد بخش ریاضی، دانشگاه صنعتی شیراز، شیراز، ایران

چکیده. ایزومریزاسیون از نظر اقتصادی فرآیندی مقرون به صرفه با هدف بهبود کیفیت بنزین می باشد. افزایش عدد اکتان و حذف مواد مضر آروماتیک از ویژگی های این فرایند مهم پالایشگاهی است. برای بهینه سازی متغیرهای طراحی فرایند از الگوریتم تکامل تفاضلی به عنوان یک روش موثر جهت یافتن جواب بهینه سراسری استفاده شده است. تابع هدف بر مبنای بیشینه سازی بازده و عدد اکتان محصول می باشد. واژه های کلیدی: ایزومریزاسیون، الگوریتم تکامل تفاضلی، بهینه سازی. طبقه بندی موضوعی [۲۰۱۰]: (۱ تا ۳ مورد) 90C30, 90C26.

## ۱. پیش گفتار

در سال های اخیر قوانین زیست محیطی محدودیت های جدی بر میزان مواد آروماتیک موجود در بنزین اعمال کرده است. مواد آروماتیک دارای اثرات نامطلوب بر سلامتی انسان و محیط زیست می باشد. حذف این مواد نیازمند جایگزین کردن آنها با محصولات دیگر است. ایزومریزاسیون فرآیندی موثر جهت تولید بنزین است که علاوه بر سازگاری با قوانین زیست محیطی دارای عدد اکتان بالا نیز می باشد. در این فرایند هیدروکربن های با عدد اکتان پایین به محصولاتی با عدد اکتان بالا تبدیل می شوند که موجب بهبود عملکرد بنزین می گردد. بررسی مقالات نشان می دهد که تحقیقات کمی روی مدل سازی و بهینه سازی این فرایند انجام شده است. چکانتسو و همکارانش [۲] در سال ۲۰۱۴ مدلی جامع برای مدل سازی این فرایند پیشنهاد دادند. در این مقاله از مدلی که توسط احمد و همکارانش [۱] در سال ۲۰۱۸ برای فرایند ایزومریزاسیون ارائه شده استفاده می کنیم. احمد و همکارانش [۱] بهینه سازی مساله را بر مبنای روش برنامه ریزی درجه دوم متوالی (SQP) <sup>۱</sup> انجام دادند. این روش با وجود دقت بالا به شدت تحت تاثیر انتخاب اولیه قرار دارد و به دلیل گیر افتادن احتمالی در نقاط بهینه محلی، همگرایی به یک نقطه بهینه سراسری را تضمین نمی کند [۴]. الگوریتم تکامل تفاضلی (DE) <sup>۲</sup> یک روش موثر جهت یافتن جواب بهینه مسایل پیچیده می باشد که علاوه بر همگرایی سریع، نیازمند تعیین تعداد کم پارامترهای کنترلی می باشد [۲] و [۵]. بنابراین برای یافتن مقادیر بهینه متغیرهای تصمیم (شرایط عملیاتی) فرایند ایزومریزاسیون از الگوریتم تکامل تفاضلی استفاده می کنیم. هدف بهینه سازی، افزایش عدد اکتان و بازده محصول مطلوب این فرایند می باشد.

## ۲. مدل ریاضی فرایند ایزومریزاسیون

مدل فرایند ایزومریزاسیون به وسیله یک دستگاه معادلات متشکل از موازنه جرم و موازنه انرژی در نظر گرفته می شود. مدل ریاضی فرایند ایزومریزاسیون می تواند به صورت زیر فرمول بندی گردد:

$$(۱) \quad G \frac{dC_i}{dV} = \sum_{j=1}^m r_j$$

با شرایط اولیه  $C_i = C_{i,in}$  و  $V=0$ 

$$(۲) \quad G \frac{dT}{dV} = \frac{1}{\rho C_p m} \sum_{j=1}^m Q_j r_j$$

با شرایط اولیه  $T = T_{in}$  و  $V=0$ 

$$(۳) \quad r_j = k_j C_i^n C_{H_2}^m$$

$$(۴) \quad k_j = A_j \exp\left(\frac{-E_j}{RT}\right)$$

<sup>2</sup> Differential Evolution<sup>1</sup> Sequential Quadratic Programming

\* ارائه دهنده



$$\begin{aligned}
 (5) \quad & C_i = \frac{y_i P}{RT} \\
 (6) \quad & \rho_{ln} = \sum_i \rho_i W t_i \\
 (7) \quad & \rho_i = \frac{PMW_i}{RT} \\
 (8) \quad & Q_j = \Delta H_{r,j}^{\circ} + \int_{T_{ref}}^T \Delta C p_j dT \\
 (9) \quad & C p_i = A + B T + C T^2 + D T^3 \\
 (10) \quad & C p_m = \sum y_i C p_i \\
 (11) \quad & G = \frac{W_{ln}}{\rho_{ln}} + \frac{W_{H_2}}{\rho_{H_2}} \\
 (12) \quad & W_{ln} = LHSV \times V \times \rho_{ln} \\
 (13) \quad & W_{H_2} = m_r \times M_{ln} \times MW_{H_2} \\
 (14) \quad & RON = \sum_{i=1}^m (RON_i \cdot y_i) \\
 (15) \quad & YIELD = \frac{M_{iso}}{M_{ln}} \\
 (16) \quad & M_{iso} = \frac{W_{iso}}{MW_{iso}} \\
 (17) \quad & M_{ln} = \frac{W_{ln}}{MW_{ln}}
 \end{aligned}$$

رابطه (۱) معادله موازنه جرم، رابطه (۲) معادله موازنه انرژی و رابطه (۳) معادله سرعت واکنش را نشان می‌دهد که در آن  $m$  و  $n$  مرتبه واکنش نسبت به هیدروژن و هیدروکربن می‌باشد. رابطه (۴) ثابت سرعت واکنش و رابطه (۵) غلظت هر جزء را مشخص می‌کند که در آن  $y_i$  جزء مولی را نشان می‌دهد. رابطه (۶) دانسیته مخلوط که در آن  $W t_i$  کسر جرمی جزء  $i$  و رابطه (۷) دانسیته هر جزء را مشخص می‌کند. رابطه (۸) گرمای واکنش را نشان می‌دهد که در آن  $\Delta H_{r,j}^{\circ}$  گرمای استاندارد واکنش  $j$  و  $\Delta C p_j$  ظرفیت گرمایی واکنش  $j$  می‌باشد. رابطه (۹) ظرفیت گرمایی جزء  $i$ ، رابطه (۱۰) ظرفیت گرمایی مخلوط، رابطه (۱۱) شدت جریان مواد اولیه، رابطه (۱۲) شدت جریان جرمی خوراک ورودی و رابطه (۱۳) شدت جریان جرمی هیدروژن را بیان می‌کند. رابطه (۱۴) بیانگر عدد اکتان و رابطه (۱۵) نشان‌دهنده بازده می‌باشد. روابط (۱۶) و (۱۷) به ترتیب بیانگر مول محصول و مول خوراک ورودی می‌باشد. در روابط بالا  $V$  نشان دهنده حجم راکتور می‌باشد.

پارامترهای ورودی:

$MW_i$ :	وزن مولکولی هیدروکربن $i$	$m$ :	مرتبه واکنش نسبت به هیدروژن	$E$ :	انرژی فعالساز
$MW_{H_2}$ :	وزن مولکولی هیدروژن	$n$ :	مرتبه واکنش نسبت به هیدروکربن	$R$ :	ثابت گاز
$RON_i$ :	عدد اکتان جزء $i$	$A_j$ :	ضریب پیش نمایی واکنش $j$		

متغیرهای تصمیم:

$W_{nC5}$ :	شدت جریان جرمی پنتان	$m_r$ :	نسبت مولی هیدروژن به هیدروکربن	$T$ :	دمای راکتور
$W_{nC6}$ :	شدت جریان جرمی هگزان	$LHSV$ :	سرعت فضایی خوراک ورودی	$P$ :	فشار راکتور

مساله بهینه سازی می‌تواند به صورت زیر بیان گردد:

$$\begin{aligned}
 \text{Max} \quad & (RON + YIELD) \\
 \text{s.t.} \quad & f(X) = 0 \quad (\text{روابط (۱-۱۳) ارایه شده در مدل}) \\
 & 1.5 \leq P \leq 3 \\
 & 51^{\circ} \leq T \leq 55^{\circ} \\
 & 1.2 \leq LHSV \leq 1.6 \\
 & 3 \leq m_r \leq 3.6 \\
 & 18.1 \leq W_{nC5} \leq 29.6 \\
 & 13.1 \leq W_{nC6} \leq 21.2
 \end{aligned}$$

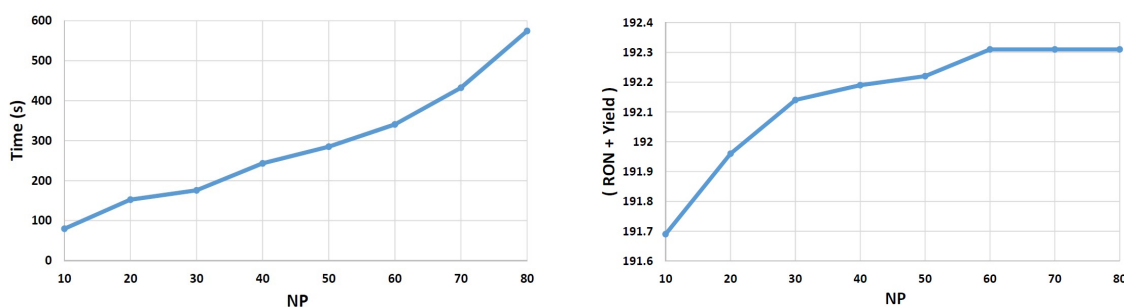
کران‌های بالا و پایین هر یک از متغیرهای تصمیم در این مساله بهینه سازی با توجه به محدوده مجاز شرایط عملیاتی تعیین می‌شود. در این تحقیق برای تعیین کران‌های بالا و پایین از داده‌های موجود در مقاله احمد و همکارانش [۱] استفاده شده است.

### ۳. نتایج اصلی

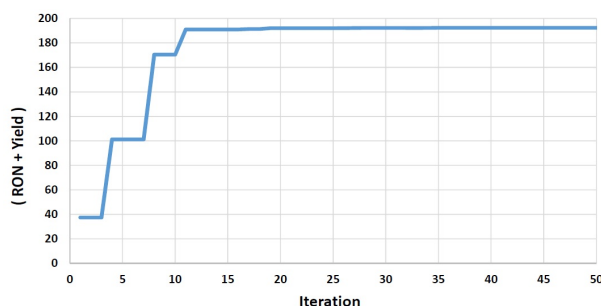
در الگوریتم DE ابتدا جمعیت اولیه به صورت تصادفی ساخته می‌شود که به وسیله عملگرهای جهش و تقاطع بهبود می‌یابد. برای به دست آوردن نتایج قابل قبول باید پارامترهای کنترلی الگوریتم DE یعنی  $(F, CR, NP)$  به طور مناسب تنظیم شوند. عملگر مهم جهش، الگوریتم DE را از سایر الگوریتم‌های تکاملی متمایز می‌کند. این عامل با تولید بردار جهش فضای جستجو را در بین جمعیت فعلی افزایش می‌دهد. عملگر تقاطع، تنوع بردارهای تولید شده و احتمال جستجوی تصادفی برای یافتن نقطه بهینه در فضای شدنی را افزایش می‌دهد. این عامل عناصر مطلوب مربوط به نسل قبل را دوباره استفاده می‌کند.

پارامترهای  $F$  و  $CR$  عملگرهای جهش و تقاطع را کنترل می‌کنند. مطابق جدول ۱ جهت تعیین مقدار مناسب این دو پارامتر، مقدار بهینه تابع هدف در مقادیر مختلف  $F$  و  $CR$  را به دست می‌آوریم. بهترین مقدار تابع هدف در حالت  $F = 0.8$  و  $CR = 0.6$  حاصل می‌گردد. همانطور که در شکل ۱ دیده می‌شود اگرچه با افزایش تعداد جمعیت  $(NP)$  زمان اجرای برنامه افزایش می‌یابد، اما  $NP$  بیشتر فضای جستجو را بزرگتر کرده و روند را برای همگرایی به یک جواب بهتر تسهیل می‌کند. برای مقادیر  $NP$  بزرگتر از ۶۰ بهبود تابع هدف قابل توجه نمی‌باشد، لذا بهترین مقدار تابع هدف در کمترین زمان برای  $NP = 60$  به دست می‌آید.

پس از تنظیم پارامترهای کنترلی  $(F = 0.8, CR = 0.6, NP = 60)$  نمودار تابع هدف بر حسب تعداد تکرار رسم می‌شود. همانگونه که در شکل ۲ نشان داده شده است، تغییرات تابع هدف برای تعداد تکرار بیشتر از ۳۶ ناچیز بوده و تابع هدف به یک مقدار بهینه همگرا می‌شود. مقدار بهینه متغیرهای تصمیم با الگوریتم DE جهت بهبود عملکرد فرآیند ایزومریزاسیون در جدول ۲ مشاهده می‌شود. مقایسه نتایج حل مساله با الگوریتم DE و روش SQP در جدول ۳ ارایه شده است. مقدار عدد اکتان، بازده و مجموع عدد اکتان و بازده به ترتیب ۲/۲۲، ۲۹٪ و ۱/۲۱ درصد بهبود یافته است.



شکل ۱. تاثیر اندازه جمعیت بر زمان اجرای برنامه و تابع هدف



شکل ۲. تاثیر تعداد تکرار در تابع هدف

### ۴. دست‌آوردهای پژوهش

در این تحقیق برای بهبود کارایی فرآیند ایزومریزاسیون از الگوریتم DE استفاده شده است. در قسمت نتایج توانایی الگوریتم در عبور از نقاط بهینه محلی به وضوح دیده می‌شود. پس از تنظیم پارامترهای کنترلی، مقدار بهینه برای متغیرهای تصمیم (شرایط عملیاتی) به دست می‌آید. نتایج بهینه سازی با الگوریتم DE حاکی از بهبود عدد اکتان و بازده می‌باشد.

جدول ۱. تنظیم پارامترهای کنترلی الگوریتم DE

CR	F	۰/۱	۰/۲	۰/۴	۰/۶	۰/۸
۰/۱		۱۹۱/۳۸	۱۹۱/۱۴	۱۹۱/۱۷	۱۹۱/۷۳	۱۹۱/۲۹
۰/۲		۱۹۱/۷۱	۱۹۱/۷۹	۱۹۱/۱۲	۱۹۱/۸۳	۱۹۱/۲۱
۰/۴		۱۹۱/۴۵	۱۹۱/۷۴	۱۹۱/۹۱	۱۹۱/۸۸	۱۹۱/۱۸
۰/۶		۱۹۱/۸۳	۱۹۱/۸۸	۱۹۱/۹۷	۱۹۲/۰۹	۱۹۲/۱۸
۰/۸		۱۹۱/۰۱	۱۹۱/۸۱	۱۹۱/۸۰	۱۹۲/۰۸	۱۹۲/۱۵

جدول ۲. مقدار بهینه متغیرهای تصمیم با الگوریتم DE

متغیر تصمیم	مقدار بهینه	واحد
فشار راکتور	۲	مگا پاسکال
دمای راکتور	۵۱۹	کلوین
سرعت فضایی خوراک ورودی	۱/۵۰	۱ بر ساعت
نسبت مولی هیدروژن به هیدروکربن	۳/۲۰	(-)
شدت جریان جرمی پنتان	۱۹/۷۸	تن بر ساعت
شدت جریان جرمی هگزان	۲۱/۱۸	تن بر ساعت

جدول ۳. مقایسه نتایج حل مساله با الگوریتم DE و روش SQP

نتایج حل با روش SQP	نتایج حل با الگوریتم DE در تحقیق فعلی	عدد اکتان
۹۰/۸۱	۹۲/۸۳	بازده
۹۹/۲۰	۹۹/۴۹	مجموع
۱۹۰/۰۱	۱۹۲/۳۲	

جهت تحقیقات آتی در این زمینه روش ترکیبی SQP - DE برای بهینه سازی پیشنهاد می شود. در این روش از مزیت الگوریتم DE در جستجوی سراسری و دقت بالای روش SQP در جستجوی محلی استفاده می شود. روش کار به این صورت است که نتیجه به دست آمده توسط الگوریتم DE، به عنوان نقطه شروع اولیه برای روش SQP مورد استفاده قرار می گیرد.

### مراجع

1. A.M. Ahmed, A.T. Jarullah, F.M. Abed, I.M. Mujtaba, *Modeling of an industrial naphtha isomerization reactor and development and assessment of a new isomerization process*, Chem. Eng. Res. Des. 137 (2018) 33-46.
2. N.V. Chekantsev, M.S. Gyngazova, E.D. Ivanchina, *Mathematical modeling of light naphtha (C5, C6) isomerization process*, Chem. Eng. J. 238 (2014) 120-128.
3. R.R. Karri, N. Jayakumar, J. Sahu, *Modelling of fluidised-bed reactor by differential evolution optimization for phenol removal using coconut shells based activated carbon*, J. Mol. Liq. 231 (2017) 249-262.
4. L. Li, X.M. Chen, L. Zhang, *A global optimization algorithm for trajectory data based car-following model calibration*, Transportation Research Part C: Emerging Technologies. 68 (2016) 311-332.
5. L.-B. Liu, G. Long, Z. Huang, A. Ouyang, *Rational spectral collocation and differential evolution algorithms for singularly perturbed problems with an interior layer*, Journal of Computational and Applied Mathematics. 335 (2018) 312-322.

پست الکترونیکی: [M.Mohebbi@sutech.ac.ir](mailto:M.Mohebbi@sutech.ac.ir)  
 پست الکترونیکی: [maleki@sutech.ac.ir](mailto:maleki@sutech.ac.ir)

## ترکیب روش تکرار وردشی و درونیابی به وسیله چندجمله‌ای‌های چبیشف برای حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی

محمد جواد ملکی\*  
بخش ریاضی، دانشگاه حکیم سبزواری، سبزوار، ایران  
و محمدعلی پرتانیان  
بخش ریاضی، دانشگاه حکیم سبزواری، سبزوار، ایران

چکیده. در این مقاله ترکیبی از روش تکرار وردشی و روش درونیابی به وسیله چندجمله‌ای چبیشف برای حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی ارائه می‌شود. در حل معادلات دیفرانسیل به روش تکرار وردشی ابتدا تابع اصلاحی مربوط به این معادله را نوشته سپس ضریب لاگرانژ بهینه را با ماکزیم کردن تابع اصلاحی و به کار بردن وردشی محدود روی عامل غیرخطی بدست می‌آوریم و با قرار دادن ضریب لاگرانژ بدست آمده در این تابع اصلاحی و استفاده از  $u_0$  مناسب تقریبهای بعدی یعنی  $u_1, u_2, \dots$  را بدست می‌آوریم. در بعضی مسائل بدست آوردن تقریبهای بعدی  $u_1, u_2, \dots$  به دلیل برخورد با یک انتگرال غیر قابل حل غیر ممکن است. در این مقاله با استفاده از درونیابی به وسیله چندجمله‌ای‌های چبیشف الگوریتمی ارائه گردیده است که با استفاده از این الگوریتم بتوان این مشکل را حل کرد.  
واژه‌های کلیدی: روش تکرار وردشی، چندجمله‌ای‌های چبیشف، ضریب لاگرانژ، معادلات دیفرانسیل، تابع اصلاحی.

## ۱. مقدمه

روش تکرار وردشی یکی از روش‌های ساده و قوی است که برای حل دسته‌ای وسیعی از مسائل غیر خطی به کار می‌رود. ایده اولیه این روش توسط اینکتی-سکاین-مورا معرفی و توسط ریاضی دان چینی، پروفیسور جی هوان هی در سال ۱۹۹۹ ارائه گردید. در استفاده از روش تکرار وردشی ابتدا تابع اصلاحی را نوشته سپس با استفاده از  $u_0$  مناسب تقریبهای بعدی را بدست می‌آوریم اما همانطور که بیان شد در برخی مواقع با یک انتگرال غیر قابل حل بر خورد می‌کنیم که برای حل این مشکل ابتدا تابع اصلاحی را با کمک تغییر متغیرهای بیان شده از بازه  $[0, b]$  به بازه  $[-1, 1]$  انتقال داده و به کمک درونیابی با استفاده از چند جمله‌ای‌های چبیشف تابع اصلاحی را به شکلی نوشته که مشکل غیر قابل حل بودن انتگرال برطرف گردد. چند جمله‌ای‌های چبیشف دنباله‌ای از چند جمله‌ای‌های متعامد با تابع وزن  $w = \sqrt{1-x^2}$  می‌باشند که به طور بازگشتی محاسبه می‌گردند [۲]. نام این چند جمله‌ای‌ها از نام ریاضی دان روسی گرفته شده است که آنها را برای اولین بار در سال ۱۸۴۵ معرفی کرد. این چند جمله‌ای‌ها بیشتر در تخمین توابع کاربرد دارند.

## ۲. تعاریف و قضایا

تعریف ۱.۰۲. چندجمله‌ای چبیشف از طریق رابطه بازگشتی زیر بدست می‌آیند [۳]:

$$T_{s+1}(x) = 2xT_s(x) - T_{s-1}(x) \quad n \geq 1, \quad T_0(X) = 1, \quad T_1(X) = X$$

این چندجمله‌ای‌ها با تابع وزن  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  متعامدند.

قضیه ۲.۰۲. چندجمله‌ای  $T_{s+1}$ ،  $s+1$  ریشه در بازه  $[-1, 1]$  دارد که ریشه‌های آن از رابطه زیر بدست می‌آیند.

$$X_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2(s+1)}\right), \quad k = 0, 1, \dots, s,$$

برای تقریب تابع  $F(X, Y)$  از رابطه زیر استفاده می‌کنیم [۱]:

$$F(X, Y) \sim T(X)C_nT^t(Y),$$

که در آن  $T(X), T(Y), C_n$  از رابطه‌های زیر بدست می‌آیند:

$$T(X) = [T_0(X) \quad T_1(X) \dots T_s(X)],$$

$$T(Y) = [T_0(Y) \quad T_1(Y) \dots T_s(Y)],$$

$$C_n = [c_{nij}],$$

$$c_{nij} = \frac{\epsilon}{(s+1)(m+1)} \sum_{k=0}^s \sum_{l=0}^m F_n(X_k, Y_l) \cos\left(\frac{i(2k+1)\pi}{2(s+1)}\right) \cos\left(\frac{j(2l+1)\pi}{2(s+1)}\right),$$

$$\epsilon = \begin{cases} 4, & i \neq 0, \quad j \neq 0, \\ 2, & i = 0, \quad j \neq 0, \\ 2, & i \neq 0, \quad j = 0, \\ 1, & i = 0, \quad j = 0. \end{cases}$$

تعریف ۳.۲. اگر داشته باشیم :

$$F(q(x)) = \int_a^b L(t, q(t), q'(t)) dt.$$

آنگاه وردشی تابع  $F(q(x))$  در نزدیکی تابع  $q_1(x)$  چنین تعریف می‌شود:

$$\delta F(q_1(x)) = \frac{\partial F(q(x))}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0},$$

$$q(x) = q_1(x) + \alpha v(x).$$

قضیه ۴.۲ (قضیه وردشی). اگر تابع  $F(q(x))$  در تابع  $q_1(x)$  به مقدار اکسترمم خود برسد، آنگاه داریم:

$$\delta F(q_1(x)) = 0.$$

### ۳. آنالیز روش

سیستم غیرخطی زیر را در نظر بگیرید :

$$(1) \quad Lu(x) + Nu(x) = g(x), \quad x \in [0, b],$$

که  $L$  یک عملگر خطی و  $N$  یک عملگر غیرخطی و  $g(x)$  یک تابع پیوسته و قسمت ناهمگن سیستم فوق است. حال برای پیدا کردن تابع  $u(x)$  که در معادله فوق صدق کند تابع اصلاحی زیر را می‌نویسیم:

$$(2) \quad u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x \lambda(x, t) [Lu_n(t) + Nu_n(t) - g(t)] dt,$$

در رابطه فوق  $u_n$ ،  $n$ -امین تقریب و  $\lambda(x, t)$  ضریب لاگرانژ که با استفاده قضیه وردشی و شرایط بهینگی به دست می‌آید. حال ضریب لاگرانژ  $\lambda(x, t)$  را باید طوری تعیین کنیم که

$$\frac{\delta u_{n+1}}{\delta u_n} = 0,$$

به دلیل وجود عامل غیرخطی  $Nu_n$  بدست آوردن ضریب لاگرانژ  $\lambda(x, t)$  کاری بسیار دشوار است بنا براین ضریب لاگرانژ بهینه با در نظر گرفتن عامل غیرخطی  $Nu_n$  به عنوان وردشی محدود یعنی  $\frac{\delta Nu_n}{\delta u_n} = 0$  و با در نظر گرفتن  $Lu(x) = u^{(d)}(x)$  و با توجه به قضیه وردشی و شرایط بهینگی به صورت  $\lambda(x, t) = (-1)^d \frac{1}{(d-1)!} (t-x)^{d-1}$  به دست می‌آید. اکنون با قرار دادن ضریب لاگرانژ فوق در رابطه تکراری (۲) و با انتخاب  $u$  مناسب می‌توان تقریبهای بعدی یعنی  $u_1, u_2, \dots$  را بدست آورد اما همانطور که قبلاً بیان شد در بعضی مسائل به علت برخورد با انتگرالهای غیرقابل حل بدست آوردن تقریبهای بعدی امکان پذیر نیست؛ برای رفع این مشکل از درونیابی به وسیله چندجمله‌ای‌های چیشف استفاده می‌کنیم برای این کار ابتدا معادله (۲) را با استفاده از تغییر متغیر زیر از بازه  $[0, b]$  به بازه  $[-1, 1]$  انتقال می‌دهیم:

$$x = \frac{b}{2}(1+X), \quad X \in [-1, 1],$$

$$t = \frac{b}{2}(1+Y), \quad Y \in [-1, X],$$

با استفاده از تغییر متغیرهای فوق می‌توان رابطه (۲) را به صورت زیر نوشت:

$$(۳) \quad V_{n+1}(X) = V_n(X) + \frac{b}{\gamma} \int_{-1}^X \lambda(X, Y) \left( \left( \frac{\gamma}{b} \right)^d L(V_n(Y)) + N(V_n(Y)) + G(Y) \right) dY,$$

که در آن:

$$\lambda(X, Y) = (-1)^d \frac{1}{(d-1)!} \left( \frac{b}{\gamma} (1+Y) - \frac{b}{\gamma} (1+X) \right)^{d-1},$$

$$V_{n+1}(X) = u_{n+1} \left( \frac{b}{\gamma} (1+X) \right),$$

$$V_n(X) = u_n \left( \frac{b}{\gamma} (1+X) \right),$$

$$G(Y) = g \left( \frac{b}{\gamma} (1+Y) \right).$$

اکنون با در نظر گرفتن تابع  $F_n(X, Y)$  به صورت زیر:

$$F_n(X, Y) = \lambda(X, Y) \left( \left( \frac{\gamma}{b} \right)^d L(V_n(Y)) + N(V_n(Y)) + G(Y) \right)$$

می‌توان تابع  $F_n(X, Y)$  را با استفاده از چند جمله‌ای‌های چیشف به صورت زیر تقریب زد:

$$F_n(X, Y) \sim T(X) C_n T^t(Y),$$

اکنون با توجه به رابطه فوق رابطه تکراری (۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(۴) \quad V_{n+1}(X) \sim V_n(X) + \frac{b}{\gamma} T(X) C_n \int_{-1}^X T^t(Y) dY.$$

اکنون با در نظر گرفتن  $V_0(X) = u_0 \left( \frac{b}{\gamma} (1+X) \right)$  و قراردادن در تابع اصلاحی فوق می‌توان  $V_1(X), V_2(X), \dots, V_n(X)$  را بدست آورد و در نهایت تابع  $u(x)$  را می‌توان به صورت  $u(x) \sim \lim_{n \rightarrow \infty} V_n \left( \frac{\gamma x}{b} - 1 \right)$  به دست آورد

#### ۴. نتایج اصلی

در اینجا دو معادله دیفرانسیل غیرخطی را به کمک الگوریتمی که در بالا توضیح دادیم حل می‌کنیم و جواب بدست آمده را با جواب دقیق مقایسه می‌کنیم. برای انجام محاسبات از نرم افزار MATLAB استفاده کرده‌ایم. لازم به ذکر است که در تمام مثالهای حل شده MAE به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{MAX } E = \max_{0 \leq i \leq N} |u_{\text{exact}}(x_i) - u_{\text{approximate}}(x_i)|$$

مثال ۱۰۴. معادله دیفرانسیل غیرخطی زیر را در نظر بگیرید:

$$(۵) \quad u'(x) + \sin(x) u''(x) - \gamma \tan(x) \sec(x) = 0, \quad u(0) = \gamma \quad x \in [0, 1],$$

تابع اصلاحی برای معادله فوق به صورت زیر است

$$(۶) \quad u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x \lambda(x, t) \left( u'_n(t) + \sin(t) u''_n(t) - \gamma \tan(t) \sec(t) \right) dt,$$

با اکسترم کردن تابع اصلاحی فوق و در نظر گرفتن عامل غیرخطی  $\sin(t) u''_n(t)$  به عنوان وردشی محدود ضریب لاگرانژ رابه صورت زیر بدست می‌آوریم:

$$(۷) \quad \lambda(x, t) = -1,$$

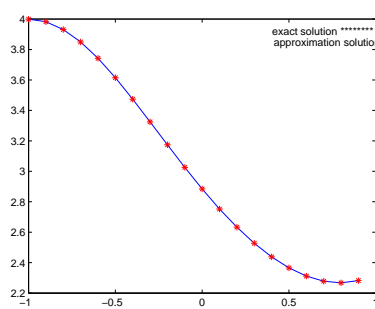
جواب دقیق معادله فوق به صورت  $\sec(x) + \frac{\gamma \cos^{\gamma}(x)}{\gamma - \cos^{\gamma}(x)}$  می‌باشد. جدول (۱) نشان دهنده ماکزیمم خطای جواب دقیق و جواب تقریبی برای مقادیر مختلف  $n$  و مقدار  $s = 10$  است. در شکل ۱۱ جواب دقیق و جواب تقریبی برای حالت  $n = 10$  و  $s = 10$  بیان شده است و شکل ۱۲ نشان دهنده نمودار خطا برای مقادیر  $n = 10$  و  $s = 10$  است.

مثال ۲۰۴. معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

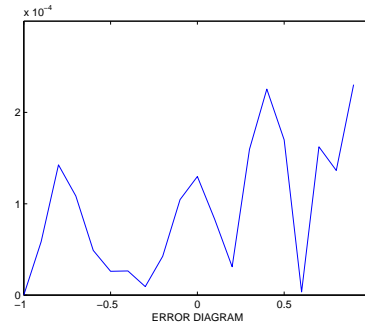
$$(۸) \quad u'(x) + (\cos(x) - \sin(x)) u''(x) + u(x) = 0, \quad u(0) = 1 \quad x \in [0, 1],$$

جدول ۱. خطای روش وردشی در پنج تکرار مختلف

$n$	MAE
۵	$۱۶e - ۰۲$
۶	$۵e - ۰۲$
۷	$e - ۰۲$
۸	$۲e - ۰۳$
۹	$۷e - ۰۴$
۱۰	$۲e - ۰۴$



(ب) نمودار خطا

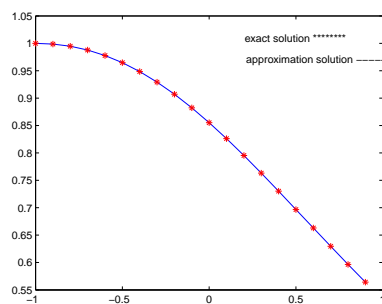


(آ) مقایسه جواب دقیق و جواب تقریبی  $u_{10}$

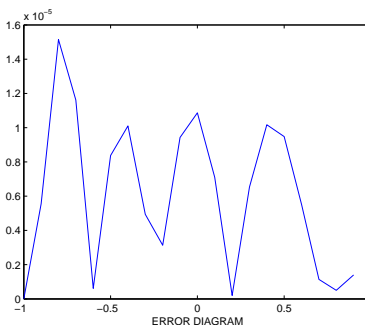
جواب دقیق معادله فوق به صورت  $\frac{1}{\exp(x) - \sin(x)}$  می‌باشد. معادله فوق با روش بیان شده حل شد و جواب بدست آمده با جواب دقیق برای مقادیر مختلف  $n$  و مقدار  $s = 10$  در جدول ۲ مقایسه شد همچنین در شکل ۲ جواب دقیق و جواب تقریبی در حالت  $n = 5$  و  $s = 10$  مقایسه شده و شکل ۲ ب نیز نشان دهنده نمودار خطا زمانی که  $x \in [0, 1]$  و  $s = 10$  و  $n = 5$ .

جدول ۲. خطای روش وردشی در پنج تکرار مختلف

$n$	MAE
۱	$۳e - ۰۲$
۲	$۴e - ۰۳$
۳	$۵e - ۰۴$
۴	$۶e - ۰۵$
۵	$e - ۰۵$



(ب) نمودار خطا



(آ) مقایسه جواب دقیق و جواب تقریبی  $u_5$

مراجع

1. Leng G., Leng G., Compression of aircraft aerodynamic database using multivariable Chebyshev polynomials, *Advances in Engineering Software* 28 (1997) 133-141.
2. Ralston A., *Wstęp do analizy numerycznej, Introduction to numerical analysis*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1971.

3. Paszkowski S, *Paszkowski S., Zastosowania numeryczne wielomianw i szeregw Czebyszewa, Numerical utilisation of Chebyshev polynomials and series, Pastwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1975.*
4. Ralston A *Ralston A., Wstp do analizy numerycznej, Introduction to numerical analysis, Pastwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1971.*
5. Bjorck A , Dahlquist G. *Metody numeryczne, Numerical methods, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1987.*

پست الکترونیکی: [Mjavad.maleki20@gmail.com](mailto:Mjavad.maleki20@gmail.com)

پست الکترونیکی: [partanian@hsu.ac.ir](mailto:partanian@hsu.ac.ir)



## روش مینیمم مانده QLP برای حل دستگاه خطی فازی

پریسا میرسلیمانی\*

دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه یزد، یزد، ایران

سید ابوالفضل شاهزاده فاضلی

دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه یزد، یزد، ایران

و نرگس بیدآبادی

دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه یزد، یزد، ایران

چکیده. دستگاه خطی فازی  $A\tilde{x} = \tilde{b}$ ، دستگاه معادلات خطی است که پارامترهای آن اعداد فازی می‌باشد. از آن جهت که بسیاری از داده‌ها در عالم واقع مقدار دقیق ندارند این دستگاه‌ها کاربردهای بسیاری در علوم و مهندسی دارند. روش‌های تکراری برای حل دستگاه یکی از مهم‌ترین مسائل محاسباتی در محاسبات علمی هستند. روش مینیمم مانده، از جمله روش‌های تکراری زیرفضای کرالیف است که برای حل دستگاه‌های خطی متقارن استفاده می‌شود. روش مینیمم مانده از تجزیه QR ماتریس سه قطری حاصل از فرآیند لانکروس استفاده می‌کند. روش مینیمم مانده QLP از تجزیه QLP استفاده می‌کند. این روش برای دستگاه‌های بد وضع، جواب دقیق‌تری نسبت به روش مینیمم مانده ارائه می‌دهد. در این مقاله از روش مینیمم مانده-QLP برای حل دستگاه معادلات خطی فازی استفاده می‌گردد و در آخر مثال عددی ارائه می‌گردد و جواب به دست آمده با جواب دقیق دستگاه مقایسه می‌شود. واژه‌های کلیدی: حل دستگاه خطی فازی، فرآیند لانکروس، روش مینیمم مانده، روش مینیمم مانده-QLP. طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 65F10.

## ۱. پیش‌گفتار

دستگاه معادلات خطی فازی نقش مهمی در مسائلی مانند اقتصاد، بهینه‌سازی و مهندسی دارند. در این رابطه به دست آوردن یک مدل ریاضی و شیوه عددی جهت حل دستگاه خطی فازی اهمیت فراوانی دارد. در اکثر مسائل پارامترها ممکن است غیرقطعی یا برآورد نامشخص در مورد متغیر داشته باشند که به‌طور کلی از سوی برخی آزمایشات یا تجربیات یافت شده‌اند. بنابراین، این متغیرها ممکن است به‌عنوان یک عدد فازی در نظر گرفته شوند. مفهوم اعداد فازی در سال ۱۹۶۵ توسط پروفیسور لطفی عسگرزاده معرفی شد.

تعریف ۱.۱. یک عدد فازی دلخواه را با زوج مرتب شده تابع  $(\underline{u}(r), \overline{u}(r))$  ( $0 \leq r \leq 1$ ) که در شرایط زیر صدق کنند نمایش می‌دهیم:

(۱)  $\underline{u}(r)$  یک تابع غیرنزولی از چپ پیوسته کران‌دار روی  $[0, 1]$  است.(۲)  $\overline{u}(r)$  یک تابع غیرنزولی از راست پیوسته کران‌دار روی  $[0, 1]$  است.(۳)  $\underline{u}(r) \leq \overline{u}(r)$  به‌ازای  $0 \leq r \leq 1$ .برای اعداد فازی دلخواه  $\tilde{x} = (\underline{x}(r), \overline{x}(r))$  و  $\tilde{y} = (\underline{y}(r), \overline{y}(r))$  داریم:(۱)  $\tilde{x} = \tilde{y}$  اگر و تنها اگر  $\underline{y}(r) = \underline{x}(r)$  و  $\overline{y}(r) = \overline{x}(r)$ (۲)  $\tilde{x} + \tilde{y} = (\underline{x}(r) + \underline{y}(r), \overline{x}(r) + \overline{y}(r))$ (۳)  $\tilde{x} - \tilde{y} = (\underline{x}(r) - \underline{y}(r), \overline{x}(r) - \overline{y}(r))$ (۴)  $\tilde{x} - \tilde{y} = \tilde{x} + (-1)\tilde{y}$ (۵)  $k\tilde{x} = \begin{cases} [k\underline{x}(r), k\overline{x}(r)] & k < 0 \\ [k\underline{x}(r), k\overline{x}(r)] & k \geq 0 \end{cases}$

دستگاه خطی

$$(۱) \quad \begin{cases} a_{۱۱}\tilde{x}_1 + a_{۱۲}\tilde{x}_2 + \dots + a_{۱n}\tilde{x}_n = \tilde{b}_1 \\ a_{۲۱}\tilde{x}_1 + a_{۲۲}\tilde{x}_2 + \dots + a_{۲n}\tilde{x}_n = \tilde{b}_2 \\ \vdots \\ a_{n۱}\tilde{x}_1 + a_{n۲}\tilde{x}_2 + \dots + a_{nn}\tilde{x}_n = \tilde{b}_n \end{cases}$$

یک دستگاه معادلات خطی فاز می‌شود اگر ماتریس ضرایب آن حقیقی و بردار  $b$  فاز باشد.

تعریف ۲.۱. بردار فاز  $\tilde{x}$  که به صورت زیر نمایش داده می‌شود جواب دستگاه خطی فاز نامیده می‌شود:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}\tilde{x}_j = \tilde{b}_i, \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = \underline{b}_i, \quad \tilde{x}_i = (\underline{x}_i(r), \overline{x}_i(r))$$

در نتیجه برای حل دستگاه (۱) باید دستگاه  $۲n \times ۲n$  زیر حل شود:

$$\begin{cases} s_{۱,۱}\underline{x}_1 + \dots + s_{۱,n}\underline{x}_n + s_{۱,n+۱}\overline{x}_1 + \dots + s_{۱,۲n}\overline{x}_n = \underline{b}_1 \\ \vdots \\ s_{r,۱}\underline{x}_1 + \dots + s_{r,n}\underline{x}_n + s_{r,n+۱}\overline{x}_1 + \dots + s_{r,۲n}\overline{x}_n = \underline{b}_r \\ \vdots \\ s_{۲n,۱}\underline{x}_1 + \dots + s_{۲n,n}\underline{x}_n + s_{۲n,n+۱}\overline{x}_1 + \dots + s_{۲n,۲n}\overline{x}_n = \underline{b}_{۲n} \end{cases}$$

که  $s_{ij}$  ها به صورت زیر هستند:

اگر  $a_{ij} \geq 0$  آن‌گاه  $a_{ij} = s_{ij} = s_{i+n,j+n} = a_{i+n,j+n}$  و اگر  $a_{ij} \leq 0$  آن‌گاه  $a_{ij} = s_{ij} = s_{i+n,j+n} = a_{i+n,j+n}$  شامل همه داده‌های نامنفی و  $S_2$  شامل همه داده‌های نامثبت ماتریس  $A$  است. دستگاه حاصل به صورت  $SX = B$  که در آن  $S = s_{ij}$  ( $۱ \leq i, j \leq ۲n$ ) و  $X = (\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n, \overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n)^T$  و دستگاه حاصل به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2 & S_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{B}_1 \\ \overline{B}_2 \end{bmatrix}$$

[۶، ۱].

در ادامه روش‌های تکراری حل دستگاه مورد بررسی قرار داده می‌شود  
روش‌های تکراری برای حل دستگاه متقارن خطی  $Ax = b$  یا مربوط به مسئله کم‌ترین مربعات

$$\min \|x\|_2 \quad \text{s.t.} \quad x \in \arg \min_x \|Ax - b\|_2$$

که در آن  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  یک ماتریس تنک متقارن بزرگ و ممکن است منفرد باشد،  $b \in \mathbb{R}^n$  و  $A \neq 0$ ،  $b \neq 0$  است، مورد نظر هستند.

با مفروض بودن ماتریس متقارن  $A_{n \times n}$  و یک بردار واحد  $v_1$ ، الگوریتم لانکزوس [۳] هم‌زمان عناصر یک ماتریس سه قطری متقارن  $T$  و یک ماتریس یکا متعامد  $V_k = [v_1 \dots v_n]$  را به قسمی می‌سازد که

$$V^T A V = T$$

شود. شکل ماتریسی حاصل از الگوریتم به صورت:

$$A V_k = V_{k+1} \widetilde{T}_k$$

که در آن  $\widetilde{T}_k$  و  $V_k$  عبارت‌اند از:

$$\widetilde{T}_k \equiv \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & & & O \\ \beta_2 & \alpha_2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \beta_k & \alpha_k \\ O & & & & \beta_{k+1} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} T_k \\ \beta_{k+1} e_k^T \end{bmatrix}, \quad V_k \equiv [v_1 \quad \dots \quad v_k]$$

روش مینیمم مانده [۴] یک روش طبیعی استفاده از فرآیند لانکزوس برای حل دستگاه‌های خطی متقارن نامعین  $Ax = b$  یا  $\min_x \|Ax - b\|$  است. برای  $k < \ell$  اگر  $x_k = V_k y_k$  و  $y_k$  دلخواه باشند، بردار مانده به صورت زیر است:

$$r_k \equiv b - Ax_k = b - AV_k y_k = \beta_1 v_1 - V_{k+1} \widetilde{T}_k y_k = V_{k+1} (\beta_1 e_1 - \widetilde{T}_k y_k)$$

برای کمینه کردن  $r_k$ ، واضح است که در تکرار  $k$ ام باید  $\beta_1 e_1 - \widetilde{T}_k y_k$  کمینه شود. روش مینیمم مانده، تابع مانده را برای  $x \in \mathcal{K}_k(A, b)$  با انتخاب

$$(2) \quad y_k = \arg \min_{y \in \mathbb{R}^+} \|\widetilde{T}_k y - \beta_1 e_1\|$$

کمینه می‌کند. در روش مینیمم مانده-QLP [۲] از تجزیه QLP [۵] زیرمسئله  $\widetilde{T}_k$  (۲) برای همه  $k \leq \ell$  به صورت زیر استفاده می‌شود:

$$Q_k \widetilde{T}_k = \begin{bmatrix} R_k \\ 0 \end{bmatrix}, \quad R_k P_k = L_k, \quad \text{so that} \quad Q_k \widetilde{T}_k P_k = \begin{bmatrix} L_k \\ 0 \end{bmatrix}$$

که در آن  $Q_k$  و  $P_k$  ماتریس‌های متعامد،  $R_k$  ماتریس سه قطری بالایی و  $L_k$  ماتریس سه قطری پایینی هستند و هنگامی که  $k < \ell$  باشد،  $R_k$  و  $L_k$  نامنفرد هستند.

#### الگوریتم ۴: روش مینیمم مانده-QLP

- ورودی: ماتریس  $A$ ، بردار  $b$   
 خروجی: بردار  $x$ ، اسکالر  $\|r_k\|$   
 ۱: مقداردهی اولیه  
 • حلقه تکرار الگوریتم  
 ۲: فراخوانی فرآیند لانکزوس  
 ۳: محاسبه انعکاس سمت چپ گام قبلی  $(Q_{k-1})$   
 ۴: محاسبه انعکاس سمت چپ گام فعلی  $(Q_k)$   
 ۵: محاسبه انعکاس سمت راست گام قبلی  $(P_{k-2, k-1})$   
 ۶: محاسبه انعکاس سمت راست فعلی  $(P_{k-1, k})$   
 ۷: محاسبه انعکاس سمت راست بعدی  $(P_{k, k+1})$   
 ۸: محاسبه و بهروزرسانی مقادیر خروجی  
 • پایان حلقه تکرار

#### ۲. مثال عددی

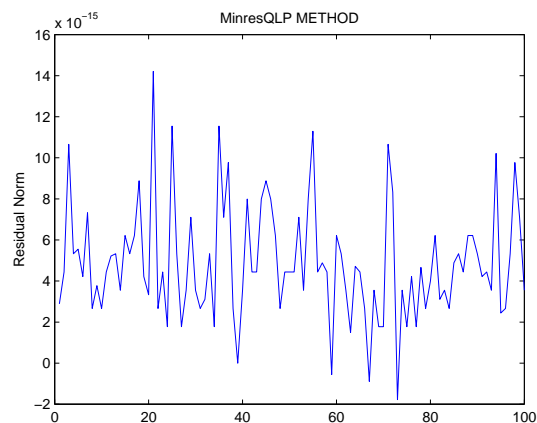
مثال ۱۰۲. دستگاه  $3 \times 3$  را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = (-27 + 7r, -7 - 13r) \\ 2x_1 + 7x_2 + 6x_3 = (1 + 15r, 40 - 24r) \\ -x_1 + 6x_2 + 10x_3 = (26 + 18r, 47 - 13r) \end{cases}$$

دستگاه به صورت  $SX = B$  است که در آن

$$B = \begin{bmatrix} -27 + 7r \\ 1 + 15r \\ 26 + 18r \\ -7 - 13r \\ 40 - 24r \\ 47 - 13r \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad S = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 7 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 10 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 & 6 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$

دستگاه با روش مینیمم مانده-QLP به ازای  $0 \leq r \leq 1$  حل گردید و در هر نقطه نرم تفاضل بردار مانده و بردار جواب دقیق محاسبه گردید در شکل زیر مشاهده می‌شود که جواب تقریبی به جواب دقیق نزدیک می‌باشد.



شکل ۱. نرم مانده جواب دستگاه با روش مینیمم مانده-QLP

### ۳. نتیجه

در این مقاله روش مینیمم مانده-QLP برای حل دستگاه فازی استفاده گردید و با توجه به جواب محاسبه شده و جواب دقیق و مقایسه آن دو با خطای ناچیز کارایی مطلوب روش مشاهده شد.

### مراجع

1. T. Allahviranloo, *Numerical methods for fuzzy system of linear equations*, Appl. Math. and comput. 155(2004), 493 – 502.
2. S. C. Choi, C. C. Paige and M. A. Saunders *MINRES-QLP: A Krylov subspace method for indefinite or singular symmetric systems*, SIAM Journal on Scientific Computing. 33(2011), no. 4, 1810–1836.
3. C. Lanczos, *An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators*, J. Research Nat. Bur. Standards. 45(1950), 255–282.
4. C. C. Paige and M. A. Saunders, *Solution of sparse indefinite systems of linear equations*, SIAM J. Numer. Anal. 12(1975), no. 4, 617–629.
5. G. W. Stewart, *The QLP approximation to the singular value decomposition*, SIAM J. Sci. Comput. SIAM J. Sci. Comput. 20(1999), no. 4, 1336–1348.
6. X. Wang Z. Zhong, M. Ha, *Iteration algorithms for solving a system of fuzzy linear equations* fuzzy Sets Syst. 119(2001) 121–128.

پست الکترونیکی: [Parisa1210ms@gmail.com](mailto:Parisa1210ms@gmail.com)

پست الکترونیکی: [fazeli@yazd.ac.ir](mailto:fazeli@yazd.ac.ir)

پست الکترونیکی: [n.bidabadi@yazd.ac.ir](mailto:n.bidabadi@yazd.ac.ir)

## یک روش تکراری کارآمد برای حل معادله دیفرانسیل وندریل

الهام چاکرالاحسینی ابرقویی\* و محمد حیدری  
بخش ریاضی، دانشگاه یزد، یزد، ایران

چکیده. در این پژوهش، قصد داریم یک روش عددی تکراری برای حل معادله دیفرانسیل وندریل به عنوان یک مسئله کاربردی در فیزیک ارائه کنیم. اساس این روش تبدیل معادله وندریل به دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول و ترکیب روش نقطه ثابت و روش دوزنقه‌ای تعمیم‌یافته می‌باشد. نتایج عددی حاصل از این روش با نتایج حاصل از روش رانگ-کوتا مرتبه ۴۵ مقایسه شده و دقت مطلوبی از روش پیشنهادی حاصل شده است.  
واژه‌های کلیدی: روش نقطه ثابت، روش دوزنقه‌ای تعمیم‌یافته، معادله وندریل.  
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 34C15, 65D30, 70E17.

### ۱. مقدمه

در بسیاری از زمینه‌ها از جمله علوم مهندسی و فیزیک، می‌توان مسائل را با معادلات دیفرانسیل غیرخطی مدل‌سازی نمود. در علوم ریاضی، تلاش‌های زیادی در جهت تجزیه و تحلیل انواع معادلات دیفرانسیل و فراهم کردن ابزارهای لازم برای حل تحلیلی آن‌ها انجام شده است. متأسفانه اکثر این مسائل دارای جواب تحلیلی یا شکل بسته‌ی جواب دقیق نمی‌باشند. از این روست که روش‌های عددی به عنوان ابزارهایی کارآمد در حل معادلات دیفرانسیل مورد توجه می‌باشند.  
معادله دیفرانسیل وندریل<sup>۱</sup> یک مدل ریاضی از نوسانات خودپایدار یک مدار الکتریکی لامپ سه‌قطبی است [۲] و اولین بار در سال ۱۹۲۰ توسط یک فیزیک‌دان هلندی به نام بالتازار وندریل<sup>۲</sup> معرفی گردید [۴]. معادله دیفرانسیل وندریل به صورت زیر بیان می‌شود:

$$(1) \quad y'' - \mu(1 - y^2)y' + y = 0, \quad y(0) = A, \quad y'(0) = B,$$

که در آن  $\mu \geq 0$  یک پارامتر ثابت و معرف درجه غیرخطی بودن و قدرت میرایی مسئله است. برای  $\mu = 0$ ، معادله‌ی (۱) به معادله‌ی حرکت هماهنگ ساده  $y'' + y = 0$  تبدیل می‌شود. هنگامی که  $y > 1$ ، عبارت  $-\mu(1 - y^2)$  مثبت بوده و سیستم دارای یک رفتار میرا (اتلاف انرژی) و هنگامی که  $y < 1$  عبارت  $-\mu(1 - y^2)$  منفی بوده و سیستم دارای یک رفتار برون‌گه-یخته (جذب انرژی) می‌باشد.

در این پژوهش قصد داریم تا با ارائه یک روش عددی تکراری بر اساس روش نقطه ثابت و روش انتگرال‌گیری دوزنقه‌ای تعمیم یافته به حل عددی معادله وندریل روی دامنه بزرگ بپردازیم.

### ۲. روش پیشنهادی

در این بخش به شرح روش عددی تکراری براساس روش انتگرال‌گیری دوزنقه‌ای تعمیم‌یافته برای دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

$$(2) \quad \begin{cases} u' = f(x, u, v), & u(a) = \alpha, \\ v' = g(x, u, v), & u(b) = \beta, \end{cases} \quad x \in [a, b],$$

می‌پردازیم. بدین منظور ابتدا قضیه زیر را در نظر می‌گیریم:

قضیه ۱.۰۲ [۱] (روش انتگرال‌گیری دوزنقه‌ای تعمیم‌یافته) فرض کنید  $f \in C^4[a, b]$  باشد، در این صورت عددی مانند  $\mu \in (a, b)$  موجود است به طوری که:

$$(3) \quad \int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{4} [f(a) + f(b)] - \frac{(b-a)^2}{12} [f'(b) - f'(a)] + E(f),$$

که در آن

$$|E(f)| \leq \frac{(b-a)^5}{720} \|f^{(4)}(\mu)\|.$$

<sup>2</sup> Balthasar Van der Pol

<sup>1</sup> Van der Pol differential equation

\* ارائه‌دهنده

رابطه (۳) به فرمول انتگرال گیری دوزنقه ای تعمیم یافته مشهور است که نخستین بار توسط پتر<sup>۳</sup> مطرح شد [۲]. با توجه به شرایط قضیه ۱.۲ مشاهده می شود که خطای رابطه ی انتگرال گیری وابسته به مشتق چهارم تابع  $f$  است. در [۱] تخمین های دیگری از خطای روش انتگرال گیری (۳) بر اساس مشتق سوم تابع و شرط لیپ-شیتز به صورت زیر مطرح شده است:

$$(۴) \quad |E(f)| \leq \begin{cases} \frac{(b-a)^4}{16} \|f^{(4)}\|, & f \in C^4[a, b], \\ \frac{(b-a)^5}{72} L, & f^{(4)} \in Lip[a, b], \end{cases}$$

که در آن  $L$  ثابت لیپ-شیتز مشتق مرتبه ی سوم تابع  $f$  است. حال افزایش یکنواخت از بازه  $[a, b]$  را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$(۵) \quad h = \frac{b-a}{n}, \quad x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

در این صورت می توان بر اساس افراز (۵) شکل مرکب رابطه ی انتگرال گیری (۳) را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$(۶) \quad \int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{n} \left[ f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b) \right] - \frac{(b-a)^4}{12n^3} [f'(b) - f'(a)] + E(f).$$

برای پیاده سازی روش پیشنهادی، با انتگرال گیری از طرفین رابطه (۲) و استفاده از شرایط اولیه مسئله به دستگاه معادلات انتگرال زیر خواهیم رسید:

$$(۷) \quad \begin{cases} u(x) = \alpha + \int_a^x f(s, u(s), v(s)) ds, \\ v(x) = \beta + \int_a^x g(s, u(s), v(s)) ds. \end{cases}$$

حال بر اساس ایده روش نقطه ثابت می توان دنباله تکراری زیر را برای یافتن جواب دستگاه معادلات انتگرال (۷) تشکیل داد:

$$(۸) \quad \begin{cases} u_m(x) = \alpha + \int_a^x f(s, u_{m-1}(s), v_{m-1}(s)) ds, \\ v_m(x) = \beta + \int_a^x g(s, u_{m-1}(s), v_{m-1}(s)) ds. \end{cases}$$

در این قسمت یکی از زیر بازه های بازه  $[a, b]$  را انتخاب کرده و آن را به  $N$  قسمت تقسیم می کنیم. بدون آن که به کلیت مسئله خللی وارد شود، زیر بازه  $[x_0, x_0 + h]$  را به صورت زیر افراز می کنیم:

$$t_i = x_0 + \frac{ih}{N}, \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

ایده اصلی روش یافتن مقادیر توابع  $u_m$  و  $v_m$  در نقاط گره ای  $t_i$  در هر تکرار می باشد. برای این هدف ابتدا با جایگذاری نقاط گره ای در (۸) داریم:

$$(۹) \quad \begin{cases} u_m(t_i) = \alpha + \int_{t_0}^{t_i} f(s, u_{m-1}(s), v_{m-1}(s)) ds, \\ v_m(t_i) = \beta + \int_{t_0}^{t_i} g(s, u_{m-1}(s), v_{m-1}(s)) ds. \end{cases}$$

حال با استفاده از رابطه ی (۶) و صرف نظر کردن از جمله ی خطای  $E(f)$  می توان رابطه (۹) را به صورت تقریبی به شکل زیر محاسبه کرد:

$$(۱۰) \quad \begin{aligned} u_m(t_i) = & \alpha + \frac{h}{N} [f(t_0, u_{m-1}(t_0), v_{m-1}(t_0)) + 2 \sum_{j=1}^{i-1} f(t_j, u_{m-1}(t_j), v_{m-1}(t_j)) + f(t_i, u_{m-1}(t_i), v_{m-1}(t_i))] \\ & - \frac{h^4}{12N^3} \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(t_i, u_{m-1}(t_i), v_{m-1}(t_i)) + \frac{\partial f}{\partial y}(t_i, u_{m-1}(t_i), v_{m-1}(t_i)) f(t_i, u_{m-2}(t_i), v_{m-2}(t_i)) - \frac{\partial f}{\partial x}(t_0, u_{m-1}(t_0), v_{m-1}(t_0)) \right. \\ & \left. - \frac{\partial f}{\partial y}(t_0, u_{m-1}(t_0), v_{m-1}(t_0)) f(t_0, u_{m-2}(t_0), v_{m-2}(t_0)) \right], \quad i = 0, 1, 2, \dots, N, \end{aligned}$$

$$(۱۱) \quad \begin{aligned} v_m(t_i) = & \beta + \frac{h}{N} [g(t_0, u_{m-1}(t_0), v_{m-1}(t_0)) + 2 \sum_{j=1}^{i-1} g(t_j, u_{m-1}(t_j), v_{m-1}(t_j)) + g(t_i, u_{m-1}(t_i), v_{m-1}(t_i))] \\ & - \frac{h^4}{12N^3} \left[ \frac{\partial g}{\partial x}(t_i, u_{m-1}(t_i), v_{m-1}(t_i)) + \frac{\partial g}{\partial y}(t_i, u_{m-1}(t_i), v_{m-1}(t_i)) g(t_i, u_{m-2}(t_i), v_{m-2}(t_i)) - \frac{\partial g}{\partial x}(t_0, u_{m-1}(t_0), v_{m-1}(t_0)) \right. \\ & \left. - \frac{\partial g}{\partial y}(t_0, u_{m-1}(t_0), v_{m-1}(t_0)) g(t_0, u_{m-2}(t_0), v_{m-2}(t_0)) \right], \quad i = 0, 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

با توجه به ساختار روابط (۱۰) و (۱۱) مشاهده می‌شود که برای محاسبه مقادیر  $u_m(t_i)$  و  $v_m(t_i)$  به مقادیر دو تکرار قبلی یعنی  $u_{m-2}(t_i)$  و  $v_{m-2}(t_i)$ ،  $u_{m-1}(t_i)$  و  $v_{m-1}(t_i)$  نیازمندیم. لذا روند تکراری نیاز به دو شروع اولیه

$$(12) \quad \begin{cases} v_0(t_i), & \begin{cases} u_0(t_i), \\ v_1(t_i), & \begin{cases} u_1(t_i), \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

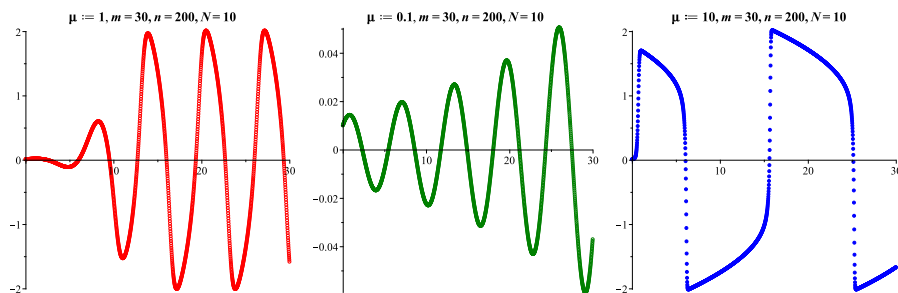
دارد. با توجه به ساختار معادله دیفرانسیل، شرایط اولیه مسئله و روش انتگرال‌گیری (۶) این شروع‌ها به صورت زیر انتخاب می‌شوند:

$$(13) \quad \begin{cases} u_0(t_i) = \alpha, \\ v_0(t_i) = \beta, \\ u_1(t_i) = u_0(t_i) + \frac{h}{2N} \left( f(t_0, u_{m-1}(t_0), v_{m-1}(t_0)) + 2 \sum_{j=1}^{i-1} f(t_j, u_{m-1}(t_j), v_{m-1}(t_j)) + f(t_i, u_{m-1}(t_i), v_{m-1}(t_i)) \right), \\ v_1(t_i) = v_0(t_i) + \frac{h}{2N} \left( g(t_0, u_{m-1}(t_0), v_{m-1}(t_0)) + 2 \sum_{j=1}^{i-1} g(t_j, u_{m-1}(t_j), v_{m-1}(t_j)) + g(t_i, u_{m-1}(t_i), v_{m-1}(t_i)) \right), \end{cases}$$

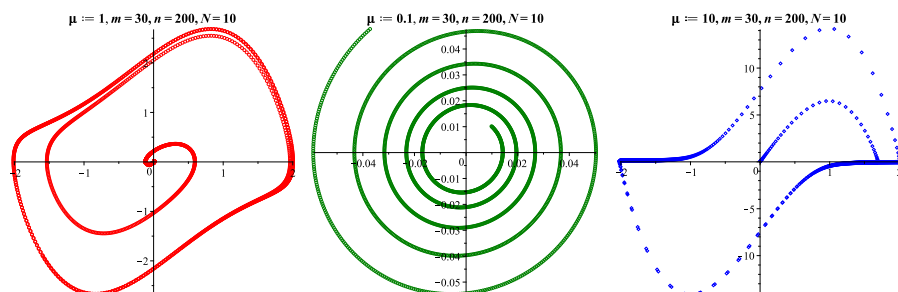
برای  $i = 0, 1, 2, \dots, N$ .

### ۳. نتایج عددی

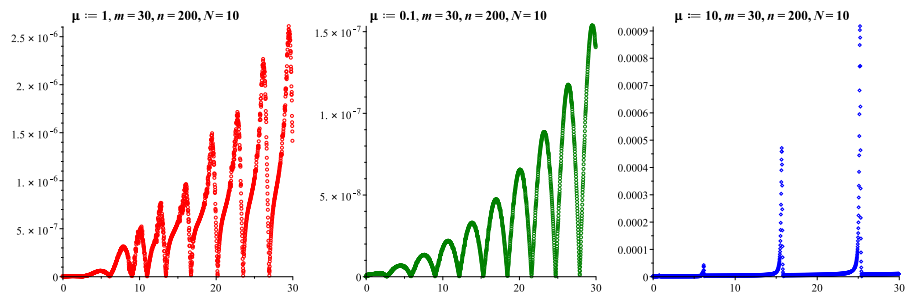
به منظور نشان دادن دقت روش پیشنهادی برای حل مسئله وندریل، یک مقایسه بین این روش ( $m = 30, n = 200, N = 10$ ) و روش رانگ-کوتای مرتبه‌ی ۴۵ روی بازه‌ی  $[0, 30]$  انجام شده‌است. شکل‌های ۱ و ۲ به ترتیب بیانگر نمودارهای جواب تقریبی و فاز در حالت‌های مختلف  $\mu$  می‌باشد. همچنین شکل ۳ مقادیر خطا را به ازای  $\mu = 0.1$ ،  $\mu = 1$  و  $\mu = 10$  نشان می‌دهد. توجه داریم که در این نمودارها، جواب عددی حاصل از روش رانگ-کوتای مرتبه‌ی ۴۵ به عنوان جواب دقیق فرض شده‌است.



شکل ۱. نمودارهای جواب تقریبی به ازای مقادیر مختلف  $\mu$



شکل ۲. نمودارهای فاز به ازای مقادیر مختلف  $\mu$



شکل ۳. نمودارهای خطا به ازای مقادیر مختلف  $\mu$

### مراجع

1. A. Bica, *The remainder estimation in terms of the third derivative for the successive approximations method applied to ODE's*, *Proceedings of the 11th Conference on Applied and Industrial Math*, May 29-31, 2003, Oradea, vol.2, 5-12.
2. K. Petr, *Über eine Formel für numerische Berechnung der bestimmten Integrale*, *Casopis propestovani Matematiky a Fysiky*, 44, 454-455, (1915).
3. B. Van der Pol, *A theory of the amplitude of free and forced triode vibrations*, *Radio. Rev.* 1 (1920) 701-710. 754-762.
4. B. Van der Pol, *On "relaxation-oscillations"*, *Phil. Mag.* 2 (1926) 978-992.

پست الکترونیکی: [ehoseini039@gmail.com](mailto:ehoseini039@gmail.com)  
 پست الکترونیکی: [m.heydari@yazd.ac.ir](mailto:m.heydari@yazd.ac.ir)



## مسئله برنامه‌ریزی خطی چند هدفه فازی شهودی با توابع عضویت و عدم عضویت

سارا کرنگیش\*  
دانشکده ریاضی، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران  
و فرهاد حمیدی  
دانشکده ریاضی، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران

چکیده. در این مقاله مسئله‌های برنامه‌ریزی خطی فازی شهودی چند هدفه با استفاده از اعداد فازی شهودی مثلثی با محدودیت‌های مختلف مورد بررسی قرار می‌گیرد. ما مسئله را به یک مسئله برنامه‌ریزی فازی یک هدفه تبدیل می‌کنیم سپس با استفاده از توابع عضویت (خطی و غیرخطی) مسئله را به مسئله برنامه‌ریزی خطی/ غیرخطی اعداد قطعی تبدیل می‌کنیم که توسط روش‌های برنامه‌ریزی مناسب اعداد قطعی حل می‌شود. این روش با کمک یک مثال عددی نشان داده شده و اثربخشی توابع مختلف عضویت مورد بحث است. **واژه‌های کلیدی:** عدد فازی شهودی، تابع عضویت، مسئله برنامه‌ریزی خطی چند هدفه. **طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]:** 54E70, 46S50.

### ۱. پیش‌گفتار

مسئله برنامه‌ریزی خطی چند هدفه برنامه‌های کاربردی مهمی در بسیاری از زمینه‌های مهندسی و مدیریت دارد. آتاناسو<sup>۱</sup> (۱۹۸۶) مفهوم تئوری مجموعه فازی شهودی IFS را ارائه می‌دهد مزیت عمده IFS بر مجموعه فازی این است که IFS میزان پذیرش و درجه عدم پذیرش را جدا می‌کند بلمن<sup>۲</sup> و زاده<sup>۳</sup> (۱۹۷۰) پیشنهاد داده‌اند که تصمیم فازی می‌تواند به عنوان مجموعه فازی ایجاد شده توسط تقاطع اهداف فازی و اهداف محدودیت تعریف شود. در این مقاله IFMOLPP با محدودیت‌های ترکیبی پیشنهاد داده شده است که ضرایب هدف و همچنین توابع محدودیت‌ها و سمت راست محدودیت‌ها TIFN هستند. سپس دقت برای انتقال IFMOLPP به MOLPP اعداد قطعی معادل استفاده می‌شود. پیشینه‌ی گسترده‌ای برای رتبه‌بندی TIFN با سطوح مختلف توصیه شده وجود دارد. با این حال، برای سهولت کار از تابع دقت استفاده می‌کنیم و در پایان یک مثال عددی برای توجیه ارائه کرده‌ایم.

### ۲. تعاریف اولیه

**تعریف ۱.۲.** فرض کنید  $X$  یک مجموعه جهانی باشد سپس  $\tilde{A}^I = \{X, u_{\tilde{A}^I}(x), v_{\tilde{A}^I}(x); x \in X\}$  مجموعه فازی شهودی در این مجموعه است به طوری که  $u_{\tilde{A}^I}, v_{\tilde{A}^I} : X \rightarrow [0, 1]$  و به ازای هر  $x \in X$  مقدار  $0 \leq u_{\tilde{A}^I}(x) + v_{\tilde{A}^I}(x) \leq 1$  به عنوان درجه عضویت و  $v_{\tilde{A}^I}$  به عنوان درجه عدم عضویت معرفی می‌شود.

**تعریف ۲.۲.** یک  $\tilde{A}^I$  عدد فازی شهودی مثلثی (TIFN)، با تابع عضویت  $u_{\tilde{A}^I}$  و تابع غیر عضویت  $v_{\tilde{A}^I}$  به صورت زیر نمایش داده می‌دهیم

$$u_{\tilde{A}^I} = \begin{cases} \frac{X-a_1}{a_2-a_1} & a_1 < X \leq a_2 \\ 1 & X = a_2 \\ \frac{a_3-X}{a_3-a_2} & a_2 < X \leq a_3 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

و

$$v_{\tilde{A}^I} = \begin{cases} \frac{a_2-X}{a_2-a_1} & a'_1 < X \leq a_2 \\ 1 & X = a_2 \\ \frac{X-a_2}{a_3-a_2} & a_2 < X \leq a_3 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

<sup>3</sup> Zadeh

<sup>2</sup> Bellman

<sup>1</sup> Atanassov

\* ارائه‌دهنده

تعریف ۳.۲. (تابع دقت): فرض کنید  $\tilde{A}^I = (a_1, a_2, a_3; a'_1, a'_2, a'_3)$  یک TIFN باشد تابع دقت  $\tilde{A}^I$  با  $F(\tilde{A}^I)$  نشان داده شده و با

$$(\tilde{A}^E) = \frac{(a_1 + 2a_2 + a_3) + (a'_1 + 2a'_2 + a'_3)}{8}$$

تعریف شده است.

### ۳. شکل‌گیری مسئله

مسئله کلی برنامه‌ریزی خطی چند هدفه MOLPP با محدودیتهای مختلف می‌تواند به شرح زیر باشد:

$$\begin{aligned} \min Z &= [Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_k] \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j &\geq b_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, m_1, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j &\leq b_i, \quad i = m_1 + 1, m_1 + 2, m_1 + 3, \dots, m_2, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j &= b_i, \quad i = m_2 + 1, m_2 + 2, m_2 + 3, \dots, m, \\ X_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots, n. \end{aligned}$$

ابتدا مسئله برنامه‌ریزی خطی چند هدفه (IMOLPP) را به مسئله برنامه‌ریزی خطی چند هدفه فازی شهودی (IFMOLPP) تبدیل می‌کنیم و با استفاده از تابع دقت که از نوع خطی است مسئله (IFMOLPP) را به MOLPP اعداد قطعی تبدیل می‌کنیم بعد از آن که مسئله را یک هدفه کردیم دوباره با استفاده از تابع دقت آن را به مسئله برنامه‌ریزی (LPP) تبدیل می‌کنیم و حل می‌کنیم که شکل آن به صورت زیر می‌باشد

$$\begin{aligned} \min z' \\ \text{s.t.} \\ \sum_{j=1}^n a'_{ij} X_j &\geq b'_i \quad i = 1, 2, \dots, m_1 \\ \sum_{j=1}^n a'_{ij} X_j &\leq b'_i \quad i = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m_2 \\ \sum_{j=1}^n a'_{ij} X_j &= b'_i \quad i = m_2 + 1, m_2 + 2, \dots, m_3 \\ X_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots, n. \end{aligned}$$

مثال ۱.۳. IFMOLPP زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \min \tilde{Z}_1^I &= \tilde{\delta}^I x_1 \oplus \tilde{\gamma}^I x_2 \\ \min \tilde{Z}_2^I &= \tilde{\gamma}_a^I x_1 \oplus \tilde{\gamma}^I x_2 \\ \text{s.t. } \tilde{\gamma}_b^I x_1 \oplus \tilde{\gamma}^I x_2 &\geq \tilde{\gamma}^I \delta^I \\ \tilde{\gamma}_a^I x_1 \oplus \tilde{\gamma}_b^I x_2 &\geq \tilde{\gamma}^I \delta^I \\ \tilde{\gamma}^I x_1 \oplus \tilde{\delta}_b^I x_2 &\geq \tilde{\gamma}^I \delta^I \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned} \quad (1)$$

در اینجا پارامترهای برآورد شده توسط DM به شکل زیر است

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}^I &= (22, 25, 25; 18, 25, 25), \quad \tilde{\omega}^I = (9, 10, 10; 8, 10, 10), \quad \tilde{\omega}^I = (50, 50, 55; 50, 50, 60). \\ \tilde{\delta}^I &= (4, 5, 6; 4, 5, 7), \quad \tilde{\tau}^I = (3, 3, 4; 3, 3, 4/5), \quad \tilde{\tau}_a^I = (2, 2, 3; 2, 2, 4), \quad \tilde{\gamma}^I = (7, 7, 7/5; 6, 7, 8), \\ \tilde{\gamma}_b^I &= (1/5, 2, 2; 1, 2, 2), \quad \tilde{\gamma}_a^I = (0/5, 1, 1; 4, 5, 7), \quad \tilde{b}^I = (1, 1, 1; 0/5, 1, 2), \quad \tilde{\varphi}^I = (3, 4, 4; 2, 4, 4).\end{aligned}$$

#### ۴. نتایج اصلی

در این مقاله IFMOLPP را پیشنهاد کرده و یک روش برای حل آن ارائه کردیم. IFMOLPP با استفاده از تابع دقت به MOLPP و با استفاده از تکنیک عدد سازی به مسئله برنامه‌ریزی هدف فازی تبدیل می‌شود و با حل یک مسئله عددی آن را نشان دادیم در هنگام طراحی یک مدل در محیط فازی شهودی IFE توابع عضویت و غیر عضویت نقش مهمی را ایفا می‌کند.

#### مراجع

1. K. T. Atanassov(1986). Intuitionistic fuzzy sets. Fuzzy Sets and Systems, 20, 87–96.
2. M. D. L. Asuncin, L. Castillo, J. F. Olivares, O. G. Prez, A. Gonzlez, & F. Palao. (2007). Handling fuzzy temporal constraints in a planning environment. Annals of Operations Research, 155, 391– 415.
3. R. E. Bellman, & L. A. Zadeh(1970). *Decision making in a fuzzy environment*. Management Science, 17, 141–146.

پست الکترونیکی: [sara.karangish73@gmail.com](mailto:sara.karangish73@gmail.com)

پست الکترونیکی: [fhamidi1385@gmail.com](mailto:fhamidi1385@gmail.com)

ارائه‌های پوستری

ترکیبیات و علوم کامپیوتر

## پیشنهاد یک معماری برای بایگانی تکلیف‌های برنامه‌نویسی با امکان تشخیص تقلب‌های احتمالی

زهرا کریمی\*

گروه علوم کامپیوتر، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد، ایران

و معصومه قاسمی

گروه علوم کامپیوتر، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد، ایران

چکیده. واکنش مناسب به تقلب در تکلیف‌های برنامه‌نویسی، یکی از مسئولیت‌های مهم اساتید علوم کامپیوتر است. به منظور کمک به اساتید در این راستا، روش‌هایی برای کشف تقلب در تکلیف‌های برنامه‌نویسی در پژوهش‌های قبلی ارائه شده‌است. عموم این روش‌ها بر الگوریتم تشخیص همانندی بین دو برنامه یا مجموعه‌ای از برنامه‌ها تمرکز کرده و تکلیف‌های احتمالاً همانند را مشخص می‌کنند. امروزه به دلیل وجود شبکه‌های اجتماعی و انواع گسترده تعامل بین دانشجویان، تقلب، محدود به یک کلاس، یک ترم تحصیلی یا حتی یک دانشگاه نیست. بنابراین مجموعه‌ی تکلیف قابل بررسی بسیار بزرگ و ناهمگون بوده و به مدیریت و سازماندهی نیازمند است. به این منظور، در این پژوهش، معماری یک سامانه‌ی اطلاعاتی برای بایگانی تکلیف‌های برنامه‌نویسی پیشنهاد شده که علاوه بر بایگانی و سازماندهی تکلیف‌ها و تشخیص تکلیف‌های احتمالاً همانند، امکان مشاهده‌ی همزمان آن‌ها را نیز فراهم می‌آورد. معماری پیشنهادی با استفاده از UML توصیف شده، در زبان پایتون پیاده‌سازی شده است. در ضمن برای مطمئن شدن از کارکرد ادعایی مولفه همانندجو تست‌هایی با کمک دادگان مسابقات کدگول انجام شد. با عملیاتی‌شدن این معماری نه تنها بانک تکلیف‌های برنامه‌نویسی دانشگاهی تکمیل خواهد شد بلکه امکان برخورد با تقلب‌های احتمالی نیز به صورت موثرتر فراهم می‌شود.

واژه‌های کلیدی: سامانه‌های اطلاعاتی، تکلیف‌های برنامه‌نویسی، کشف تقلب.

طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 68U35 97Q99.

### ۱. پیش‌گفتار

با توجه به گسترش حرکت‌های غیراخلاقی در فضای علمی و در راستای آموزش و اشاعه‌ی اخلاق حرفه‌ای در دانشگاه‌ها لازم است اساتید از همان سال‌های اول ورود دانشجویان به دانشگاه، نسبت به تقلب در تکلیف‌های درسی از جمله تکلیف‌های برنامه‌نویسی حساس بوده و به صورت مناسب با آن برخورد کنند. تقلب در تکلیف برنامه‌نویسی یا به عبارت ساده‌تر برنامه‌ی کپی، برنامه‌ای است که همه یا بخشی از آن، توسط کس دیگری نوشته شده باشد و دانشجو، آن را بدون تغییر یا با انجام تغییرات و بدون استناد به برنامه‌نویس اصلی به عنوان کار خودش به استاد درس تحویل دهد. استاد درس در هنگام ارزیابی دانشجو باید تقلب‌ها را تشخیص دهد حتی اگر دانشجو از شیوه‌هایی برای پنهان کردن تقلب استفاده کرده باشد [۱]. از آنجا که کشف تقلب به صورت دستی وقت‌گیر و خسته‌کننده است، در پژوهش‌های پیشین ابزارهای همانندجویی برای کشف تقلب در تکلیف‌های برنامه‌نویسی پیشنهاد شده‌است که از مهم‌ترین آن‌ها می‌توان به ابزارهای متن‌باز و رایگان Plaggie [۲]، Sherlock-Warwick [۳] و JPLAG [۴] اشاره کرد. تمرکز پژوهش‌های پیشین، بیشتر روی الگوریتم پیشنهادی برای تشخیص برنامه‌های همانند و در نهایت ارائه‌ی یک ابزار مناسب به این منظور بوده است. انواع روش‌های مطرح در پژوهش‌های قبلی در مقاله‌ی مروری [۱] خلاصه شده که به دلیل محدودیت تعداد صفحه، در این مقاله از توضیح جزئیات آن خودداری شده‌است. امروزه از یک طرف بی‌انگیزگی و کم‌تلاشی دانشجویان در فضای آموزشی باعث گسترش حرکت‌های غیراخلاقی و رواج تقلب شده است. از طرف دیگر وجود فراگیر اینترنت، گوشی‌های هوشمند و شبکه‌های مجازی بستر تقلب را به صورت گسترده فراهم کرده است. بنابراین روش‌های موجود برای کشف تقلب باید همانندها را در مجموعه‌های بزرگ و ناهمگون تکلیف جستجو کنند. این کار، نه تنها کند بوده بلکه تعداد تشخیص‌های اشتباه آن زیاد شده و وقت استاد را می‌گیرد. بایگانی تکلیف‌های برنامه‌نویسی در یک سامانه‌ی اطلاعاتی، به اساتید کمک می‌کند تکلیف‌ها را سازماندهی کرده و به صورت مناسب از الگوریتم‌های همانندجو استفاده کنند. در این راستا در پژوهش حاضر، یک معماری پیشنهاد شده که علاوه بر بایگانی و سازماندهی تکلیف‌ها، تقلب‌های احتمالی را نیز مشخص کند. معماری نرم‌افزار، بخش‌های نرم‌افزار و رابطه‌ی بین آن‌ها را توصیف می‌کند. در معماری پیشنهادی، پنج بخش «بانک تکلیف‌ها» برای سازماندهی تکلیف‌ها، «موتور جستجو» برای انتخاب مجموعه‌ی همسان از تکلیف‌ها، «همانندجو» برای کشف تقلب‌های احتمالی، «نمایش‌گر» برای بررسی بصری تقلب‌ها و «واسط کاربر» برای ارتباط مستقیم کاربر، دیده شده که پیاده‌سازی و تست هم شده‌اند.

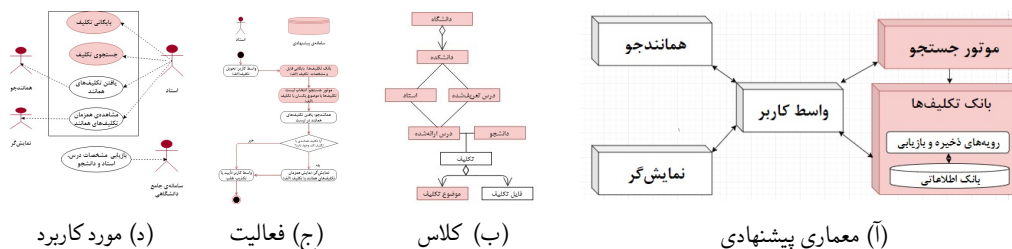
روش انجام کار بر مبنای مدل توسعه‌ی سریع<sup>۱</sup> بود. در این روش، بخش‌های مختلف به صورت جداگانه و حتی همزمان تکمیل می‌شوند، سپس بخش‌ها به هم متصل شده و معماری به صورت یک کل تست می‌شود. در این جا، ابتدا بخش «بانک تکلیف‌ها»، طراحی، پیاده‌سازی

و تست شد. سپس بخش «نمایش‌گر» و «هماندجو» تکمیل شدند. در مرحله‌ی بعد بخش «واسط کاربر» اضافه‌شد و بعد بخش «موتور جستجو» توسعه داده‌شد. در نهایت بخش‌های تکمیل‌شده به هم متصل شدند. از آن‌جا که در حال حاضر تکلیف‌های برنامه‌نویسی در دسترس نبودند، سامانه با استفاده از برنامه‌های موجود در آرشیو مسابقات برنامه‌نویسی گوگل تست شد. می‌توان گفت در پژوهش حاضر علاوه بر معرفی همانندجویی در حیطه‌ی تکلیف‌های برنامه‌نویسی، بستر لازم برای استفاده از این ابزارها نیز فراهم شده‌است. به این ترتیب با بررسی تقلب‌ها در تکلیف‌های برنامه‌نویسی علاوه بر رعایت عدالت در نمره‌دهی به اشاعه‌ی اخلاق حرفه‌ای نیز کمک خواهد شد. نمونه این سامانه‌ها در برخی زیرساخت‌های آموزش الکترونیکی مثل academia هم موجود است. اما مطابق بررسی‌های انجام شده نمونه کاملی با این ایده که با سامانه‌های آموزش دانشگاهی یکپارچه سازی شود و امکان تقلب در طول ترم‌های گوناگون بررسی شود یا وجود ندارد و یا این‌که به شفافیت آنچه در اینجا بیان شده نیست. در ادامه، ابتدا در بخش دوم، معماری پیشنهادی و جزئیات آن توصیف می‌شود. سپس در بخش سوم، مشخصات پیاده‌سازی و تست، بیان می‌گردد و در نهایت در بخش آخر، خلاصه‌ی پژوهش جمع‌بندی شده و کارهای آینده لیست می‌شوند.

## ۲. معماری پیشنهادی

بخش‌های معماری پیشنهادی (شکل ۱) در زیر توضیح داده شده‌اند:

- (۱) بانک تکلیف‌ها: همان‌طور که مشاهده می‌شود در این بخش، علاوه بر بانک اطلاعاتی یعنی جدول‌های داده‌ای، برنامه‌های ذخیره و بازیابی نیز وجود دارند.
  - (۲) موتور جستجو: در این بخش، امکان جستجو روی ویژگی‌هایی مثل موضوع تکلیف، اسم درس، اسم استاد، اسم دانشکده، اسم دانشگاه، موضوع و در نهایت انتخاب یک لیست از تکلیف‌ها فراهم شده‌است.
  - (۳) همانندجو: در این بخش، تکلیف‌های همانند در یک لیست از تکلیف‌ها مشخص می‌شوند.
  - (۴) نمایش‌گر: این بخش، مسئولیت نمایش همزمان فایل‌های همانند را به عهده دارد. به طوری که قسمت‌های همانند، رنگی شوند.
  - (۵) واسط کاربر: کاربر (استاد) با این بخش کار کرده و از طریق آن، دستور مناسب را از بخش مربوطه فراخوانی می‌کند.
- هر کدام از این اجزاء می‌توانند به صورت یک سرویس مستقل در نظر گرفته شوند به طوری که توسط سامانه‌های جامع دانشگاهی یا سامانه‌های مدیریت کلاس و تکلیف قابل فراخوانی باشند. جزئیات معماری پیشنهادی به زبان UML توصیف شده‌است (شکل ۱). زبان UML<sup>۲</sup>، یک زبان گرافیکی مدل‌سازی، همه‌منظوره و استاندارد در زمینه‌ی مهندسی نرم‌افزار است که تعداد زیادی نماد و نمودار دارد و هم در صنعت و هم دانشگاه برای توصیف طرح‌ها استفاده می‌شود. در این پژوهش از نمودار مورد کاربرد برای توصیف امکانات کاربردی، از نمودار کلاس برای توصیف معماری داده‌ای و از نمودار فعالیت برای توصیف روند بایگانی، استفاده شده‌است. در ادامه جزئیات این نمودارها که در این‌جا در ابزار draw.io<sup>۳</sup> ترسیم شده‌اند، بیشتر توضیح داده می‌شوند.
- معماری داده‌ها در نمودار ۱ ب نشان داده شده‌است. در این نمودار کلاس، موجودیت‌هایی که ذخیره و بازیابی می‌شوند و رابطه‌ی بین



شکل ۱. نمودارهای UML برای توصیف جزئیات معماری پیشنهادی

قسمت‌های رنگی نوآوری هستند که در این پژوهش، پیشنهاد شده‌اند.

آن‌ها، توصیف می‌شوند. «تکلیف» و «فایل تکلیف» کلاس‌های اصلی برای ذخیره‌ی تکلیف هستند و سایر کلاس‌ها که پررنگ شده‌اند مسئولیت ذخیره‌ی ویژگی‌های زمینه‌ای را به عهده دارند. داده‌های مربوط به کلاس‌های «تکلیف»، «فایل تکلیف» و «موضوع تکلیف» در سامانه‌ی پیشنهادی تکمیل می‌شود در حالی که داده‌های مربوط به کلاس‌های دیگر در سامانه‌ی جامع دانشگاهی تکمیل شده است و در این سامانه فقط از آن‌ها استفاده می‌شود. روند تحویل تکلیف با مشخص کردن بخش‌های مختلف معماری در نمودار فعالیت شکل ۱ ج نشان داده شده‌است. نمودار فعالیت در واقع

فلوچارت شیء‌گرایی است که روند انجام یک کار با استفاده از آن توصیف می‌شود. همان‌طور که مشاهده می‌شود وقتی استاد درس، یک تکلیف به‌طور مثال تکلیف الف را تحویل می‌گیرد، با استفاده از واسطه‌کاربر، درخواست بایگانی تکلیف را صادر می‌کند. در سامانه، ابتدا تکلیف و مشخصات آن در بخش «بانک تکلیف‌ها» ذخیره می‌شوند. در مرحله‌ی بعد با بهره‌گیری از مشخصات تکلیف، لیست تکلیف‌هایی که موضوع آن‌ها با موضوع تکلیف الف یکسان است، در بخش «موتور جستجو»، بازیابی می‌شوند. سپس برنامه‌های همانند با تکلیف الف، در لیست انتخابی و با استفاده از بخش «هماندجو» مشخص می‌شوند. برنامه‌های همانند در بخش «نمایش‌گر» نشان داده شده که استاد درس امکان مشاهده و بررسی آن‌ها و تأیید تقلب‌های احتمالی را دارد. شایان ذکر است که به محض ذخیره‌ی یک تکلیف توسط مدرس/کمک مدرس، خود به خود از روی شباهت موضوع، تکلیف‌های مشابه پیشنهاد داده شوند و الزماً انتخاب موضوع، با جستجوی دستی توسط استاد انجام نمی‌شود.

امکانات سامانه‌ی پیشنهادی و به‌عبارت دقیق‌تر جزئیات واسطه‌کاربر در نمودار مورد کاربرد ۱۰ نشان داده شده است. نمودار مورد کاربرد یکی از نمودارهای اصلی UML است که موردهایی را که در آن‌ها از سامانه استفاده می‌شود، نشان می‌دهد. در این نمودار، کاربران به‌صورت آدمک، موردهای استفاده به‌صورت بیضی و مرز سامانه به‌صورت کادر نشان داده می‌شوند. همان‌طور که مشاهده می‌شود استاد از این سامانه می‌تواند برای «بایگانی تکلیف»، «جستجوی تکلیف»، «یافتن تکلیف‌های همانند» و «مشاهده‌ی همزمان تکلیف‌های همانند» استفاده کند. همان‌طور که در شکل ۱۱ مشاهده می‌شود در تکمیل امکانات «یافتن تکلیف‌های همانند» و «مشاهده‌ی همزمان تکلیف‌ها» از ابزارهای خارجی «هماندجو» و «نمایش‌گر» استفاده شده که خارج از کادر و به صورت یک آدمک ترسیم شده‌اند. در ضمن مورد «بازیابی مشخصات درس، استاد و دانشجو» خارج از کادر ترسیم شده و به کاربر «سامانه‌ی جامع دانشگاهی» مربوط است. به این معنی که این امکان در سامانه‌ی پیشنهادی پیاده‌سازی نشده و در تکمیل آن از «سامانه‌ی جامع دانشگاهی» استفاده می‌شود.

### ۳. پیاده‌سازی و تست

معماری پیشنهادی در زبان برنامه‌نویسی پایتون<sup>۴</sup> پیاده‌سازی شده است. زبان پایتون یک زبان برنامه‌نویسی نسبتاً جدید، متن‌باز و آزاد است که به دلیل سادگی و خوانایی کدهای آن، اخیراً طرفداران زیادی پیدا کرده است. پایتون با داشتن کتابخانه‌های استاندارد و جامع، به سادگی می‌تواند ابزارهای مختلف را به هم متصل کند. به همین دلیل برای پیاده‌سازی معماری پیشنهادی این پژوهش، انتخاب شده‌است. برخی از مهم‌ترین ویژگی‌های پیاده‌سازی عبارتند از:

- (۱) بانک اطلاعاتی: به این منظور از SQLite 3<sup>۵</sup> استفاده شد. این سیستم متن‌باز و رایگان بوده، به زبان C نوشته شده و یکی از رایج‌ترین سیستم‌های مدیریت بانک اطلاعاتی است.
- (۲) موضوع تکلیف: برای توصیف موضوع از تعدادی کلیدواژه استفاده شد.
- (۳) همانندجو: در این جا از ابزار آماده jplag<sup>۶</sup> برای یافتن تقلب‌های احتمالی استفاده شده است.
- (۴) نمایش‌گر: به این منظور با کد پایتون، نمایش‌گر meld<sup>۷</sup> برای نمایش لیست فایل‌های همانند، فراخوانی شده‌است.
- (۵) تنظیمات پیش‌فرض در واسطه کاربر: جهت سهولت، برخی از تنظیمات مثل نام بانک SQLite، پوشه‌ی جاری تکلیف‌ها، اسم استاد، اسم درس و ترم به‌صورت پیش‌فرض تعریف شده‌اند.
- (۶) رابط کاربری: در حال حاضر رابط کاربری به صورت خط فرمان و با استفاده از کتابخانه‌ی کلیک<sup>۸</sup> پیاده‌سازی شده است. این روش به دلیل تجربه‌ی استاد در کار با رایانه و سرعت آن انتخاب شده‌است.

از آن‌جا که در حال حاضر مجموعه‌ی بزرگی از تکالیف برنامه‌نویسی دانشجویان در دسترس نبود، برای مطمئن شدن از کارکرد ادعایی مولفه مورد نظر، تست‌هایی با کمک دادگان مسابقات کد گوگل<sup>۹</sup> با شرح اشاره شده انجام شد. ابتدا برنامه‌های نوشته شده به زبان C دانلود شدند و به دو دسته‌ی آموزش و تست تقسیم شدند. برنامه‌های دسته‌ی آموزش در یک پوشه قرار گرفتند. یک اسکریپت به زبان پایتون نوشته شد که فایل‌های موجود در پوشه را با ویژگی‌های مناسب در بانک تکلیف‌ها ذخیره کند. سپس برنامه‌های پوشه‌ی آزمایش یکی یکی ذخیره شده و همانندی آن‌ها با برنامه‌های قبلی بررسی شدند. نتایج نشان داد در هر بررسی زیرمجموعه‌ی درست انتخاب شده‌است. همان‌طور که پیش‌تر اشاره شد کار جاری به دلیل بایگانی تکلیف‌ها و ویژگی‌های مربوط به آن‌ها امکان سازماندهی تکلیف‌ها را برای اساتید فراهم می‌کند که در کارهای پیشین وجود نداشته است.

<sup>۵</sup> <https://www.sqlite.org/index.html>

<sup>۴</sup> <https://www.python.org/>

<sup>۸</sup> click:

<sup>۷</sup> <http://meldmerge.org/h>

<sup>۶</sup> <https://github.com/jplag/jplag/releases/tag/v2.11.8-SNAPSHOT>

<sup>۹</sup> <https://codingcompetitions.withgoogle.com/codejam/archive/2018>

<https://click.palletsprojects.com/en/7.x/>

#### ۴. جمع‌بندی و کارهای آینده

امروزه ابزارهای همانندجویی در دسترس است که به اساتید علوم کامپیوتر کمک می‌کند تقلب‌ها را در تکلیف‌های برنامه‌نویسی دانشجویان تشخیص دهند. ولی در این ابزارها، نگهداری از تکلیف‌ها و سازماندهی آن‌ها به عهده‌ی استاد درس است. در این پژوهش به منظور کمک به استاد، یک معماری برای بایگانی و سازماندهی تکلیف‌های برنامه‌نویسی پیشنهاد شده و با انجام پیاده‌سازی و تست، ارزیابی شده‌است. در این معماری، پنج بخش «بانک تکلیف‌ها»، «نمایش‌گر»، «موتور جستجو»، «هماندجو» و «واسط کاربر» پیشنهاد شده‌است. در بخش «بانک تکلیف‌ها»، علاوه بر فایل برنامه، امکان ذخیره‌ی ویژگی‌های مربوطه مثل اسم استاد، اسم درس، دانشجو، ترم و موضوع نیز دیده شده‌است. به این ترتیب، بخش «موتور جستجو» می‌تواند با جستجو روی ویژگی‌های ذخیره‌شده، لیستی از تکالیف را برای بررسی همانندی انتخاب کند. این معماری، ساده و کافی است. با این وجود برای تکمیل و بهتر کردن آن، کارهای زیر پیشنهاد می‌شوند:

- (۱) بسط موتور جستجو: در حال حاضر در «موتور جستجو» با جستجوی ساده روی تکلیف‌های ذخیره‌شده، لیست تکلیف‌ها به دست می‌آید. پیشنهاد می‌شود در کارهای آینده از روش‌های داده‌کاوی به این منظور استفاده شود. با استفاده از روش‌هایی مثل خوشه‌بندی، احتمالاً لیست‌های درست‌تری انتخاب خواهد شد. در ضمن در حال حاضر، موتور جستجو به کلیدواژه‌های موضوع وابسته است؛ در کارهای آینده می‌توان جستجوی محتوایی را به این منظور نیز بررسی کرد.
- (۲) پشتیبانی از انواع زبان‌های برنامه‌نویسی: در سامانه‌ی حاضر فقط از همانندجوی C استفاده شده‌است. نه تنها زبان‌های برنامه‌نویسی مختلفی در دانشگاه‌ها و در ترم‌های متفاوت، تدریس می‌شود؛ بلکه در درس‌های سطح بالاتر مانند ساختمان داده‌ها، طراحی الگوریتم و هوش مصنوعی معمولاً زبان نوشتن تمرین توسط دانشجو، انتخابی و آزاد است. گرچه JPlag، مولفه‌ی استفاده‌شده در این‌جا، از زبان‌های برنامه‌نویسی Java، C++، C# نیز پشتیبانی می‌کند ولی قابلیت بین‌زبانی ندارد و به هر حال لازم است در کارهای آینده سامانه به گونه‌ای بسط داده‌شود که در صورت نیاز به زبان‌های برنامه‌نویسی جدید یا همانندجویی بین‌زبانی، مولفه‌های مناسب انتخاب شوند.
- (۳) ارائه‌ی واسط استاندارد: از آنجا که این سامانه باید با یک سامانه جامع دانشگاهی یا سامانه جامع آموزشی و تکالیف تجمیع شود، کارهای آینده لازم است رویکردهای وب سرویسی و API‌ای بهتری ارائه دهند مثلاً اینکه یک API و استاندارد برای سامانه طراحی شود که سامانه‌های جامع موجود دانشگاهی (مانند sess و گلستان) و یا سامانه‌های مدیریت کلاس و تکالیف (مانند moodle یا quera.ir) را بتوان با این سامانه یک پارچه سازی کرد. یا بتوانند سامانه حاضر را به عنوان یک زیر سامانه به کار ببرند.
- (۴) جمع‌آوری بانک تکلیف‌های برنامه‌نویسی: در حال حاضر بانک واقعی از تکلیف‌های برنامه‌نویسی در دسترس نبود. پیشنهاد می‌شود با همکاری اساتید و دانشگاه‌های مختلف، یک بانک بومی از تکلیف‌های برنامه‌نویسی جمع‌آوری شود. وجود بانک تکلیف، به کشف تقلب به صورت گسترده و اشاعه‌ی اخلاق حرفه‌ای کمک خواهد کرد.

#### سپاس‌گزاری

نویسندگان مراتب سپاس‌گزاری خود را از داوارن محترم به دلیل نظرات ارزنده‌ی ایشان اعلام می‌دارند.

#### مراجع

1. Novak, Matija, Mike Joy, and Dragutin Kermek, *code Similarity Detection and Detection Tools Used in Academia: A Systematic Review*, ACM Transactions on Computing Education (TOCE) 19, no. 3 (2019): 27.
2. A. Ahtiainen, S. Surakka, and M. Rahikainen, *GNU-licensed source code plagiarism detection engine for Java exercises*, In Proceedings of the 6th Baltic Sea conference on Computing education research: Koli Calling 2006, pp. 141-142. ACM, 2006.
3. M. Joy and M. Luck, *Plagiarism in programming assignments*, IEEE Transactions on education 42, no. 2 (1999): 129-133.
4. L. Prechelt, G. Malpohl, and M. Philippsen, *Finding plagiarisms among a set of programs with JPlag*, J. UCS 8, no. 11 (2002): 1016.
5. Arabyarmohamady, S., Moradi, H., and Asadpour, M. (2012, November). A coding style-based plagiarism detection. In Proceedings of 2012 International Conference on Interactive Mobile and Computer Aided Learning (IMCL) (pp. 180-186). IEEE.

پست الکترونیکی: [zahra.karimi@sku.ac.ir](mailto:zahra.karimi@sku.ac.ir)

پست الکترونیکی: [masoume.ghasemi1995@gmail.com](mailto:masoume.ghasemi1995@gmail.com)



# ارائه‌های پوستری

جبر

## تشخیص پذیری جدیدی از $O_{\lambda}^{+}(5)$

معصومه بی باک  
پروفسور ریاضی\*

گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷ - ۱۹۳۹۵

چکیده. فرض کنید  $G$  یک گروه متناهی و  $k(G)$  بزرگترین مرتبه‌ی عضوهای گروه  $G$  باشد، در این صورت گوییم گروه  $G$  توسط  $k(G)$  و مرتبه‌اش  $r$ -تشخیص پذیر است، هرگاه  $r$  گروه غیریکریخت مانند  $H$  وجود داشته باشد به طوری که  $|G| = |H|$  و  $k(G) = k(H)$ . حال اگر  $r = 1$ ، آن‌گاه گوییم  $G$  تشخیص پذیر است. در این مقاله نشان می‌دهیم که گروه ساده‌ی  $O_{\lambda}^{+}(5)$  توسط مرتبه‌ی گروه و بزرگترین مرتبه‌ی عضوهایش، تشخیص پذیر است. واژه‌های کلیدی: گروه ساده، تشخیص پذیری، بزرگترین مرتبه‌ی عناصر گروه. طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 13D45, 39B42.

### ۱. پیش‌گفتار

تشخیص پذیری گروه‌های متناهی بر اساس ویژگی‌هایی از گروه، یکی از مهمترین مسائل نظریه‌ی گروه‌ها است. بدین صورت که ویژگی خاصی از یک گروه را مد نظر قرار می‌دهند و گروه‌هایی را که دارای چنین ویژگی‌هایی هستند در حد یکریختی رده‌بندی می‌کنند. از چنین ویژگی‌هایی می‌توان به تشخیص پذیری توسط جدول سرشت، گراف اول، گراف ناجابه‌جایی، دنباله‌ی درجات رئوس گراف اول و مرتبه‌ی گروه و... اشاره کرد. فرض کنید  $G$  یک گروه متناهی و  $\pi_e(G)$  که طیف گروه نیز نامیده می‌شود مجموعه‌ی مرتبه‌ی عناصر  $G$  باشد. در سال ۱۹۸۷ شی<sup>۱</sup> تشخیص پذیری گروه متناهی  $G$  با استفاده از مرتبه‌ی گروه و طیفش را به صورت زیر مطرح کرد: فرض کنید  $G$  یک گروه متناهی و  $M$  یک گروه ساده متناهی باشد، در این صورت  $G \cong M$  اگر و تنها اگر  $|G| = |M|$  و  $\pi_e(G) = \pi_e(M)$ . این حدس توسط مازاروف<sup>۲</sup> و همکارانش در [۹] به طور کامل ثابت شده است. در سال ۲۰۰۹، هی<sup>۳</sup> و چن<sup>۴</sup> تلاش کردند با جایگزین کردن بزرگترین مرتبه‌ی عضوهای گروه به جای طیف آن نوع دیگری از تشخیص پذیری را معرفی کنند. درواقع آن‌ها با استفاده از مرتبه‌ی گروه و بزرگترین مرتبه‌ی عضوهای گروه در [۸-۴] نشان دادند که  $K_3$ -گروه‌های ساده، برخی از  $K_4$ -گروه‌های ساده، گروه‌های ساده‌ی پراکنده و تعدادی از گروه‌های خطی تصویری خاص از بعد ۲ توسط مرتبه‌ی گروه و بزرگترین مرتبه‌ی عضوهایشان تشخیص پذیر هستند. در این مقاله نشان می‌دهیم  $O_{\lambda}^{+}(5)$  توسط مرتبه و بزرگترین مرتبه‌ی عضوهایش تشخیص پذیر است.

### ۲. لم‌های مقدماتی

لم ۱.۲. فرض کنید  $O = O_{\lambda}^{+}(q)$  و  $q$  توانی از عدد اول فرد  $p$  باشد. در این صورت  $\pi_e(G)$  شامل اعداد زیر است:

$$(1) \quad \frac{(q^2-1)}{(2, q-1)}, \frac{(q^2 \pm 1)}{(2, q-1)}, \frac{p(q^2 \pm 1)}{(2, q-1)}, q^2 - 1$$

$$(2) \quad \frac{p^2(q \pm 1)}{(2, q-1)} \text{ اگر و تنها اگر } p = 2, 3$$

$$(3) \quad 25 \text{ اگر و تنها اگر } p = 5$$

$$(ب) \quad 8 \text{ اگر } p = 2$$

□

اثبات. برای اثبات به مرجع [۳] رجوع شود.

تعریف ۲.۲. فرض کنید  $G$  یک گروه متناهی باشد، در این صورت حاصل ضرب همه‌ی زیرگروه‌های نرمال مینیمال  $G$  را با  $Soc(G)$  نشان می‌دهیم و به آن بنیان  $G$  می‌گوییم.

لم ۳.۲. فرض کنید  $G$  یک گروه متناهی و  $K$  زیرگروه نرمالی از  $G$  باشد، در این صورت  $C_G(K) = 1$  اگر و تنها اگر  $1 = Z(K)$  و  $Soc(G) \leq K$ .

□

اثبات. برای اثبات به مرجع [۱] رجوع شود.

جدول ۱. مرتبه‌ی برخی از گروه‌های ساده‌ی  $S$  به‌طوری‌که  $31 \in \pi(S)$

$S$	$ S $	$ out(S) $	$S$	$ S $	$ Out(S) $
$L_7(31)$	$2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 31$	۴	$O_{\lambda}^+(5)$	$2^{12} \cdot 3^5 \cdot 5^{12} \cdot 7 \cdot 13^2 \cdot 31$	۴
$L_3(5)$	$2^5 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 31$	۲	$O_{\lambda}^+(2)$	$2^{20} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 31$	۴
$L_7(32)$	$2^5 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 31$	۲	$U_7(31)$	$2^{11} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^3 \cdot 19 \cdot 31^2$	۲
$L_7(5^2)$	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 31$	۴	$L_5(4)$	$2^{20} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 31$	۲
$G_2(5)$	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^6 \cdot 7 \cdot 31$	۲	$S_{10}(2)$	$2^{25} \cdot 3^6 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 31$	۴
$L_5(2')$	$2^{10} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 31$	۲	$O_{\lambda}^+(2)$	$2^{20} \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 31$	۴
$L_5(2)$	$2^{15} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 31$	۲	$ON$	$2^9 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 31$	۲
$L_7(5)$	$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^6 \cdot 13 \cdot 31$	۴	$Th$	$2^{15} \cdot 3^{10} \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 31$	۱
$L_7(25)$	$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^6 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 31$	۱۲	$O_{\lambda}^+(2)$	$2^{20} \cdot 3^6 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 31$	۴
$O_7(5)$	$2^9 \cdot 3^2 \cdot 5^9 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 31$	۲	$L_5(4)$	$2^{20} \cdot 3^6 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 31$	۶
$S_7(5)$	$2^9 \cdot 3^2 \cdot 5^9 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 31$	۲	$S_{12}(2)$	$2^{36} \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 31$	۲

### ۳. احکام اصلی

قضیه ۱۰۳. فرض کنید  $G$  یک گروه متناهی باشد به‌طوری‌که  $|G| = |O_{\lambda}^+(\delta)|$  و  $k(G) = k(O_{\lambda}^+(\delta))$ ، در این صورت  $G \cong O_{\lambda}^+(\delta)$ .

اثبات. بنابر لم ۱۰۱،  $k(O_{\lambda}^+(\delta)) = 156$ ، چون  $|G| = |O_{\lambda}^+(\delta)| = 2^{12} \cdot 3^5 \cdot 5^{12} \cdot 7 \cdot 13^2 \cdot 31$  و  $|G| = 156$ ،  $\pi(G) = \{2, 3, 5, 7, 13, 31\}$  و  $\pi_e(G) = 403 \notin \pi_e(G)$  و  $13 \cdot 31 = 403 \notin \pi_e(G)$  و  $7 \cdot 31 = 217 \notin \pi_e(G)$ .

حال فرض کنید  $K$  بزرگترین زیرگروه نرمال حل‌پذیر از  $G$  باشد، در این صورت  $K$  یک  $\{2, 3, 5\}$ -گروه است. قرارداد  $\bar{G} = \frac{G}{K}$  و  $S := Soc(\bar{G})$ ، در این صورت  $S = P_1 \times \dots \times P_m$  به‌طوری‌که  $P_i$ ها گروه‌های ساده‌ی ناآبلی هستند. چون  $|P_i| \mid |G|$ ، لذا  $\pi(P_i) \subseteq \pi(G) = \{2, 3, 5, 7, 13, 31\}$  و در نتیجه  $P_i$  می‌تواند با یکی از گروه‌های موجود در جدول (۱) زیر یکرخت باشد. حال با توجه به اینکه  $S \leq \bar{G} \leq Aut(S)$  و  $K$  یک  $\{2, 3, 5\}$ -گروه است. نتیجه می‌شود که  $\pi(G) \subseteq \pi(Aut(S))$  و  $\{7, 13, 31\} \subseteq \pi(\bar{G}) \subseteq \pi(Aut(S))$ . اکنون ادعا می‌کنیم که  $\{p, q, r\} = \{7, 13, 31\} \subseteq \pi(S)$  فرض کنیم چنین نباشد و  $r \notin \pi(S)$ ، در این صورت  $r \in \pi(Out(S))$  اما

$$Out(S) = Out(S_1) \times Out(S_2) \times \dots \times Out(S_k),$$

به‌طوری‌که  $S_j$ ها حاصل ضرب مستقیم  $P_i$ های یکرخت هستند یعنی  $S = P_1 \times \dots \times P_m \cong S_1 \times \dots \times S_k$ . لذا برای برخی  $j$ ها که  $1 \leq j \leq k$ ، باید  $|Out(S_j)| \mid |G|$ .

فرض کنید  $S_j$  حاصل ضرب مستقیم  $t$  گروه ساده‌ی یکرخت با  $P_i$  باشد، در این صورت  $|Out(S_j)| = |Out(P_i)| \cdot t!$  چون  $|Out(P_i)| \mid |G|$ ،  $|Out(S_j)| \mid |G|$  و  $|Out(S_j)| = 1$  لذا  $\pi(P_i) \subseteq \pi(S) = \{2, 3, 5, p\}$  و در نتیجه  $t \geq r \geq 7$ . اینک با توجه به اینکه مرتبه‌ی  $P_i$ ها توسط ۲ شمرده می‌شوند، نتیجه می‌گیریم که  $|S_j| \mid 2^{14}$  و لذا  $|G| \mid 2^{14}$  که تناقض است.

حال با توجه به اینکه  $\{7, 13, 31\} \subseteq \pi(S)$ ،  $|G| = 2^{12} \cdot 3^5 \cdot 5^{12} \cdot 7 \cdot 13^2 \cdot 31$  و بررسی مرتبه‌ی گروه‌های موجود در جدول (۱) نتیجه می‌شود که  $m = 1$  و لذا  $S$  باید با  $O_{\lambda}^+(\delta)$  یکرخت باشد.

بنابراین  $G \cong O_{\lambda}^+(\delta)$  و چون  $|G| = |O_{\lambda}^+(\delta)|$  و  $K = 1$  در نتیجه  $G \cong O_{\lambda}^+(\delta)$ .

□

### مراجع

1. N. Ahanjideh, A. Iranmanesh, *On the relation between the non-commuting graph and the prime graph* International Journal of Group Theory, (2012), 25–28.
2. M. Akbari, M. Kheirabadi and A. R. Moghaddamfar, *Recognition by noncommuting graph of finite groups  $L_2(q)$* , Front. Math. China, 6 (2011), no. 1, 1–16.
3. A. A. Buturlakin, *Spectra of finite symplectic and orthogonal groups*, Siberian Adv. Math., 21 (2014), no. (3) 176–210.
4. L. G. He, G. Y. Chen, *A new characterization of  $L_2(q)$  where  $q = p^n < 125$* , Ital. J. Pure Appl. Math., 28 (2011), 127–136.
5. L. G. He, G. Y. Chen, *A new characterization of simple  $K_3$ -group*, Comm. Algebra, 40 (2012), no. (10) 3903–3911.
6. L. G. He, G. Y. Chen, *A new characterization of some simple groups*, Ital. J. Pure Appl. Math., 30 (2013), 373–392.
7. L. G. He, G. Y. Chen, *A new characterization of  $3'$ -simple  $K_4$ -groups and their automorphism groups*, Journal of Mathematical Research with Applications, 35 (2015), 400–406.
8. L. G. He, G. Y. Chen, *A new characterization of simple  $K_4$ -groups with type  $L_2(p)$* , Adv. Math (China), 43 (2014), no. (5) 667–670.

9. A. V. Vaselev, M. A. Grechkoseeva and V. D. Mazurov, *Characterization of the finite simple groups by specturum and order*, Algebra Logic, 48 (2009), no. (6) 385–409.

پست الکترونیکی: [m.bibak@pnu.ac.ir](mailto:m.bibak@pnu.ac.ir)

پست الکترونیکی: [pardisramezani14@yahoo.com](mailto:pardisramezani14@yahoo.com)

## مروری کلی بر فضاهای اشتراکی

ج. هاشمی زاده\*

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران

و ع. رضایی علی‌آباد

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران

چکیده. فرض کنیم  $X$  یک مجموعه دلخواه و  $\mathcal{M}$  مجموعه‌ای ناتهی از زیرمجموعه‌های  $X$  باشد که نسبت به اشتراک دلخواه بسته باشد. در این صورت زوج مرتب  $(X, \mathcal{M})$  را یک فضای اشتراکی می‌نامیم. در این نوشته با مروری کلی بر مطالعات انجام گرفته این ساختار، به مفهوم یکرختی و فضای خارج‌قسمتی این فضاها می‌پردازیم. واژه‌های کلیدی: فضای اشتراکی، هم‌ریختی، یکرختی، فضای خارج‌قسمتی. طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 06A11, 54A05.

## ۱. پیش‌گفتار

یکی از موضوعات اصلی پژوهش در ساختارهای جبری (گروه، حلقه، مدول، فضای برداری و ...) مطالعه زیرساختارهای جبری (زیرگروه، ایدال، زیرمدول، زیرفضای برداری و ...) است. همه زیرساختارهای جبری تحت اشتراک دلخواه بسته می‌باشند و همین خصوصیت نتایج مشابهی را بوجود می‌آورد. به عنوان مثال اگر  $X$  یک زیرمجموعه دلخواه یک حلقه باشد، آن‌گاه کوچکترین ایدال شامل  $X$  وجود دارد. این ویژگی در مورد بقیه ساختارهای جبری نیز وجود دارد. حال فرض کنیم  $X$  یک مجموعه دلخواه و  $\mathcal{M}$  خانواده‌ای ناتهی از زیرمجموعه‌های  $X$  باشد که نسبت به اشتراک دلخواه بسته باشد. در این حالت اصطلاحاً گفته می‌شود که  $\mathcal{M}$  یک ساختار اشتراکی روی  $X$  است. مفهوم ساختار اشتراکی در [۲]، معرفی گردیده است و در آن نشان داده شده است که ساختار اشتراکی  $\mathcal{M}$  با دو عملگر وست ( $\vee$ ) و رسند ( $\wedge$ ) به صورت زیر یک مشبک کامل است.

$$\bigwedge A_i = \bigcap_{i \in I} A_i,$$

$$\bigvee A_i = \bigcap \{B \in \mathcal{M} : \cup_{i \in I} A_i \subseteq B\}.$$

کوچک‌ترین عضو  $\mathcal{M}$  را صفر می‌خوانیم و آن را با نماد « $\circ_X$ » و یا به طور ساده با « $\circ$ » نشان می‌دهیم. چنانچه  $\mathcal{M}$  یک ساختار اشتراکی روی مجموعه  $X$  باشد، آن‌گاه زوج مرتب  $(X, \mathcal{M})$  (و یا به طور ساده  $X$ ) را یک فضای اشتراکی می‌نامیم. مفهوم فضای اشتراکی در [۳] معرفی و از دیدگاه شبه توپولوژیکی مورد مطالعه قرار گرفته است. واضح است که همه ساختارهای جبری با در نظر گرفتن مجموعه‌ی مناسبی از زیرساختارها (به عنوان مثال اگر  $X$  یک حلقه باشد،  $\mathcal{M}$  مجموعه‌ی همه ایدال‌ها یا مجموعه همه ایدال‌های نیم‌اول  $X$  در نظر گرفته شود) مثال‌هایی از فضای اشتراکی هستند. از این رو فضای اشتراکی را می‌توان به عنوان تعمیمی از ساختارهای جبری در نظر گرفت. مشابه با ساختارهای جبری، می‌توان مفاهیمی مانند زیرفضا، هم‌ریختی، یکرختی، فضای خارج‌قسمتی، حاصل ضرب و ... را در فضاهای اشتراکی تعریف و مورد مطالعه قرار داد. هدف اصلی این مقاله بررسی یکرختی و فضای خارج‌قسمتی فضاهای اشتراکی است که در بخش ۳ به این موضوع می‌پردازیم. برای این منظور ابتدا در بخش ۲ به طور مختصر هم‌ریختی اشتراکی معرفی و ویژگی‌های آن بررسی می‌گردد. گیریم  $(X, \mathcal{M})$  یک فضای اشتراکی باشد و  $A \subseteq X$ . در این صورت تعریف می‌کنیم:  $\bar{A} = \{x \in X : x \in A \text{ یا } A \cap u \neq \circ, \forall u \in \mathcal{M}_x\}$ ,  $\mathcal{M}_A = \{u \cap A : u \in \mathcal{M}\}$ ,  $\langle A \rangle = \bigcap_{A \subseteq u \in \mathcal{M}} u$   $A^\circ = \{x \in X : \exists u \in \mathcal{M}_x, u \subseteq A\}$  که در آن منظور از  $\mathcal{M}_x$  مجموعه همه عناصر  $u$  متعلق به  $\mathcal{M}$  است که شامل عضو  $x$  می‌باشند. واضح است که  $\langle A \rangle$  کوچکترین عضو  $\mathcal{M}$  است که شامل  $A$  و همچنین  $\mathcal{M}_A$  یک ساختار اشتراکی بر  $A$  است. برای دیدن جزئیات بیشتر در مورد این نمادها به [۳]، مراجعه کنید.

## ۲. همریختی اشتراکی

تعریف ۱.۲. گیریم  $(X, \mathcal{M}_X)$  و  $(Y, \mathcal{M}_Y)$  فضاهای اشتراکی باشند. تابع  $f : X \rightarrow Y$  را: الف)  $\mathcal{M}$ -پیوسته گوییم هرگاه  $f^{-1}(\mathcal{M}_Y) = \{f^{-1}(u) : u \in \mathcal{M}_Y\} \subseteq \mathcal{M}_X$ ؛ ب) یک همریختی اشتراکی (یا به طور خلاصه همریختی) می‌گوییم هرگاه  $\mathcal{M}$ -پیوسته و  $f(\mathcal{M}_X) \subseteq \mathcal{M}_{f(X)}$  به علاوه اگر شرط زیر برقرار باشد، آن‌گاه  $f$  را یک همریختی قوی می‌گوییم:

$$\forall m, n \in K_f, f(m) = f(n) \Rightarrow m = n$$

که در آن

$$\ker(f) = f^{-1}(o), K_f = \{m \in \mathcal{M}_X : m \supseteq \ker(f)\}.$$

لم ۲.۲. گیریم  $(X, \mathcal{M}_X)$  و  $(Y, \mathcal{M}_Y)$  فضاهای اشتراکی و تابع  $f : X \rightarrow Y$  یک همریختی اشتراکی باشد. در این صورت  $f(\mathcal{M}_X) = f(K_f) = \mathcal{M}_{f(X)}$

اثبات. کافی است ثابت کنیم  $f(K_f) = \mathcal{M}_{f(X)}$ . فرض کنیم  $u \in \mathcal{M}_Y$ . در این صورت با توجه به این که  $f$  همریختی است  $f^{-1}(u) \in K_f$ . به سادگی می‌توان دید که  $f(f^{-1}(u)) = u \cap f(X)$ ، بنابراین حکم ثابت است.  $\square$

گزاره زیر نتیجه مستقیم لم قبل است.

گزاره ۳.۲. گیریم  $(X, \mathcal{M}_X)$  و  $(Y, \mathcal{M}_Y)$  فضاهای اشتراکی و تابع  $f : X \rightarrow Y$  یک همریختی اشتراکی باشد. در این صورت  $f$  یک همریختی قوی است هرگاه  $K_f$  و  $\mathcal{M}_{f(X)}$  یکریخت ترتیبی باشند.

اثبات. به سادگی می‌توان دید نگاشت  $\begin{cases} \phi : K_f \rightarrow \mathcal{M}_{f(X)} \\ \phi(m) = f(m) \end{cases}$  یکریختی ترتیبی است اگر و تنها اگر  $f$  یک همریختی قوی باشد.  $\square$

گزاره ۴.۲. گیریم  $(X, \mathcal{M}_X)$ ،  $(Y, \mathcal{M}_Y)$  و  $(Z, \mathcal{M}_Z)$  فضاهای اشتراکی و

$f : X \rightarrow Y$  یک همریختی باشد. در این صورت:

الف)  $f(\circ_X) = \circ_Y \cap f(X)$ .

ب)  $f$  همریختی قوی است اگر و تنها اگر  $f^{-1}f(m) = m$  برای هر  $m \in K_f$ .

پ)  $f$  پوشا است اگر و تنها اگر  $f(\mathcal{M}_X) = \mathcal{M}_Y$ .

ت)  $f(X) \in \mathcal{M}_Y$  اگر و تنها اگر  $f(\mathcal{M}_X) \subseteq \mathcal{M}_Y$ .

ث) اگر  $f$  پوشا و  $g : Y \rightarrow Z$  یک همریختی باشد، آن‌گاه تابع  $gf : X \rightarrow Z$  نیز یک همریختی است.

اثبات. الف) چون  $f$  همریختی است داریم  $f^{-1}(\circ_Y) \in \mathcal{M}_X$ ، پس  $\circ_X \subseteq f^{-1}(\circ_Y)$  و در نتیجه  $f(\circ_X) \subseteq \circ_Y \cap f(X)$ . با توجه به این که  $\circ_{f(X)} = \circ_Y \cap f(X)$  و همچنین  $f(\circ_X) \in \mathcal{M}_{f(X)}$ ، داریم  $\circ_Y \cap f(X) \subseteq f(\circ_X)$ . پس تساوی برقرار است.

ب) ابتدا توجه کنیم که برای هر  $m \in \mathcal{M}_X$ ،  $f^{-1}f(m) \in K_f$ . بنابراین اگر  $f$  همریختی قوی باشد از تساوی همیشه درست

$f(f^{-1}f(m)) = f(m)$  نتیجه می‌شود که برای هر  $m \in K_f$ ،  $f^{-1}f(m) = m$ . اثبات عکس بدیهی است.

پ) واضح است که اگر  $f(\mathcal{M}_X) = \mathcal{M}_Y$ ، آن‌گاه  $f$  پوشا است. برعکس، فرض کنیم  $f$  پوشا باشد. در این صورت بنا به ۲.۲،

$f(K_f) = \mathcal{M}_{f(X)} = \mathcal{M}_Y$  چون  $K_f \subseteq \mathcal{M}_X$ ، پس  $f(\mathcal{M}_X) = \mathcal{M}_Y$ .

اثبات (ث) از تعریف به سادگی بدست می‌آید.  $\square$

گزاره ۵.۲. فرض کنیم که  $(X, \mathcal{M}_X)$  و  $(Y, \mathcal{M}_Y)$  فضاهای اشتراکی و  $f : X \rightarrow Y$  یک همریختی باشد. در این صورت برای هر خانواده  $\{m_i\}_{i \in I}$  از اعضای  $\mathcal{M}_X$ ،  $f(\bigvee_{i \in I} m_i) = \bigvee_{i \in I} f(m_i)$ ، که در آن وست اول نسبت به  $\mathcal{M}_X$  و وست دوم نسبت به  $\mathcal{M}_{f(X)}$  است.

اثبات. واضح است که  $\bigvee_{i \in I} f(m_i) \subseteq f(\bigvee_{i \in I} m_i)$ . برای اثبات عکس شمول فرض کنیم  $\bigvee_{i \in I} f(m_i) = u$ . در این صورت برای هر  $i \in I$ ،  $f(m_i) \subseteq u$  و در نتیجه برای هر  $i$ ،  $m_i \subseteq f^{-1}(u)$ . از این رو  $\bigvee_{i \in I} m_i \subseteq f^{-1}(u)$ . در نتیجه  $f(\bigvee_{i \in I} m_i) \subseteq u$ . و بنابراین  $f(\bigvee_{i \in I} m_i) = \bigvee_{i \in I} f(m_i)$ .  $\square$

گزاره ۶.۲. فرض کنیم که  $(X, \mathcal{M}_X)$  و  $(Y, \mathcal{M}_Y)$  فضاهای اشتراکی،  $f : X \rightarrow Y$  یک همریختی قوی پوشا و  $\{m'_i\}_{i \in I}$  یک خانواده از اعضای  $\mathcal{M}_Y$  باشد. در این صورت  $f^{-1}(\bigvee_{i \in I} m'_i) = \bigvee_{i \in I} f^{-1}(m'_i)$ .

اثبات. بدیهی است که  $f^{-1}(\bigvee_{i \in I} m'_i)$  کران بالای مجموعه  $\{f^{-1}(m'_i)\}_{i \in I}$  است. حال فرض کنیم که  $n$  یک کران بالای مجموعه  $\{f^{-1}(m'_i)\}_{i \in I}$  باشد. چون  $n \in K_f$ ، پس می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \forall i \in I, f^{-1}(m'_i) \subseteq n &\Rightarrow \forall i \in I, m'_i \subseteq f(n) \\ \Rightarrow \bigvee_{i \in I} m'_i \subseteq f(n) &\Rightarrow f^{-1}(\bigvee_{i \in I} m'_i) \subseteq f^{-1}f(n) = n. \end{aligned}$$

□

لم ۷.۲. فرض کنیم که  $(X, \mathcal{M}_X)$  و  $(Y, \mathcal{M}_Y)$  فضاهاى اشتراکى و  $f: X \rightarrow Y$  یک همریختى باشد. احکام زیر برقرارند:

$$\begin{aligned} \text{الف) برای هر } x \in X, \langle f(x) \rangle_{f(X)} &= \langle f(x) \rangle_{f(X)}, \\ \text{ب) برای هر } x \in X, \langle f(x) \rangle_{f(X)} &= \langle f(x) \rangle_Y \cap f(X). \end{aligned}$$

گزاره ۸.۲. فرض کنیم که  $(X, \mathcal{M}_X)$  و  $(Y, \mathcal{M}_Y)$  فضاهاى اشتراکى و  $f: X \rightarrow Y$  یک همریختى باشد با این شرط که  $0_Y \subseteq f(X)$ . در این صورت با فرض این که  $x \in X$ ، احکام زیر معادلند:

$$\begin{aligned} \text{الف) } f(x) &\notin Y \setminus f(X). \\ \text{ب) } f(x) &\notin \{y\} \text{ برای هر } y \in Y \setminus f(X). \\ \text{پ) } \langle f(x) \rangle_{f(X)} &= \langle f(x) \rangle_Y. \\ \text{ت) } \langle f(x) \rangle_Y &\subseteq f(X). \\ \text{ث) } (f(X))^\circ &= f(X). \end{aligned}$$

اثبات. الف  $\Leftrightarrow$  ب) چون نگاشت بستر روی اجتماع دلخواه توزیع می‌شود، بدیهی است.

ب  $\Leftrightarrow$  ت) بنا بر گزاره بالا بدیهی است.

ب  $\Leftarrow$  ت) گیریم  $y \notin f(X)$ . پس  $f(x) \notin \overline{\{y\}}$  و لذا بنا به تعریف بستر  $\langle f(x) \rangle_Y \cap \{y\} \subseteq \circ$ . چون فرض شده است که  $y \notin \langle f(x) \rangle_Y$ ، پس الزاماً  $\langle f(x) \rangle_Y \cap \{y\} = \emptyset$  و در نتیجه  $y \notin \langle f(x) \rangle_Y$ .

ت  $\Leftarrow$  ب) گیریم  $y \notin f(X)$ . پس  $y \notin \langle f(x) \rangle_Y$ . در نتیجه  $\langle f(x) \rangle_Y \cap \{y\} \subseteq \circ$ ؛ یعنی  $f(x) \notin \overline{\{y\}}$ . ث  $\Leftrightarrow$  ت) بدیهی است.

□

### ۳. یکرىختى فضاهاى اشتراکى

تعریف ۱.۳. گیریم  $(X, \mathcal{M}_X)$  و  $(Y, \mathcal{M}_Y)$  فضاهاى اشتراکى و  $f: X \rightarrow Y$  یک تابع باشد.  $f$  را یک  $\mathcal{M}$ -نشاننده می‌گوییم هرگاه یک همریختى قوی باشد و  $\ker(f) = \circ$ ؛ هر  $\mathcal{M}$ -نشاننده پوشا را یک  $\mathcal{M}$ -یکریختى می‌گوییم. به علاوه،  $f$  را یک نشاننده (یکریختى) اشتراکى یا مختصراً نشاننده (یکریختى) می‌گوییم هرگاه همریختى بوده و به عنوان تابع یک به یک (دوسویى) باشد. اگر  $f: X \rightarrow Y$  یکریختى باشد می‌گوییم  $X$  با  $Y$  یکریخت است.

بدیهی است که هر یکریختى یک  $\mathcal{M}$ -یکریختى است. مثال زیر نشان می‌دهد که عکس این حکم درست نیست.

مثال ۲.۳. فضاهاى اشتراکى  $(\mathbb{Z}_{10}, \mathcal{I}(\mathbb{Z}_{10}))$  و  $(\mathbb{Z}_6, \mathcal{I}(\mathbb{Z}_6))$  را در نظر بگیرید. توجه می‌کنیم که  $\mathcal{I}(\mathbb{Z}_{10}) = \{(\circ), I_1, I_2, \mathbb{Z}_{10}\}$  که در آن  $I_1 = \{0, 5\}$  و  $I_2 = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ . همچنین  $\mathcal{I}(\mathbb{Z}_6) = \{(\circ), J_1, J_2, \mathbb{Z}_6\}$  که در آن  $J_1 = \{0, 2, 4\}$  و  $J_2 = \{0, 3\}$ . حال تابع  $f: X \rightarrow Y$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} f(\circ) &= \circ, \quad f(2) = f(6) = f(8) = 2, \quad f(5) = 3, \\ f(4) &= 4, \quad f(3) = 5, \quad f(1) = f(7) = f(9) = 1. \end{aligned}$$

به راحتی می‌توان دید که  $f$  یک  $\mathcal{M}$ -یکریختى است ولی یکریختى نیست.

گزاره ۳.۳. فرض کنیم که  $f: X \rightarrow Y$  یک همریختى باشد. در این صورت احکام زیر معادلند:

الف)  $f$  یک  $\mathcal{M}$ -یکریختى است.

ب) نگاشت القای  $f: \mathcal{M}_X \rightarrow \mathcal{M}_Y$  یکریختى ترتیبى است.

پ) نگاشت القای  $f: \mathcal{M}_X \rightarrow \mathcal{M}_Y$  یکریختى مشبک‌هاى کامل است؛ یعنى یک تابع دوسویى است به طوری که:

$$f(\bigcap_{i \in I} m_i) = \bigcap_{i \in I} f(m_i) \text{ و } f(\bigvee_{i \in I} m_i) = \bigvee_{i \in I} f(m_i).$$

ت) تابع  $f: X \rightarrow Y$  پوشا است و برای هر  $m \in \mathcal{M}_X$ ،  $f^{-1}f(m) = m$ .

ملاحظه: به سادگی می‌توان نشان داد که اگر  $f: X \rightarrow Y$  یک  $\mathcal{M}$ -یکریختى باشد، آنگاه  $f^{-1}((B)_Y) = (f^{-1}(B))_X$  برای هر  $B \subseteq Y$ .

در ادامه این بخش، فضای خارج قسمتی یک فضای اشتراکی را تعریف کرده و نشان می‌دهیم که اگر  $f: X \rightarrow Y$  یک  $\mathcal{M}$ -یکریختی باشد، آن‌گاه  $Y$  با یک فضای خارج قسمتی  $X$  یکریخت است.

نمادگذاری و تعریف: گیریم  $f: X \rightarrow Y$  یک تابع باشد. در این صورت رابطه  $R_f$  روی  $X$  با ضابطه زیر یک هم ارزی است:

$$x_1 R_f x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2).$$

حال فرض کنیم که  $(X, \mathcal{M}_X)$  یک فضای اشتراکی باشد و  $\pi$  تابع طبیعی از  $X$  به  $X/R_f$  باشد. تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{M}_{X/R_f} = \{\pi(m) : m \in \mathcal{M}_X\}$$

در گزاره زیر نشان می‌دهیم اگر  $f$  یک  $\mathcal{M}$ -یکریختی باشد، آن‌گاه  $(X/R_f, \mathcal{M}_{X/R_f})$  یک فضای اشتراکی است. این فضای اشتراکی را فضای اشتراکی خارج قسمتی  $X$  نسبت به  $f$  می‌نامیم.

گزاره ۴.۳. فرض کنیم  $(X, \mathcal{M}_X)$ ،  $(Y, \mathcal{M}_Y)$  فضاهای اشتراکی و  $f: X \rightarrow Y$  یک  $\mathcal{M}$ -یکریختی باشد. در این صورت  $(X/R_f, \mathcal{M}_{X/R_f})$  یک فضای اشتراکی است و به علاوه تابع  $g: X/R_f \rightarrow Y$  با ضابطه  $g([x]) = f(x)$  یک یکریختی است. اثبات. واضح است که  $g$  دوسویی است و  $g\pi = f$  پس می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} g(\cap_{i \in I} \pi(m_i)) &= \cap_{i \in I} g\pi(m_i) = \cap_{i \in I} f(m_i) \\ &= f(\cap_{i \in I} m_i) = g\pi(\cap_{i \in I} m_i). \end{aligned}$$

بنابراین  $\pi(\cap_{i \in I} m_i) = \cap_{i \in I} \pi(m_i)$  پس  $(X/R_f, \mathcal{M}_{X/R_f})$  یک فضای اشتراکی است. یکریختی بودن  $g$  نیز به سادگی اثبات می‌شود.  $\square$

فرض کنیم  $R$  یک حلقه و  $I$  یک ایدال آن باشد. در این صورت حلقه‌ی  $R'$  و یک همریختی حلقه‌ای پوشا مانند  $f: R \rightarrow R'$  موجود است که  $f(I) = 0$ . البته نتیجه‌ی مشابهی برای سایر ساختارهای جبری مانند گروه‌ها و مدول‌ها برقرار است. گزاره زیر نشان می‌دهد که این نتیجه به طور کلی برای فضاهای اشتراکی برقرار است.

گزاره ۵.۳. اگر  $(X, \mathcal{M}_X)$  یک فضای اشتراکی باشد، آن‌گاه برای هر  $m_0 \in \mathcal{M}_X$ ، فضای اشتراکی  $(Y, \mathcal{M}_Y)$  و یک همریختی پوشا مانند  $f: X \rightarrow Y$  موجود است به طوری که  $f(m_0) = 0$ .

اثبات. قرار می‌دهیم  $Y = X - (m_0 - 0) = (X - m_0) \cup 0$ . به سادگی می‌توان دید که  $M_Y = \{(m - m_0) \cup 0\}$  یک فضای اشتراکی است. چون  $0 \subseteq m_0$  پس تابع پوشای  $g: m_0 \rightarrow 0$  وجود دارد. حال تابع  $f: X \rightarrow Y$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & x \in m_0 \\ x & x \in X - m_0 \end{cases}$$

توجه می‌کنیم که  $f$  پوشا و  $f^{-1}(0) = m_0$ ، پس  $f(m_0) = 0$ . برای کامل کردن اثبات نشان می‌دهیم  $f$  یک همریختی است. برای هر  $m \in \mathcal{M}_X$

$$f(m) = \begin{cases} g(x) & x \in m_0 \\ x & x \in m - m_0 \end{cases}$$

پس  $f(m) = (m - m_0) \cup 0 \in M_Y$  برای هر  $m \in \mathcal{M}_X$  از طرفی برای هر  $m \in \mathcal{M}_X$

$$f^{-1}((m - m_0) \cup 0) = f^{-1}(m - m_0) \cup m_0 = (m - m_0) \cup m_0 = m$$

$\square$

## مراجع

1. Blyth. T, *Lattices and Ordered Algebraic Structures*, Springer, 2005.
2. Davey. B.A , Priestly. H.A, *Introduction to Lattices and Order*, Cambridge University Press, 2002.
3. Hashemi. J, *On the  $\cap$ -structure spaces*, To appear in math. Extension.
4. Roman. S, *Lattices and Ordered Sets*, Springer, 2008.
5. Sharp. R. Y, *Steps in Commutative Algebra*, Cambridge University Press, 2000.
6. Willard. S, *General Topology*, Addison Wesley, Reading, Mass., 1970.

پست الکترونیکی: [jhashemi@scu.ac.ir](mailto:jhashemi@scu.ac.ir)  
پست الکترونیکی: [aliabady\\_r@scu.ac.ir](mailto:aliabady_r@scu.ac.ir)



ارائه‌های پوستری

هندسه و توپولوژی

## زیرخمینه های $CR$ ضرب پیچشی و $\delta$ -پایا در فضا فرم مختلط

رجب علیپور\*

بخش ریاضی، دانشگاه شهید مدنی آذربایجان، تبریز، ایران

و محمد المکچی

بخش ریاضی، دانشگاه شهید مدنی آذربایجان، تبریز، ایران

چکیده. از غوطه وری ایزومتريک حاصلضرب تابدار خمینه به یک فضای اقلیدسی با هم بعد دلخواه، یا به طور کلی تر، به یک خمینه ریمانی چه نتیجه ای حاصل می شود. مشکل اساسی برای این پرسش این است که برای یک خمینه ریمانی با بعد بسیار بزرگ ایجاب یک ایزومتريک نشاننده در فضاهای اقلیدسی مشکل است. برای حل چنین مشکلاتی و فراهم ساختن جوابهایی روی ایمرسیونهای مینیمال نوع جدید از پایاهای ریمانی با نام  $\delta$  پایاها که پایاهایی متفاوت از ماهیت کلاسیکال ریچی و انحناهای اسکالر دارند معرفی می شوند. هدف اصلی در این مقاله شناخت و بررسی رفتار این زیرخمینه ها در فضا فرم مختلط است.

واژه های کلیدی: حاصلضرب پیچشی، زیرخمینه  $\delta$  پایاها، فضا فرم مختلط.

طبقه بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 53C25, 53C40

### ۱. پیش گفتار

در سال ۱۹۵۶ وقتی *Bishop* و *O'Neill* مثالهایی برای خمینه هایی با خمیدگی منفی را بررسی می کردند، مفهومی به نام حاصلضرب پیچشی را معرفی کردند. یکی از مهم ترین مسائل در قضیه زیرخمینه ها غوطه وری یک خمینه ریمانی به فضای اقلیدسی یا در حالت کلی تر، به یک فضا فرم دلخواه است. مطابق با قضیه معروف *J.F.Nash*، هر خمینه ریمانی می تواند به طور ایزومتريک در هر فضای اقلیدسی با نقص بعد به اندازه کافی بزرگ غوطه ور شود. *J.F.Nash* یک شرح واضحی از حاصلضرب پیچشی بر فضاهای اقلیدسی را بیان کرد. قضیه *J.F.Nash* ایجاب می کند که هر حاصلضرب پیچشی  $N_1 \times_f N_2$  بتواند به عنوان یک خمینه ریمانی در هر فضای اقلیدسی غوطه ور شود. بسیاری از زیرخمینه های مهم در فضا فرم های مختلط و حقیقی می توانند به عنوان حاصلضرب تابدار زیرخمینه ها توسیع یابند. سوال اساسی مربوط به حاصلضرب تابدار زیرخمینه ها بنا به قضیه *J.F.Nash* به صورت زیر مطرح شده است.

از غوطه وری ایزومتريک حاصلضرب تابدار خمینه به یک فضای اقلیدسی با هم بعد دلخواه، یا به طور کلی تر، به یک خمینه ریمانی چه نتیجه ای حاصل می شود؟

برای مثال قضیه ناش این نتیجه را می دهد که هر خمینه از بعد ۳ می تواند بصورت ایزومتريک در  $E^{12}$  با نقص بعد ۱۱۷ نشانده شود. دلایل مختلفی وجود دارد که بکار بردن قضیه ناش بسیار مشکل است. یک دلیل این است که برای یک خمینه ریمانی با بعد بسیار بزرگ ایجاب یک ایزومتريک نشاننده در فضاهای اقلیدسی مشکل است. برای حل چنین مشکلاتی و فراهم ساختن جوابهایی روی ایمرسیونهای مینیمال *S.S.Chern* یک نوع جدید از پایاهای ریمانی با نام  $\delta$  پایاها را معرفی کرد که پایاهایی متفاوت از ماهیت کلاسیکال ریچی و انحناهای اسکالر دارند.

### ۲. حاصلضرب تابدار زیرخمینه های ریمانی

فرض می کنیم  $N_1$  و  $N_2$ ، به ترتیب، مجهز به متر ریمانی  $g_1$  و  $g_2$  و تابع تابی  $f$  یک تابع دیفرانسیل پذیر مثبت بر  $N_1$  باشد (  $f: N_1 \rightarrow \mathbb{R}_+$  ). حاصلضرب خمینه  $N_1 \times N_2$  با توابع  $\pi_1: N_1 \times N_2 \rightarrow N_1$  و  $\pi_2: N_1 \times N_2 \rightarrow N_2$  را در نظر می گیریم. حاصلضرب تابدار  $M = N_1 \times_f N_2$  در نظر می گیریم، حاصلضرب خمینه  $N_1 \times N_2$  برای هر بردار مماس  $X \in T_x M$ ، مجهز به ساختار ریمانی

$$\|X\|^2 = \|\pi_{1*}(X)\|^2 + f^2(\pi_1(x))\|\pi_{2*}(X)\|^2$$

است، که  $\pi_{1*}$  نگاشت دیفرانسیل  $\pi_1$  و  $\pi_{2*}$  نگاشت دیفرانسیل  $\pi_2$  است. داریم:

$$N_1 \times_f N_2 = (N_1 \times N_2, g); \quad g = g_1 + f^2 g_2$$

حاصلضرب ریمانی  $N_k \times \dots \times N_k$ ، حاصلضرب تابدار  $N_k \times_{f_1} N_1 \times \dots \times_{f_k} N_k$  است که توابع تابی  $f_1, \dots, f_k$  همگی مقدار ۱ هستند.

\* ارائه دهنده

اگر  $\nu$  زیرکلاف از کلاف نرمال  $T^\perp N$  از  $\tilde{M}$  باشد آنگاه،  $\nu$  را زیرکلاف نرمال موازی می نامیم اگر برای هر میدان برداری نرمال  $\xi$  در  $\nu$  و هر میدان برداری  $X$  مماس بر  $N$ ، داشته باشیم  $\nu \in D_X \xi$ .

**تعریف ۱.۰.۲.** [۲] اگر  $O(P^\perp)$  گروهی از تبدیلات یکامتعامد (با بعد مثبت) که  $P^\perp$  نقطه وار بدون تغییر باشد. هر منحنی  $\alpha$  در  $\tilde{M}^\perp(c)$  که اشتراکی با  $P^\perp$  ندارد را در نظر می گیریم. دوران از  $\alpha$  تحت  $O(P^\perp)$ ، با  $\alpha$  و محور  $P^\perp$ ، ابرویه دورانی نامیده می شود.

**تعریف ۲.۰.۲.** [۲] اگر  $s$ ، طول قوس  $\alpha$  باشد، منحنی مقطع از  $M^n$ ، حاصلضرب تابدار  $(\delta) M^{n-1} \times_f I$  است. که  $I$  فاصله باز از  $\mathbb{R}$  و  $f$  به صورت زیر تعریف می شود

$$f(s) = \langle \alpha(s), u \rangle$$

که  $u \in P^\perp$  و  $\delta = \langle u, u \rangle$  و  $P^\perp$  زیرفضای خطی ۳-بعدی در  $\mathbb{R}^{n+2}$  است.

**قضیه ۳.۰.۲.** [۳] (جی. اف. ناش) هر  $n$ -خمینه ریمانی فشرده را می توان به طور ایزومتريک در هر ناحیه کوچک از یک  $N$ -فضای اقلیدسی  $\mathbb{E}^N$  با  $N = \frac{1}{4}n(3+11)$  نشانند و هر  $N$ -خمینه ریمانی غیر فشرده را می توان به طور ایزومتريک در هر افراز کوچک از یک  $M$ -فضای اقلیدسی  $\mathbb{E}^M$  با  $M = \frac{1}{4}n(n+1)(3n+11)$  نشانند.

**مثال ۴.۰.۲.** [۳] بنا به قضیه ناش، هر خمینه ریمانی ۳-بعدی را می توان، بطور ایزومتريک در  $\mathbb{E}^{12}$  با هم بعد ۱۱۷ نشانند.

**قضیه ۵.۰.۲.** [۷] (نولکر) غوطه وری ایزومتريک  $R^N(c)$   $N_1 \times_{f_1} N_2 \times \dots \times_{f_k} N_k \rightarrow R^N(c)$  به یک خمینه ریمانی با انحناى ثابت  $c$  را داریم. اگر  $\phi$ ، تماماً ژئودزیک آمیخته باشد آنگاه  $\phi$ ، بطور موضعی یک غوطه وری حاصلضرب تابدار است.

**نتیجه ۶.۰.۲.** [۴] (موور) اگر فرم اساسی دوم  $\sigma$  از غوطه وری  $\phi$  در رابطه  $\sigma(X, Y) = 0$  صدق کند، یعنی، تماماً ژئودزیک آمیخته باشد، آنگاه  $\phi$  یک غوطه وری حاصلضرب است.

**قضیه ۷.۰.۲.** [۵] (ارباچر) غوطه وری ایزومتريک  $\tilde{M}^{n+p}(c)$   $\phi : M^n \rightarrow \tilde{M}^{n+p}(c)$  را در نظر می گیریم، می توانیم هم دامنه از غوطه وری را کاهش دهیم، یعنی، یک زیرخمینه تماماً ژئودزیک محض  $N$  از  $\tilde{M}^{n+p}(c)$  وجود داشته باشد. بطوریکه،  $\phi(M^n) \subset N$ .

**لم ۸.۰.۲.** [۶] (هاف) فرض کنید  $(M, g)$  یک خمینه ریمانی فشرده همبند و جهت پذیر باشد و  $f$  یک تابع دیفرانسیل پذیر بر  $M$  با  $\Delta f > 0$  باشد. در این صورت،  $f$  تابع ثابت است. بویژه، توابع هارمونیک روی  $M$ ، یعنی، توابعی که  $\Delta f = 0$ ، ثابت هستند.

**قضیه ۹.۰.۲.** [۱] برای هر غوطه وری ایزومتريک  $R^m(c)$   $\phi : N_1 \times_f N_2 \rightarrow R^m(c)$  از یک حاصلضرب تابدار  $N_1 \times_f N_2$  به یک خمینه ریمانی با انحناى ثابت  $c$ ، داریم:

$$\frac{\Delta f}{f} \leq \frac{n^2}{4n_2} H^2 + n_1 c,$$

که  $H^2, n_i = \dim N_i, n = n_1 + n_2$ ، مربع انحناى میانگین  $\phi$ ، و  $\Delta f$  لاپلاس  $f$  بر  $N_1$  است.

تساوی (۹.۲) برقرار است اگر و تنها اگر غوطه وری تماماً ژئودزیک آمیخته  $R^m(c)$   $\phi : N_1 \times_f N_2 \rightarrow R^m(c)$  در  $trace h_1 = trace h_2$  صدق کند، که  $trace h_1$  و  $trace h_2$ ، به ترتیب، اثر  $\sigma$  مربوط به  $N_1$  و  $N_2$  را نمایش می دهند.

در ادامه نتایجی از حاصلضرب تابدار زیرخمینه ها را بیان می کنیم.

**قضیه ۱۰.۰.۲.** [۲] انحناى اسکالر  $\tau$  از حاصلضرب تابدار  $N_1 \times_f N_2$ ، برای هر غوطه وری ایزومتريک  $R^m(c)$   $N_1 \times_f N_2 \rightarrow R^m(c)$  در رابطه زیر صدق می کند

$$\tau \leq \frac{\Delta f}{n_1 f} + \frac{n^2(n-2)}{2(n-1)} H^2 + \frac{1}{4}(n+1)(n-2)c.$$

اگر  $n = 2$ ، تساوی خود به خود برقرار است.

اگر  $n \geq 3$ ، تساوی برقرار است اگر و تنها اگر داشته باشیم:

(۱) حاصلضرب تابدار  $N_1 \times_f N_2$  با انحناى ثابت  $c$ ، که تابع تابى  $f$ ، تابع ویژه با مقدار ویژه  $c$ ، یعنی،  $\Delta f = cf$  را در نظر می گیریم، در این صورت،  $N_1 \times_f N_2$  به عنوان زیرخمینه تماماً ژئودزیک در  $R^m(c)$  غوطه ور می شود.

(۲)  $N_1 \times_f N_2$  به عنوان ابرویه دورانی در یک زیرخمینه تماماً ژئودزیک  $R^{n+1}(c)$  از  $R^m(c)$  با یک ژئودزیک از  $R^{n+1}(c)$  به عنوان منحنی مقطع اش بطور موضعی غوطه ور می شود.

### ۳. غوطه وری ریمانی

**تعریف ۱.۳.** فرض کنید  $\pi$  نگاشتی از منیفلد  $m$ -بعدی  $M$  به سوی منیفلد  $b$ -بعدی  $B$  باشد گوییم  $\pi$  در نقطه  $p \in M$  یک غوطه وری است اگر رتبه  $\pi$  در  $p$  برابر بعد حوزه مقادیر  $\pi$  باشد در اینصورت  $\pi : M^m \rightarrow B^b$  و داریم  $(rank f)_p = n$  و اگر رتبه  $\pi$  در  $p$  برابر  $\dim B$  باشد  $(\pi_*)_p$  پوششی بوده و  $\dim M \geq \dim B$  است.

**تعریف ۲.۳.** نگاشت  $\pi : M \rightarrow B$  را در نظر بگیرید اگر  $x \in B$  باشد لذا زیر مجموعه  $\pi^{-1}(x) \subset M$  را یک تار روی  $x$  می نامیم.

**تعریف ۳.۳.** اگر یک میدان برداری روی  $M$  همیشه مماس بر تارها باشد آن را قائم و اگر عمود بر تارها باشد آن میدان برداری را افقی می نامیم.

**تعریف ۴.۳.** یک میدان برداری  $X$  روی  $M$  را پایه گویند اگر  $X$  عمود بر  $M$  و  $\pi$  وابسته به یک میدان برداری  $X_*$  روی  $B$  باشد.

**تعریف ۵.۳.** فرض کنید  $g$  و  $g_B$  تانسورهای متریک از  $M$  و  $B$  باشند و  $g_F$  هم یک متریک القاء شده روی تار  $(\pi(p))$  در نقطه  $p \in M$  باشد لذا برای متریکهای  $g$  و  $g_B$ ،  $g_F$  تانسورهای انحنا ریمانی را به ترتیب با  $R_M$ ،  $R_B$  و  $R_F$  نشان می دهیم.

**لم ۶.۳.** فرض کنید  $\pi : M \rightarrow B$  یک غوطه وری شبه ریمانی باشد در نتیجه

$$R_B(\pi_*X, \pi_*Y; \pi_*Y, \pi_*X) = R_M(X, Y; Y, X) + 3\|A_XY\|^2$$

بعلاوه اگر  $\pi$  تارهای تماماً ژئودزیک باشد در نتیجه داریم

$$\text{الف: } R_M(U, V; V, U) = R_F(U, V; V, U),$$

$$\text{ب: } R_M(X, U; U, X) = \|A_XU\|^2,$$

که  $X$  و  $Y$  میدانهای برداری افقی و  $U$  میدان برداری عمود است.

**لم ۷.۳.** برای یک غوطه وری ریمانی  $\pi : M \rightarrow B$  داریم

$$K_M(\bar{X}, \bar{Y}) = K_B(X, Y) - 3\|A_{\bar{X}}\bar{Y}\|^2$$

که  $X$  و  $Y$  میدانهای برداری متعامد روی  $B$  هستند.

### ۴. نتایج اصلی

**تعریف ۱.۴.** فرض کنید  $M$  یک منیفلد ریمانی  $n$ -بعدی و  $k(\pi)$  هم یک انحنا برشی مربوط به یک صفحه برشی  $T_pM \subset T_pM$  در نقطه  $p \in M$  باشد برای یک پایه متعامد  $e_1, \dots, e_n$  از  $T_pM$ ، انحنا اسکالر  $\tau$  در  $p$  را بصورت زیر تعریف می شود

$$\tau(p) = \sum_{i < j} K(e_i, e_j).$$

**تعریف ۲.۴.** فرض کنید  $L$  یک زیر فضایی از  $T_pM$  از بعد  $r \geq 2$  و  $\{e_1, \dots, e_n\}$  پایه متعامد از  $L$  باشد لذا انحنا اسکالر  $\tau(L)$  از  $L$  به صورت زیر تعریف می شود

$$\tau(L) = \sum_{\alpha < \beta} K(e_\alpha \wedge e_\beta), 1 \leq \alpha, \beta \leq r.$$

فرض کنید  $N$  یک  $CR$ -زیر منیفلد از منیفلد کاهلر باشد. توزیع مختلط و توزیع تماماً حقیقی از  $N$  را به ترتیب با  $D$  و  $D^\perp$  نشان می دهیم.

**تعریف ۳.۴.**  $CR - \delta$  پایای  $\delta(D)$  را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\delta(D)(x) = \tau(x) - \tau(D_x)$$

که در آن  $\tau(x)$  و  $\tau(D_x)$  انحنا اسکالر از  $N$  در  $x \in N$  و انحنا اسکالر از  $D_x \subset T_xN$  است.

برای یک  $CR$ -حاصلضرب پیچشی،  $N^\perp \times_f N^T$  در فضا فرم مختلط  $\tilde{M}^{h+p}(\mathcal{F})$ ، بعد  $N^T$  و بعد  $N^\perp$  را با  $h = \dim N^\perp$  و  $p = \dim N^T$  نشان می دهیم حال فرض کنید  $\{e_1, \dots, e_{2h+p}\}$  یک قاب متعامد یکه روی  $N$  باشد به طوریکه  $e_1, \dots, e_h, e_{h+1} = Je_1, \dots, e_{2h} = Je_h$  در  $D$  و  $\{e_{2h+1}, \dots, e_{2h+p}\}$  در  $D^\perp$  باشند و قراهای زیر را برای اندیسها داریم

$$i, j, k = 1, \dots, 2h; \alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, h$$

$$r, s, t = 2h+1, \dots, 2h+p; A, B, C = 1, \dots, 2h+p$$

اگر  $e_r \in D^\perp$  و  $e_B, e_A \in D$  آنگاه داریم

$$\sigma_{AB}^r = \langle \sigma(e_A, e_B), J e_r \rangle.$$

برای میدانهای برداری یک  $e_r \in D^\perp$  و  $e_j \in D$  داریم

$$\frac{\Delta f}{f} = \sum_{j=1}^{2h} K(e_j, e_r),$$

که  $r \in \{2h+1, \dots, 2h+p\}$ .

**قضیه ۴.۴.** فرض کنید  $N = N^T \times_f N^\perp$  یک حاصلضرب پیچشی  $CR$  در یک فضا فرم مختلط  $\tilde{M}^{h+p}(4c)$  با  $h = \dim_{\mathbb{C}} N^T \geq 1$  و  $p = \dim N^\perp \geq 2$  باشد در نتیجه

$$H^2 \geq \frac{2(p+2)}{(2p+p)^2(p-1)} \left\{ \delta(D) - \frac{p\Delta f}{f} - \frac{p(p-1)c}{2} \right\}$$

که  $\Delta f$  لاپلاسیان از تابع پیچشی  $f$  و  $H^2$  انحنای میانگین بتوان دو است.

در فرمول بالا در نقطه  $x \in N$ ، علامت تساوی برقرار است اگر و تنها اگر یک پایه متعامد یک  $\{e_{2h+1}, \dots, e_n\}$  از  $D_x^\perp$  وجود داشته باشد که ضرایب دومین فرم اساسی  $\sigma$  نسبت به  $\{e_{2h+1}, \dots, e_n\}$  دارای شرایط زیر باشد

$$\begin{aligned} & \bullet \sigma_{ss}^r = 3\sigma_{ss}^r \text{ برای } 2h+1 \leq r \neq s \leq 2h+p \\ & \bullet \sigma_{s,t}^r = 0 \text{ برای اندیس های متمایز } r, s, t \in \{2h+1, \dots, 2h+p\} \end{aligned}$$

**قضیه ۵.۴.** فرض کنید  $\psi : N^T \times_f N^\perp \rightarrow C^{h+p}$  یک حاصلضرب پیچشی  $CR$  در  $\mathbb{C}^{h+p}$  با  $h = \dim_{\mathbb{C}} N^T \geq 1$  و  $p = \dim N^\perp \geq 2$  باشد در نتیجه

$$H^2 \geq \frac{2(p+2)}{(2h+p)^2(p-1)} \left\{ \delta(D) - \frac{p\Delta f}{f} \right\}$$

علامت مساوی در بالا برقرار است اگر و تنها اگر یکی از سه حالت زیر اتفاق بیافتد

(الف) حاصلضرب پیچشی  $CR$  یک قسمت باز از حاصلضرب  $CR$ ،  $\mathbb{C}^h \times W^p \subset \mathbb{C}^h \times \mathbb{C}^p$  است که  $W^p$  یک کره  $p$  بعدی در  $\mathbb{C}^p$  است.

(ب)  $N^T$  یک قسمت باز از  $\mathbb{C}^h$  است و  $N^\perp$  یک قسمت باز از کره  $p$  بعدی یک  $S^p$  است  $f = |z_1|$  و  $\psi$  یک ایمرسیون مینیمال است که بصورت زیر تعریف می شود

$$(z_1\omega_0, \dots, z_1\omega_p, z_2, \dots, z_h),$$

که  $z = (z_1, \dots, z_h) \in \mathbb{C}^h$  و  $\omega = (\omega_0, \dots, \omega_p) \in S^p \subset E^{p+1}$

(پ)  $N^T$  یک قسمت باز از  $\mathbb{C}^h$  است و  $N^\perp$  یک حاصلضرب پیچشی از یک خم و یک قسمت باز از  $S^{p-1}$  با تابع پیچشی

$$\varphi = \left( \frac{\sqrt{c^2-1}}{\sqrt{2}} \right) cn(ct, \frac{\sqrt{c^2-1}}{\sqrt{2C^2}})$$

و  $c > 0$  و  $f = |z_1|$  که  $\varphi$  یک ایمرسیون غیر مینیمال که بصورت زیر تعریف می شود

$$\left( z_1 e^{\int \frac{\varphi(\dot{\varphi} + ik\varphi^2)}{\varphi^2 - 1} dt}, z_1 \varphi e^{ik \int \varphi dt} \omega_1, \dots, z_1 \varphi e^{ik \int \varphi dt} \omega_p, z_2, \dots, z_h \right)$$

که  $z = (z_1, \dots, z_h) \in \mathbb{C}^h$  و  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_p) \in S^{p-1} \subset E^p$  و  $k = \frac{\sqrt{c^2-1}}{2}$  و  $cn$  تابع ژاکوبی بیضوی است.

## مراجع

1. B.-Y. Chen, *On isometric minimal immersions from warped products into real space forms*, Proc. Edinburgh Math. Soc. 45 (2002), no. 3, 579–587.
2. B.-Y. Chen, *An optimal inequality for CR-warped products in complex space forms involving CR  $\delta$ -invariant*, Internet. J. Math. 23 (2012), no. 3, 1250045, 17 pp.
3. B.-Y. Chen, *Riemannian Submanifolds*. Math. DG. 7 Jul 2013.
4. J. D. Moore, *Isometric immersion of riemannian product*, J. Differential Geometry 5 (1971), no. 1-2, 159–168.
5. J. Erbacher, *Reduction of the Codimension of on isometric immersion*, J. Differential 5, (1971) 333–340.
6. N. Ejiri, *Totally real minimal immersions of n-dimensional totally real space forms into n-dimensional complex space forms*, Proc. Amer. Math. Soc., 84 (1982), 243–246.
7. S. Nölker, *Isometric immersions of warped products*, Differential Geom. Appl. 6 (1996), no. 1, 1-30.

پست الکترونیکی: [math\\_riman@yahoo.com](mailto:math_riman@yahoo.com)  
پست الکترونیکی: [ilmakchi@azaruniv.ac.ir](mailto:ilmakchi@azaruniv.ac.ir)

## نابرابری برای زیرخمینه های $CR$ ضرب پیچشی و $\delta$ -پایا در فضا فرم مختلط

رجب علیپور\*

بخش ریاضی، دانشگاه شهید مدنی آذربایجان، تبریز، ایران

و محمد المکچی

بخش ریاضی، دانشگاه شهید مدنی آذربایجان، تبریز، ایران

چکیده. از غوطه وری ایزومتريک حاصلضرب تابدار خمینه به یک فضای اقلیدسی با هم بعد دلخواه، یا به طور کلی تر، به یک خمینه ریمانی چه نتیجه ای حاصل می شود. مشکل اساسی برای این پرسش این است که برای یک خمینه ریمانی با بعد بسیار بزرگ ایجاب یک ایزومتريک نشاننده در فضاهای اقلیدسی مشکل است. برای حل چنین مشکلاتی و فراهم ساختن جوابهایی روی ايمرسیونهای مینیمال نوع جدید از پایاهای ریمانی با نام  $\delta$  پایاها که پایاهایی متفاوت از ماهیت کلاسیکال ریچی و انحناهای اسکالر دارند معرفی می شوند. هدف اصلی در این مقاله شرایطی برای کنترل رفتار این زیرخمینه ها در فضا فرم مختلط است. **واژه های کلیدی:** حاصلضرب پیچشی، زیرخمینه  $\delta$  پایاها، فضا فرم مختلط. **طبقه بندی موضوعی** [۲۰۱۰]: 53C25, 53C40.

### ۱. پیشگفتار

در سال ۱۹۵۶ وقتی *Onneill* و *Bishop* مثالهایی برای خمینه هایی با خمیدگی منفی را بررسی می کردند، مفهومی به نام حاصلضرب پیچشی را معرفی کردند. یکی از مهم ترین مسائل در قضیه زیرخمینه ها غوطه وری یک خمینه ریمانی به فضای اقلیدسی یا در حالت کلی تر، به یک فضا فرم دلخواه است. مطابق با قضیه معروف *J.F.Nash*، هر خمینه ریمانی می تواند به طور ایزومتريک در هر فضای اقلیدسی با نقص بعد به اندازه کافی بزرگ غوطه ور شود. *J.F.Nash* یک شرح واضحی از حاصلضرب پیچشی بر فضاهای اقلیدسی را بیان کرد. قضیه *J.F.Nash* ایجاب می کند که هر حاصلضرب پیچشی  $N_1 \times_f N_2$  بتواند به عنوان یک خمینه ریمانی در هر فضای اقلیدسی غوطه ور شود. بسیاری از زیرخمینه های مهم در فضا فرم های مختلط و حقیقی می توانند به عنوان حاصلضرب تابدار زیرخمینه ها توسعه یابند. سوال اساسی مربوط به حاصلضرب تابدار زیرخمینه ها بنا به قضیه *J.F.Nash* به صورت زیر مطرح شده است.

از غوطه وری ایزومتريک حاصلضرب تابدار خمینه به یک فضای اقلیدسی با هم بعد دلخواه، یا به طور کلی تر، به یک خمینه ریمانی چه نتیجه ای حاصل می شود؟

برای مثال قضیه ناش این نتیجه را می دهد که هر خمینه از بعد ۳ می تواند بصورت ایزومتريک در  $E^{12}$  با نقص بعد ۱۱۷ نشانده شود. دلایل مختلفی وجود دارد که بکار بردن قضیه ناش بسیار مشکل است. یک دلیل این است که فهمیدن زیرمنیفولدها با بعد بسیار بزرگ مشکل است. همچنین برای مطالعه عمومی زیر منیفولدهای ریمانی دلخواه به غیر از سه معادله اساسی ریچی و گاوس و کدازی معادله ای برای شناخت وجود ندارد. برای حل چنین مشکلاتی و فراهم ساختن جوابهایی روی ايمرسیونهای مینیمال از پایاهای ریمانی  $\delta$  پایاها استفاده می شود که متفاوت از ماهیت کلاسیکال ریچی و انحناهای اسکالر دارند و پیدا کردن شرایطی برای کنترل رفتار این پایاها اساسی است.

### ۲. حاصلضرب تابدار زیرخمینه های ریمانی

فرض می کنیم  $N_1$  و  $N_2$ ، به ترتیب، مجهز به متر ریمانی  $g_1$  و  $g_2$  و تابع تابی  $f$  یک تابع دیفرانسیل پذیر مثبت بر  $N_1$  باشد (  $f: N_1 \rightarrow \mathbb{R}_+$  ). حاصلضرب خمینه  $N_1 \times N_2$  با توابع  $\pi_1: N_1 \times N_2 \rightarrow N_1$  و  $\pi_2: N_1 \times N_2 \rightarrow N_2$  را در نظر می گیریم. حاصلضرب تابدار  $M = N_1 \times_f N_2$  در نظر می گیریم، حاصلضرب خمینه  $N_1 \times N_2$  برای هر بردار مماس  $X \in T_x M$ ، مجهز به ساختار ریمانی

$$\|X\|^2 = \|\pi_{1*}(X)\|^2 + f^2(\pi_1(x))\|\pi_{2*}(X)\|^2$$

است، که  $\pi_{1*}$  نگاشت دیفرانسیل  $\pi_1$  و  $\pi_{2*}$  نگاشت دیفرانسیل  $\pi_2$  است. داریم:

$$N_1 \times_f N_2 = (N_1 \times N_2, g); \quad g = g_1 + f^2 g_2$$

حاصلضرب ریمانی  $N_0 \times \dots \times N_k$ ، حاصلضرب تابدار  $N_0 \times_{f_1} N_1 \times \dots \times_{f_k} N_k$  است که توابع تابی  $f_1, \dots, f_k$  همگی مقدار ۱ هستند.

\* ارائه دهنده

**قضیه ۱۰.۲.** [۴] (جی. اف. ناش) هر  $n$ -خمینه ریمانی فشرده را می توان به طور ایزومتريک در هر ناحیه کوچک از یک  $N$ -فضای اقلیدسی  $\mathbb{E}^N$  با  $N = \frac{1}{4}n(3+11)$  نشان داد و هر  $N$ -خمینه ریمانی غیر فشرده را می توان به طور ایزومتريک در هر افزاز کوچک از یک  $M$ -فضای اقلیدسی  $\mathbb{E}^M$  با  $M = \frac{1}{4}n(n+1)(3n+11)$  نشان داد.

**قضیه ۲.۲.** [۶] (نولکر) غوطه وری ایزومتريک  $R^N(c)$  از  $N_1 \times_{f_1} N_2 \times \dots \times_{f_k} N_k \rightarrow R^N(c)$  به یک خمینه ریمانی با انحناى ثابت  $c$  را داریم. اگر  $\phi$ ، تماماً ژئودزیک آمیخته باشد آنگاه  $\phi$ ، بطور موضعی یک غوطه وری حاصلضرب تابدار است.

**قضیه ۳.۲.** [۵] (ارباچر) غوطه وری ایزومتريک  $\tilde{M}^{n+p}(c)$  از  $\phi: M^n \rightarrow \tilde{M}^{n+p}(c)$  را در نظر می گیریم، می توانیم هم دامنه از غوطه وری را کاهش دهیم، یعنی، یک زیرخمینه تماماً ژئودزیک محض  $N$  از  $\tilde{M}^{n+p}(c)$  وجود داشته باشد. بطوریکه،  $\phi(M^n) \subset N$ .

**قضیه ۴.۲.** [۲] برای هر غوطه وری ایزومتريک  $R^m(c)$  از  $\phi: N_1 \times_f N_2 \rightarrow R^m(c)$  از یک حاصلضرب تابدار  $N_1 \times_f N_2$  به یک خمینه ریمانی با انحناى ثابت  $c$ ، داریم:

$$\frac{\Delta f}{f} \leq \frac{n^2}{4n_2} H^2 + n_1 c,$$

که  $n_i = \dim N_i$ ،  $n = n_1 + n_2$ ، مربع انحناى میانگین  $\phi$ ، و  $\Delta f$  لاپلاس  $f$  بر  $N_1$  است. تساوی (۴.۲) برقرار است اگر و تنها اگر غوطه وری تماماً ژئودزیک آمیخته  $\phi: N_1 \times_f N_2 \rightarrow R^m(c)$  در  $trace h_1 = trace h_2$  صدق کند، که  $trace h_1$  و  $trace h_2$ ، به ترتیب، اثر  $\sigma$  مربوط به  $N_2$  و  $N_1$  را نمایش می دهند.

در ادامه نتایجی از حاصلضرب تابدار زیرخمینه ها را بیان می کنیم.

**قضیه ۵.۲.** [۴] انحناى اسکالر  $\tau$  از حاصلضرب تابدار  $N_1 \times_f N_2 \rightarrow R^m(c)$  برای هر غوطه وری ایزومتريک  $N_1 \times_f N_2 \rightarrow R^m(c)$  رابطه زیر صدق می کند

$$\tau \leq \frac{\Delta f}{n_1 f} + \frac{n^2(n-2)}{2(n-1)} H^2 + \frac{1}{4}(n+1)(n-2)c.$$

اگر  $n = 2$ ، تساوی خود به خود برقرار است.

اگر  $n \geq 3$ ، تساوی برقرار است اگر و تنها اگر داشته باشیم:

- (۱) حاصلضرب تابدار  $N_1 \times_f N_2$  با انحناى ثابت  $c$ ، که تابع تابی  $f$ ، تابع ویژه با مقدار ویژه  $c$ ؛ یعنی،  $\Delta f = cf$  را در نظر می گیریم، در این صورت،  $N_1 \times_f N_2$  به عنوان زیرخمینه تماماً ژئودزیک در  $R^m(c)$  غوطه ور می شود،
- (۲)  $N_1 \times_f N_2$  به عنوان ابرویه دورانی در یک زیرخمینه تماماً ژئودزیک  $R^{n+1}(c)$  از  $R^m(c)$  با یک ژئودزیک از  $R^{n+1}(c)$  به عنوان منحنی مقطع اش بطور موضعی غوطه ور می شود.

### ۳. نابری برای زیرخمینه ها

**تعریف ۱۰.۳.** برای یک  $CR$ -زیر منیفلد  $N$  از یک منیفلد کاهلر، بردارهای انحناى میانگین جزئی  $\vec{H}_D$  و  $\vec{H}_{D^\perp}$  از  $N$  بصورت زیر تعریف می شود

$$\vec{H}_{D^\perp} = \frac{1}{2h} \sum_{i=1}^{2h} \sigma(e_i, e_i), \quad \vec{H}_D = \frac{1}{p} \sum_{r=2h+1}^{2h+p} \sigma(e_r, e_r).$$

یک زیر منیفلد پاد هولومرفیک  $N$  از منیفلد کاهلر  $\tilde{M}$  را مینیمال گوئیم (  $D$  مینیمال یا  $D^\perp$  مینیمال ) اگر  $H = 0$  برقرار باشند (  $\vec{H}_D = 0$  یا  $\vec{H}_{D^\perp} = 0$  برقرار باشند).

**قضیه ۲.۳.** فرض کنید  $N$  یک زیر منیفلد پاد هولومرفیک از یک فضا فرم مختلط  $\tilde{M}^{h+p}(4c)$  با  $h = rank_C D \geq 1$  و  $p = rank D^\perp \geq 2$  باشد در نتیجه

$$\delta(D) \leq \frac{(p-1)(2h+p)^2}{2(p+2)} H^2 + \frac{p}{2}(4c+p-1)c$$

علامت مساوی از نامعادله بالا وقتی برقرار است اگر و تنها اگر دارای شرایط زیر باشد

الف:  $N$  یک  $D$ -مینیمال باشد یعنی  $\vec{H}_D = 0$ .

ب:  $N$  یک ژئودزیک تماماً مختلط باشد.

ج: یک پایه متعامد  $\{e_{2h+1}, \dots, e_n\}$  از  $D^\perp$  وجود دارد که دومین فرم اساسی  $\sigma$  از  $N$  دارای شرایط زیر باشد.

•  $\sigma_{rr}^T = 3\sigma_{ss}^T$  برای  $2h+1 \leq r \neq s \leq 2h+p$ .



$$\bullet \sigma_{s,t}^r = 0 \text{ برای اندیسهای متمایز } \{2h+1, \dots, 2h+p\}. r, s, t \in \{2h+1, \dots, 2h+p\}.$$

**قضیه ۳.۳.** فرض کنید  $N$  یک زیر منیفلد پاد هولومرفیک از یک فضا فرم مختلط  $\tilde{M}^{h+p}(\mathbb{F}c)$  با  $h = \text{rank}_{\mathbb{C}} D \geq 1$  و  $p = \text{rank} D^{\perp} \geq 2$  باشد. اگر  $N$  در تساوی نامعادله قضیه فوق صدق کند و توزیع مختلط  $D$  هم انتگرال پذیر باشد آنگاه  $c = 0$  است و بنابراین  $\tilde{M}^{h+p}(\mathbb{F}c) = C^{h+p}$ . بعلاوه داریم

(الف)  $N$  یک زیر منیفلد پاد هولومرفیک تماماً ژئودزیک از  $C^{h+p}$  است  
 (ب) به تقریب انبساطها و حرکت های جامد از  $N$  یک بخش باز از حاصل ضرب ایمرسیون زیر است

$$\phi : \mathbb{C}^h \times S^p(1) \mapsto \mathbb{C}^{h+p}; (z, x) \mapsto (z, \omega(x)), z \in \mathbb{C}^h, x \in S^p(1)$$

که  $\omega : S^p(1) \mapsto \mathbb{C}^p$  کره ویتنی است.

**قضیه ۳.۴.** فرض کنید  $N$  یک زیر منیفلد پاد هولومرفیک از یک فضا فرم مختلط  $\tilde{M}^{h+p}(\mathbb{F}c)$  با  $h = \text{rank}_{\mathbb{C}} D = 1$  و  $p = \text{rank} D^{\perp} \geq 2$  باشد در نتیجه

$$\delta(D) \leq \frac{(p-1)(p+2)^2}{2(p+2)} H^2 + \frac{p}{2}(p+3)c.$$

در نامعادله بالا علامت تساوی برقرار است اگر و تنها اگر  $c = 0$  باشد و  
 (الف)  $N$  یک زیر منیفلد پاد هولومرفیک تماماً ژئودزیک از  $C^{h+p}$  است یا  
 (ب)  $N$  یک بخش باز از حاصل ضرب ایمرسیون زیر است

$$\phi : \mathbb{C}^h \times S^p(1) \mapsto \mathbb{C}^{h+p}; (z, x) \mapsto (z, \omega(x)), z \in \mathbb{C}^h, x \in S^p(1)$$

که  $\omega : S^p(1) \mapsto \mathbb{C}^p$  کره ویتنی است.

#### ۴. نتایج اصلی

زیر منیفلدهای پاد هولومرفیک با  $\text{rank} D^{\perp} = 1$  فقط ابر رویه های حقیقی هستند.

**تعریف ۱.۴.** یک ابر رویه حقیقی  $N$  از منیفلد تقریباً هرمیتی  $(M, g, J)$  را یک ابر رویه هاف گوئیم اگر  $U = -J\xi$  یک بردار انحنای اصلی باشد یعنی  $U = -J\xi$  یک بردار ویژه برای عملگر شکل  $A_{\xi}$  باشد که  $\xi$  بردار قائم یکه  $N$  است و میدان برداری  $U$  را میدان برداری هاف گوئیم.

**قضیه ۲.۴.** اگر  $N$  یک ابر رویه از یک فضا فرم مختلط  $\tilde{M}^{h+1}(\mathbb{F}c)$  باشد آنگاه برای تانسور ریچی  $Ric$  از  $N$  داریم

$$Ric(J\xi, J\xi) \leq \frac{(2h+1)^2}{2} H^2 + 2hc$$

که  $\xi$  یک میدان برداری قائم یکه از  $N$  در  $\tilde{M}^{h+1}(\mathbb{F}c)$  است.

علامت مساوی در نامعادله بالا برقرار است اگر و تنها اگر  $N$  یک ابر رویه هاف مینیمال خاص باشد.

**قضیه ۳.۴.** [۱] فرض کنید  $N$  یک ابر رویه حقیقی از یک فضا فرم مختلط  $\tilde{M}^{h+1}(\mathbb{F}c)$  باشد. اگر  $N$  در علامت مساوی نامعادله قضیه (۱۰۱۰۱) صدق کند آنگاه توزیع مختلط از  $N$  غیر انتگرال پذیر هست مگر اینکه  $c = 0$  و  $N$  تماماً ژئودزیک باشد.

**قضیه ۴.۴.** [۱] اگر  $N$  یک ابر رویه حقیقی از  $\tilde{M}^2(\mathbb{F}c)$  باشد در نتیجه

$$Ric(J\xi, J\xi) \leq \frac{9}{2} H^2 + 2c.$$

علامت مساوی از نامعادله بالا برقرار است اگر و تنها اگر  $c = 0$  و  $N$  تماماً ژئودزیک باشد.

**قضیه ۵.۴.** [۱] فرض کنید  $N$  یک ابر رویه حقیقی از  $\mathbb{C}^3$  باشد در نتیجه

$$Ric(J\xi, J\xi) \leq \frac{25}{2} H^2.$$

اگر علامت مساوی در نامعادله بالا برقرار باشد آنگاه  $N$  یک زیر منیفلد مینیمال ۳ خط دار تماماً حقیقی از  $\mathbb{C}^3$  است.

**لم ۶.۴.** هر ابر رویه حقیقی از  $CP^2(\mathbb{F})$  در حالت تساوی (۲۳۰۳) صدق می کند.

لم ۷.۴. فرض کنید  $\pi : M \mapsto B$  یک غوطه وری ریمانی با تارهای تماماً ژئودزیک و  $N$  یک زیر منیفلد از  $B$  باشد در نتیجه برای بردارهای متعامد  $e_1, e_2$  در  $N$  و  $\pi(x) \in N$  و  $x \in \tilde{N}$  داریم

$$\tau_{\tilde{N}}(x) - \tau_{\tilde{N}}(\bar{P}_x) = \tau_N - K_N(e_1, e_2) - \mathfrak{Z}(A_{\pi}^{\circ} - \|A_{\bar{e}_1} \bar{e}_2\|^2) + A_{\pi}^{\sim} - \sum_{i=1}^2 \sum_{\alpha=1}^{m-b} K_{\tilde{N}}(\bar{e}_i, v_{\alpha}),$$

که  $\bar{e}_1, \bar{e}_2$  بردارهای افقی در  $x$  و  $\{v_1, \dots, v_{m-b}\}$  یک پایه متعامد یکه از فضای قائم  $V_x$  و  $\bar{P}_x$  زیرفضای تولید شده با  $\bar{e}_1, \bar{e}_2$  و  $V_x$  هستند.

لم ۸.۴. فرض کنید  $\phi : N \mapsto \mathbb{C}P^m(4)$  یک ایمرسیون ایزومتربیک از یک منیفلد ریمانی  $n$  بعدی  $N$  بسوی یک فضای تصویری مختلط  $\mathbb{C}P^m(4)$  باشد. در نتیجه برای صفحه برشی  $\mathfrak{z}$  بعدی  $T_y N$ ،  $\psi \subset T_y N$  داریم

$$\tau_N - K_N(\psi) \leq \frac{n^2(n-2)}{2(n-1)} \|H\|^2 + \frac{(n+1)(n-2)}{2} + \frac{3}{2} \|P\|^2 - 3\Theta(\psi).$$

تساوی در نامعادله بالا در نقطه  $y \in N$  برقرار است اگر و تنها اگر یک پایه متعامد  $\{e_1, \dots, e_2\}$  در  $y$  وجود داشته باشد که  
الف.  $\psi = \text{Span}\{e_1, e_2\}$   
ب. عملگر شکل  $A$  در  $y$  است که

$$A_{e_s} = \begin{pmatrix} B_s & \circ \\ \circ & \mu_s I \end{pmatrix}, \quad s = n+1, \dots, 2m,$$

که  $I$  یک زیر ماتریس همانی  $(n-2) \times (n-2)$  و  $B_s$  زیر ماتریس متقارن  $2 \times 2$  با  $\mu_s = \text{trace} B_s$  که در آن  $s = n+1, \dots, 2m$  است.

قضیه ۹.۴. فرض کنید  $\pi : S^{2m+1} \mapsto \mathbb{C}P^m(4)$  یک لایه سازی هاف و  $N$  یک زیر منیفلد  $-n$  بعدی از  $\mathbb{C}P^m(4)$  باشد در نتیجه

$$\delta^H \leq \frac{n^2(n-2)}{2(n-1)} \|H\|^2 + \|P\|^2 + \frac{1}{2} (n^2 - n - 2)$$

که  $\|H\|^2$  انحنای میانگین بتوان دو  $N$  در  $\mathbb{C}P^m(4)$  است. علامت تساوی در نامعادله بالا برقرار است اگر و تنها اگر یک پایه متعامد یکه  $\{e_1, \dots, e_m\}$  وجود داشته باشد که (الف) عملگر شکل  $A$  از  $N$  در  $\mathbb{C}P^m(4)$  باشد که

$$A_{e_s} = \begin{pmatrix} B_s & \circ \\ \circ & \mu_s I \end{pmatrix}, \quad s = n+1, \dots, 2m,$$

که  $I$  یک زیر ماتریس همانی  $(n-2) \times (n-2)$  و  $B_s$  زیر ماتریس متقارن  $2 \times 2$  با  $\mu_s = \text{trace} B_s$  که در آن  $s = n+1, \dots, 2m$  است.  
(ب)  $Pe_1 = Pe_2 = 0$ .

قضیه ۱۰.۴. فرض کنید  $N$  یک زیر منیفلد  $CR$  از فضای تصویری مختلط  $\mathbb{C}P^m(4)$  باشد.  $N$  در علامت تساوی نامعادله قضیه قبل صدق می کند اگر و تنها اگر  $N$  یک زیر منیفلد تماماً حقیقی باشد که

$$\delta(2) = \frac{n^2(n-2)}{2(n-1)} \|H\|^2 + \frac{1}{2} (n^2 - n - 2).$$

## مراجع

1. B.-Y. Chen, *Geometry of warped product CR-submanifolds in Kaehler manifolds part II*, Monatsh. Math. 134 (2001), no. 2, 103–119
2. B.-Y. Chen, *On isometric minimal immersions from warped products into real space forms*, Proc. Edinburgh Math. Soc. 45 (2002), no. 3, 579–587.
3. B.-Y. Chen, *An optimal inequality for CR-warped products in complex space forms involving CR  $\delta$ -invariant*, Internet. J. Math. 23 (2012), no. 3, 1250045, 17 pp.
4. B.-Y. Chen, *Riemannian Submanifolds*. Math. DG. 7 Jul 2013.
5. J. Erbacher, *Reduction of the Codimension of on isometric immersion*, J. Differential 5, (1971) 333–340.
6. S. Nölker, *Isometric immersions of warped products*, Differential Geom. Appl. 6 (1996), no. 1, 1–30.

پست الکترونیکی: [math\\_riman@yahoo.com](mailto:math_riman@yahoo.com)  
پست الکترونیکی: [ilmakchi@azaruniv.ac.ir](mailto:ilmakchi@azaruniv.ac.ir)

بررسی ساختار ریمانی  $\Sigma$ -متالیک روی زیرمنیفدهای یک منیفلد ریمانی متالیک

حسن ملکی\*  
گروه ریاضی، دانشگاه ملایر، ملایر، ایران  
میلاد احمدی فرد  
دانشگاه ملایر، ملایر، ایران

چکیده. هدف از نگارش این مقاله بررسی خواص ساختارهای متالیک روی منیفدهای ریمانی و خواص ساختارهای  $\Sigma$ -متالیک تولید شده روی زیر منیفلد یک منیفلد ریمانی متالیک می‌باشد. در واقع ما با توجه به خواص نشانده‌ها و با استفاده از ساختار متالیک روی منیفلد ریمانی برخی خواص ساختار  $\Sigma$ -متالیک زیر منیفدها را بررسی کرده، به رابطه‌هایی می‌رسیم که در مطالعه منیفدهای ریمانی متالیک نقش مهمی ایفا می‌کنند.

واژه‌های کلیدی: منیفلد ریمانی متالیک، ساختارهای متالیک، ساختارهای  $\Sigma$ -متالیک. .  
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 57M50, 53C15, 57N16.

## ۱. پیش‌گفتار

عدد طلایی یا نسبت طلایی جایگاه ویژه‌ای در هندسه، معماری، موسیقی و حتی هنر و فلسفه دارد، آنچنان که از هندسه دوران باستان یا هندسه جدید همیشه مورد توجه ریاضیدانان و معماران قرار گرفته است. برای مثال در ساخت و معماری اهرام مصر این نسبت به کرات به کار رفته است. در دوران جدید نیز دنباله فیبوناتچی با ضابطه  $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$  که  $f_1 = 1$  و  $f_0 = 0$  در ارتباط نزدیکی با عدد طلایی در بسیاری از زمینه‌های ریاضی بروز و حضور دارد. دنباله حاصل از نسبت جملات متوالی در دنباله فیبوناتچی به عدد طلایی همگراست. به علاوه عدد طلایی ریشه مثبت چند جمله‌ای درجه دوم  $x^2 - x - 1 = 0$  است که با نماد  $\phi$  نمایش داده می‌شود. اعداد متالیک تعمیمی از عدد طلایی است که برای اولین بار توسط اسپینادل در [۸] استفاده شد. یک عدد  $(p, q)$ -متالیک عبارت است از ریشه مثبت معادله  $x^2 - px - q = 0$  که در آن  $p$  و  $q$  اعدادی صحیح و مثبت هستند. این عدد از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\sigma_{p,q} = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$$

اعداد متالیک کاربردهای فراوانی از جمله در هندسه فرکتالی دارند [۱]. برای کاربردهای مختلف این اعداد به [۵] نگاه کنید. از طرف دیگر مفهوم ساختار چندجمله‌ای روی منیفدها را اولین بار گولدربرگ و یانو در مقاله‌ای به نام "ساختارهای چند جمله‌ای روی منیفدها" در سال ۱۹۷۰ و در ادامه گولدربرگ و پتریدیس در مقاله‌ای به نام "جواب‌های دیفرانسیل‌پذیر معادلات جبری روی منیفدها" معرفی و مطالعه کردند [۲، ۳]. سپس هرتکانو و کراسماریانو ساختارهای طلایی را ارائه دادند [۶]. پس از آن ساختارهای متالیک به عنوان تعمیم کلی از ساختار طلایی معرفی و بررسی شدند. ساختارهای متالیک روی منیفدها را می‌توان تعمیمی از اعداد متالیک به حساب آورد که به نتایج جالب و شگفت‌انگیزی منجر می‌شود. ما در این مقاله ابتدا این ساختارها روی یک منیفلد ریمانی تعریف می‌کنیم. سپس به بررسی زیرمنیفدهای چنین منیفدهایی می‌پردازیم و خاصیت‌های آنها را نشان می‌دهیم. برای جزئیات بیشتر درباره ساختارهای متالیک به [۴، ۵] نگاه کنید.

## ۲. ساختارهای ریمانی طلایی و متالیک

تعریف ۱.۰۲. یک ساختار چندجمله‌ای طلایی روی منیفلد  $\overline{M}$  یک میدان تانسوری  $J$  از نوع  $(1, 1)$  است که در معادله‌ی زیر صدق می‌کند:

$$(1) \quad J^2 = J + I$$

که در آن  $I$  همان عملگر همانی روی جبر لی میدان‌های برداری هموار  $\mathfrak{X}(\overline{M})$  می‌باشد.

برای تعاریف دقیق مفاهیم هندسی آمده در این قسمت به [۷] نگاه کنید. با تعمیم ساختار طلایی می‌توان ساختار متالیک را به صورت زیر به دست آورد [۵].

\* ارائه‌دهنده

**تعریف ۲.۲.** یک ساختار چندجمله‌ای متالیک روی منیفلد  $\overline{M}$  یک میدان تانسوری  $J$  از نوع  $(p, q)$  است که در معادله زیر صدق می‌کند:

$$(۲) \quad J^2 = pJ + qI$$

در این رابطه نیز  $I$  همان عملگر همانی روی جبر لی  $\mathfrak{X}(\overline{M})$  از میدان‌های برداری روی  $\overline{M}$  و  $p$  و  $q$  اعداد صحیح مثبت می‌باشند.

فرض می‌کنید  $(\overline{M}, \overline{g})$  یک منیفلد ریمانی و  $J$  یک ساختار متالیک روی آن باشد. متریک ریمانی  $\overline{g}$  را  $J$ -سازگار گوئیم هرگاه برای هر  $X, Y \in \mathfrak{X}(\overline{M})$  داشته باشیم:

$$(۳) \quad \overline{g}(JX, Y) = \overline{g}(X, JY)$$

در این حالت  $(\overline{g}, J)$  را یک ساختار ریمانی متالیک و  $(\overline{M}, \overline{g}, J)$  را یک منیفلد ریمانی متالیک گوئیم [۵]. در یک منیفلد ریمانی متالیک  $(\overline{M}, \overline{g}, J)$  برای هر  $X, Y \in \mathfrak{X}(\overline{M})$  از رابطه‌های (۲) و (۳) می‌توان رابطه مهم زیر را نتیجه گرفت:

$$(۴) \quad \overline{g}(JX, JY) = p\overline{g}(X, JY) + q\overline{g}(X, Y)$$

### ۳. ساختارهای ریمانی $\Sigma$ -متالیک

در اینجا فرض شده است که  $M$  یک زیر منیفلد از بعد  $n$  است که در یک منیفلد ریمانی متالیک  $(\overline{M}, \overline{g}, J)$  با بعد  $(n+r)$  نشانده شده است و  $n, r$  اعداد صحیح مثبت هستند. فضای مماس بر منیفلد  $M$  در نقطه  $x \in M$  را با  $T_x M$  و فضای نرمال  $M$  در نقطه  $x \in M$  را با  $T_x^\perp M$  نمایش می‌دهیم. حال فرض کنید  $i_*$  دیفرانسیل نشاننده نگاشت شمول  $\overline{M} \hookrightarrow M$  باشد. متریک ریمانی  $\overline{g}$  که روی  $\overline{M}$  تعریف شده است با نام  $g$  روی  $M$  محدود می‌شود. در واقع  $i_*$  یک متریک روی  $M$  القا می‌کند که از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M) \quad g(X, Y) = \overline{g}(i_* X, i_* Y)$$

فرض کنید مجموعه  $\{N_1, \dots, N_r\}$  یک پایه متعامد از فضای نرمال  $T_x^\perp(M)$  باشد و اندیس‌های  $\alpha, \beta$  و  $\gamma$  در مجموعه‌ی  $\{1, \dots, r\}$  تغییر کنند. در نتیجه برای هر  $X \in T_x(M)$  میدان‌های برداری  $J(N_\alpha)$  و  $J(i_* X)$  به مولفه‌های مماسی و نرمال به صورت زیر تجزیه می‌شوند:

$$(۵) \quad J(i_* X) = i_*(P(X)) + \sum_{\alpha=1}^r u_\alpha(X) N_\alpha$$

$$(۶) \quad J(N_\alpha) = i_*(\xi_\alpha) + \sum_{\beta=1}^r a_{\alpha\beta} N_\beta$$

که در این روابط  $P$  یک میدان تانسوری از نوع  $(1, 1)$  روی  $M$ ،  $\xi_\alpha \in \mathfrak{X}(M)$ ،  $u_\alpha$  یک ۱-فرم روی  $M$  و  $(a_{\alpha\beta})_r$  یک ماتریس  $r \times r$  از توابع حقیقی هموار روی  $M$  است.  $\Sigma = (P, g, u_\alpha, \xi_\alpha, (a_{\alpha\beta}))$  را یک ساختار  $\Sigma$ -متالیک روی زیرمنیفلد  $M$  تولید شده بوسیله ساختار ریمانی متالیک  $(\overline{g}, J)$  از منیفلد  $\overline{M}$  گوئیم. به راحتی می‌توان نشان داد که معادله زیر در یک منیفلد ریمانی متالیک برقرار است [۵]:

$$(۷) \quad P^2 X = pP(X) + qX - \sum_{\alpha} u_\alpha(X) \xi_\alpha$$

قضیه‌ای که در این قسمت قصد اثبات آن را داریم در [۴] و [۵] بدون اثبات آمده است و همچنین در مواردی خاص برای ساختارهای طلائی اثبات شده است [۶]. ما آن را در حالت کلی و برای منیفلدهای ریمانی متالیک اثبات می‌کنیم. در نتیجه این قضیه معادله‌هایی به دست می‌آوریم که در مطالعه خواص منیفلدهای ریمانی متالیک بسیار فراوان مورد استفاده قرار می‌گیرند.

### ۴. نتیجه اصلی

از آنجا که خاصیت‌های زیر در بررسی و مطالعه ساختار  $\Sigma$ -متالیک زیرمنیفلد  $M$  نقش اساسی و مهم بازی می‌کنند قضیه زیر را به عنوان نتیجه اصلی این مقاله ارائه می‌کنیم. این قضیه در [۵] بدون اثبات ذکر شده است.

**قضیه ۱.۴.** ساختار  $\Sigma = (P, g, u_\alpha, \xi_\alpha, (a_{\alpha\beta}))$  روی  $M$  برای هر  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  در معادلات زیر صدق می‌کند:

$$(۱) \quad u_\alpha(P(X)) = pu_\alpha(X) - \sum_{\beta} a_{\alpha\beta} u_\beta(X)$$

$$(۲) \quad a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$$

$$u_\beta(\xi_\alpha) = q\delta_{\alpha\beta} + pa_{\alpha\beta} - \sum_\gamma a_{\alpha\gamma}a_{\gamma\beta} \quad (3)$$

که  $\delta_{\alpha\beta}$  همان دلتای کرونکر و  $p, q$  اعداد صحیح مثبت هستند.

اثبات. (۱) بنابر فرض برای تانسور  $P$  رابطه (۵) مفروض است:

$$J(i_*X) = i_*(PX) + \sum_\alpha u_\alpha(X)N_\alpha$$

حال داریم:

$$J^*(i_*X) = J(i_*(PX)) + \sum_\alpha u_\alpha(X)J(N_\alpha) \quad (8)$$

از طرف دیگر روابط (۲) و (۶) نیز مفروض اند:  $JN_\alpha = i_*(\xi_\alpha) + \sum_\beta a_{\alpha\beta}N_\beta$   $J^* = pJ + qI$  با جایگذاری این مقادیر در رابطه (۸) خواهیم داشت:

$$(pJ + qI)(i_*X) = J(i_*(PX)) + \sum_\alpha u_\alpha(X)(i_*\xi_\alpha + \sum_\beta a_{\alpha\beta}N_\beta) \quad (9)$$

از طرف دیگر اگر در رابطه (۵) به جای  $X$  مقدار  $PX$  را قرار دهیم رابطه زیر به دست می آید:

$$J(i_*(PX)) = i_*(P^*X) + \sum_\alpha u_\alpha(PX)N_\alpha$$

حال این مقدار را در رابطه (۹) قرار می دهیم:

$$\begin{aligned} pJ(i_*X) + qI(i_*X) &= i_*(P^*X) + \sum_\alpha u_\alpha(PX)N_\alpha \\ &+ \sum_\alpha u_\alpha(X)i_*(\xi_\alpha) + \sum_\alpha u_\alpha(X) \sum_\beta a_{\alpha\beta}N_\beta \end{aligned} \quad (10)$$

دوباره با استفاده از رابطه (۵) به جای  $J(i_*X)$  در (۱۰) مقدار  $i_*(PX) + \sum_\alpha u_\alpha(X)N_\alpha$  را قرار می دهیم:

$$\begin{aligned} pi_*(PX) + p \sum_\alpha u_\alpha(X)N_\alpha + q(i_*X) &= \\ i_*(P^*X) + \sum_\alpha u_\alpha(PX)N_\alpha + \sum_\alpha u_\alpha(X)i_*(\xi_\alpha) &+ \sum_\alpha u_\alpha(X) \sum_\beta a_{\alpha\beta}N_\beta \end{aligned} \quad (11)$$

حال معادله (۷) را در نظر می گیریم:  $P^*X = pPX + qX - \sum_\alpha u_\alpha(X)\xi_\alpha$  اگر  $i_*$  را در طرفین این معادله اثر دهیم داریم:

$$i_*(P^*X) = p(i_*(PX)) + q(i_*X) - \sum_\alpha u_\alpha(X)i_*(\xi_\alpha) \quad (12)$$

از (۱۱) و (۱۲) داریم:

$$p \sum_\alpha u_\alpha(X)N_\alpha - \sum_\alpha u_\alpha(PX)N_\alpha - \sum_\alpha u_\alpha(X) \sum_\beta a_{\alpha\beta}N_\beta = 0$$

از این رابطه داریم:  $\sum_\alpha u_\alpha(PX)N_\alpha = p \sum_\alpha u_\alpha(X)N_\alpha - \sum_\alpha u_\alpha(X) \sum_\beta a_{\alpha\beta}N_\beta$  اگر جمله آخر را نیز برحسب  $N_\alpha$  بنویسیم خواهیم داشت:  $\sum_\alpha u_\alpha(PX)N_\alpha = p \sum_\alpha u_\alpha(X)N_\alpha - \sum_\beta u_\beta(X) \sum_\alpha a_{\alpha\beta}N_\alpha$  با حذف  $N_\alpha$  از تمام جملات داریم:  $u_\alpha(PX) = pu_\alpha(X) - \sum_\beta a_{\alpha\beta}u_\beta(X)$

(۲) با استفاده از رابطه (۶) درباره سازگاری متر، برای میدان های برداری نرمال  $N_\alpha$  و  $N_\beta$  خواهیم داشت:

$$\bar{g}(JN_\alpha, N_\beta) = \bar{g}(N_\alpha, JN_\beta) \quad (13)$$

می توان با جایگذاری  $JN_\alpha$  و  $JN_\beta$  از رابطه (۵) در (۱۳) رابطه زیر را بدست آورد:

$$\bar{g}(i_*(\xi_\alpha) + \sum_\gamma a_{\alpha\gamma}N_\gamma, N_\beta) = \bar{g}(N_\alpha, (i_*(\xi_\beta) + \sum_\gamma a_{\beta\gamma}N_\gamma)) \quad (14)$$

با ساده کردن این معادله خواهیم داشت:

$$\bar{g}(i_*(\xi_\alpha), N_\beta) + \bar{g}(\sum a_{\alpha\gamma} N_\gamma, N_\beta) = \bar{g}(N_\alpha, i_*(\xi_\beta)) + \bar{g}(N_\alpha, \sum a_{\beta\gamma} N_\gamma)$$

که به راحتی به معادله زیر می‌رسیم:

$$(15) \quad \bar{g}(i_*(\xi_\alpha), N_\beta) - \bar{g}(i_*(\xi_\beta), N_\alpha) = \bar{g}(N_\alpha, \sum a_{\beta\gamma} N_\gamma) - \bar{g}(N_\alpha, \sum a_{\alpha\gamma} N_\gamma)$$

چون  $\xi_\alpha$  و  $\xi_\beta$  میدان های برداری مماس و  $N_\alpha$  و  $N_\beta$  میدان های برداری نرمال و بر هم عمود هستند، داریم:

$$\bar{g}(i_*(\xi_\alpha), N_\beta) = 0 \quad \bar{g}(i_*(\xi_\beta), N_\alpha) = 0$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$(16) \quad \bar{g}(N_\alpha, \sum a_{\beta\gamma} N_\gamma) = \bar{g}(\sum a_{\alpha\gamma} N_\gamma, N_\beta)$$

با استفاده از خاصیت متریک ریمانی داریم:  $\bar{g}(N_\alpha, N_\gamma) = \delta_{\alpha\gamma}$  با جایگذاری این مقدار در (16) داریم:  $\sum_\gamma a_{\beta\gamma} \delta_{\alpha\gamma} =$

$$a_{\beta\alpha} = a_{\alpha\beta} \quad \text{با تغییر اندیس ها به رابطه این قسمت می‌رسیم:}$$

(3) با به کار بردن (2) برای میدان برداری نرمال  $N_\alpha$  خواهیم داشت:  $J^*(N_\alpha) = pJ(N_\alpha) + qN_\alpha$  از طرف دیگر با

استفاده از (6) داریم:  $J(i_*(\xi_\alpha) + \sum a_{\alpha\gamma} N_\gamma) = pi_*(\xi_\alpha) + p \sum a_{\alpha\beta} N_\beta + qN_\alpha$

(5) بدست می‌آوریم:

$$i_*P(\xi_\alpha) + \sum_\beta u_\beta(\xi_\alpha)N_\beta + \sum a_{\alpha\gamma}(i_*(\xi_\alpha)) + \sum_\beta a_{\gamma\beta}N_\beta = pi_*(\xi_\alpha) + p \sum_\beta a_{\alpha\beta}N_\beta + qN_\alpha$$

جملات شامل  $N_\beta$  را یک طرف تساوی و باقی جملات را طرف دیگر می‌بریم:

$$(17) \quad \sum u_\beta(\xi_\alpha)N_\beta - p \sum a_{\alpha\beta}N_\beta + \sum a_{\alpha\gamma}a_{\gamma\beta}N_\beta = pi_*(\xi_\alpha) + qN_\alpha - i_*P(\xi_\alpha) - \sum a_{\alpha\gamma}i_*(\xi_\gamma)$$

اگر از طرفین تساوی  $\bar{g}(N_\beta, \cdot)$  بگیریم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & \sum u_\beta(\xi_\alpha)\bar{g}(N_\beta, N_\beta) - p \sum a_{\alpha\beta}\bar{g}(N_\beta, N_\beta) + \sum a_{\alpha\gamma}a_{\gamma\beta}\bar{g}(N_\beta, N_\beta) \\ &= p\bar{g}(N_\beta, i_*(\xi_\alpha)) + q\bar{g}(N_\beta, N_\alpha) - i_*\bar{g}(N_\beta, P(\xi_\alpha)) - \sum a_{\alpha\gamma}\bar{g}(N_\beta, i_*(\xi_\gamma)) \end{aligned}$$

با ساده کردن داریم:  $u_\beta(\xi_\alpha) - pa_{\alpha\beta} + \sum a_{\alpha\gamma}a_{\gamma\beta} = q\delta_{\alpha\beta}$  بنابراین خواهیم داشت:

$$(18) \quad u_\beta(\xi_\alpha) = q\delta_{\alpha\beta} + pa_{\alpha\beta} - \sum a_{\alpha\gamma}a_{\gamma\beta}$$

و حکم این قسمت اثبات می‌شود.

□

## مراجع

1. M. Chandra, M. Rani, *Categorization of fractal plants*, Chaos Solitons and Fractals, (2009), 41(3) 1442-1447.
2. S. I. Goldberg, K. Yano, *Polynomial structures on manifolds*, Kodai Math. Sem, (1970), Rep. 22 199-218.
3. S.I. Goldberg, N.C. Petridis, *Differentiable solutions of algebraic equations on manifolds*, Kodai Math Sem, (1973), Rep, 25, 111-128.
4. C. E. Hretcanu, A. M. Blaga, *Submanifolds in metallic Riemannian manifolds*, Differential Geometry - Dynamical Systems, (2018), Vol.20, pp. 83-97.
5. C. E. Hretcanu, M. Crasmareanu, *metallic structures on Riemannin manifolds*, Rev Un Mat Argentina, (2013), 54, 19-20.
6. C. E. Hretcanu, M. Crasmareanu, *Applications of the Golden ratio on Riemannian manifolds*, Turkish J. Math. (2009), 33(2), 179-191.
7. J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer, 2002.
8. V. W. D. Spinadel, *The metallic means family and multifractal spectra*, Nonlinear Anal. Ser. B: Real World Appl. (1999), 36(6), 721-745.

پست الکترونیکی: [HMaleki@Malayeru.ac.ir](mailto:HMaleki@Malayeru.ac.ir)

پست الکترونیکی: [miladahmadifard110@gmail.com](mailto:miladahmadifard110@gmail.com)

ارائه‌های پوستری

معادلات دیفرانسیل و سیستم‌های دینامیکی

## تأثیر بازخوردهای تلفیق شده در دینامیک شبکه تنظیمی بین سلولی در کپک مخاطی دیکتیوستلیم

زهره باقری قلعه‌نویی\*  
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران  
و مهدی میرزائی  
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران

چکیده. حلقه‌های بازخورد مثبت و منفی و تلفیق دو حلقه با یکدیگر، می‌تواند منجر به بروز رفتارهای متعددی نظیر نوسان، دوپایایی و تک‌پایایی شود. تغییر مقادیر پارامترهای مربوط به هر یک از حلقه‌های بازخورد، تغییر قدرت این حلقه‌ها را در پی دارد. در مطالعات زیستی، تغییر قدرت حلقه‌های بازخورد به عنوان یکی از مولفه‌های مهم در ظهور رفتارهای دینامیکی متعدد در نظر گرفته می‌شود. تلفیق و تعامل حلقه‌های بازخورد با یکدیگر، توسط وجود یک و یا چند گونه و تعامل مشترک در حلقه‌های بازخورد، عامل اساسی دیگر در وقوع این امر می‌باشد. در این مقاله، ضمن بررسی رفتارهای متعدد منتج از تغییر قدرت هر یک از حلقه‌های بازخورد در سامانه‌ای دارای حلقه‌های بازخورد تلفیق شده، به شرح تأثیر وجود سایر حلقه‌های بازخورد در دینامیک سامانه و رفتارهای ناشی از آن خواهیم پرداخت. **واژه‌های کلیدی:** سامانه‌های دینامیکی، سامانه‌های زیستی، حلقه‌های بازخورد. **طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]:** (۱ تا ۳ مورد) 92B05, 37N25, 97N40.

## ۱. پیش‌گفتار

سامانه‌های زیستی حاصل اندرکنش تعاملات بین مولکول‌های مختلف است که اثر تنظیمی مهاري و یا فعال‌سازی دارند. در این سامانه‌ها دو نوع مهم از زیرسامانه، به نام بازخورد مثبت و منفی وجود دارد. بازخورد یکی از ابزارهای عمده کنترل در سامانه‌های زیستی است که می‌توان از خروجی آن به عنوان بخشی از ورودی در راستای تنظیم دینامیک سامانه بهره برد [۴]. تعداد تعاملات منفی در بازخورد مثبت در صورت وجود، زوج و سایر تعاملات مثبت می‌باشند. در مقابل، تعداد تعاملات منفی بازخورد منفی، فرد می‌باشد. یک حلقه‌ی بازخورد منفی منفرد می‌تواند عامل بروز نوسان در سامانه گردد [۵]، این در حالی است که حلقه‌ی بازخورد مثبت می‌تواند منجر به ظهور دوپایایی در رفتار سامانه گردد که در تعیین سرنوشت سلولی نقش مهمی را ایفا می‌کند [۲]. حلقه‌های بازخورد مثبت و منفی عموماً به منظور انجام عملکردهای مختلف، با یکدیگر در تعامل هستند [۱]. کشف عملکردهای نوظهور ناشی از تلفیق حلقه‌های بازخورد، هنوز یک چالش در زیست‌شناسی سامانه‌ای است [۶]. در این مقاله ضمن بررسی تأثیر حلقه‌های بازخورد بر دینامیک سامانه، به شرح رفتارهای دینامیکی حاصل از تلفیق حلقه‌های بازخورد خواهیم پرداخت.

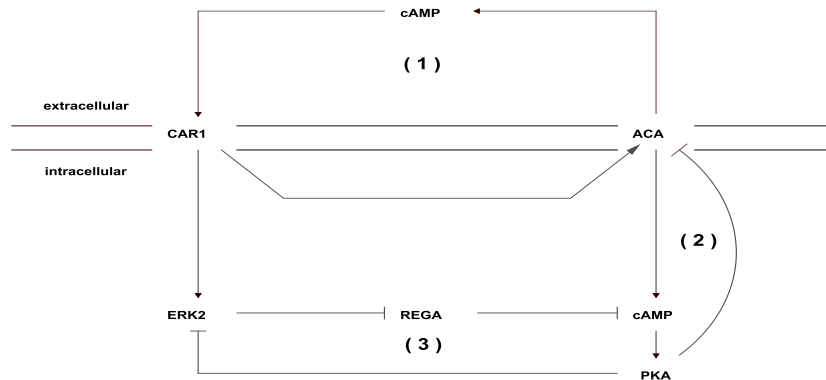
## ۲. معرفی ساختار مدل و دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی متناظر

کپک مخاطی دیکتیوستلیم<sup>۱</sup> یوکاریوتی است که از باکتری تغذیه می‌کند و از آن به عنوان یک ارگانیسم مدل در مطالعات زیستی بهره گرفته می‌شود. در حضور فراوان طعمه‌ها و شکارهای باکتریایی، این سلول‌ها به طور مستمر تغذیه می‌کنند و در حالت کمبود غذا این سلول‌ها به یکدیگر پیوسته و ضمن تشکیل توده‌ی سلولی، ارتباطات بین سلولی را فراهم می‌آورند. در سال ۱۹۹۸ میکائیل لاب<sup>۲</sup> و ویلیام لومیس<sup>۳</sup> مدل مسیر پیام‌رسانی داخل سلولی را پیشنهاد دادند. در این مدل، cAMP خارج سلولی گیرنده‌ی غشایی CAR1 را که خود فعال‌سازی مولکول پیام‌رسان ERK2 و آنزیم غشایی ACA به دنبال دارد، فعال می‌کند (حلقه‌ی بازخورد مثبت (۱)). ACA تولید cAMP را کاتالیز می‌کند و ERK2 نیز آنزیم REGA که cAMP داخل سلولی را تجزیه می‌کند را مهار می‌کند. در این سامانه دو حلقه‌ی بازخورد منفی (۲) و (۳) توسط فعال‌سازی پروتئین کیناز A (PKA) به کمک cAMP و با مهار دو گونه‌ی ERK2 و ACA ظاهر می‌گردند. ساختار مدل (شکل ۱) و دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی مدل به شرح ذیل است [۳]:

<sup>3</sup> William Loomis<sup>2</sup> Michael Laub<sup>1</sup> Dictyostelium

\* ارائه‌دهنده





شکل ۱. شبکه‌ی تعاملات شیمیایی

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \frac{d}{dt}ACA(t) = k_1 * CAR_1(t) - k_2 * ACA(t) * PKA(t) \\
 (2) \quad & \frac{d}{dt}PKA(t) = k_3 * cAMP_{int}(t) - k_4 * PKA(t) \\
 (3) \quad & \frac{d}{dt}ERK_2(t) = k_5 * CAR_1(t) - k_6 * ERK_2(t) * PKA(t) \\
 (4) \quad & \frac{d}{dt}REGA(t) = k_7 - k_8 * REGA(t) * ERK_2(t) \\
 (5) \quad & \frac{d}{dt}cAMP_{int}(t) = k_9 * ACA(t) - k_{10} * REGA(t) * cAMP_{int}(t) \\
 (6) \quad & \frac{d}{dt}cAMP_{ext}(t) = k_{11} * ACA(t) - k_{12} * cAMP_{ext}(t) \\
 (7) \quad & \frac{d}{dt}CAR_1(t) = k_{13} * cAMP_{ext}(t) - k_{14} * CAR_1(t)
 \end{aligned}$$

نام هر یک از گونه‌های ذکر شده در دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی فوق، بیانگر غلظت آن‌ها می‌باشد. این معادلات به صورت عددی حل شده‌اند. کلیه‌ی نمودارهای سری زمانی و نمودارهای انشعاب توسط جعبه ابزار matcont در نرم‌افزار MATLAB شبیه‌سازی شده‌اند. مقادیر اولیه‌ی غلظت کلیه‌ی گونه‌های درگیر در تعاملات معادل با ۱ و مقادیر اولیه‌ی سایر پارامترها به این قرار می‌باشد:  $k_1 = 2$ ,  $k_{10} = 0.8$ ,  $k_9 = 0.3$ ,  $k_8 = 1.3$ ,  $k_7 = 1$ ,  $k_6 = 0.8$ ,  $k_5 = 0.6$ ,  $k_4 = 1.5$ ,  $k_3 = 2.5$ ,  $k_2 = 0.9$ ,  $k_{14} = 4.5$  و  $k_{13} = 23$ ,  $k_{12} = 4.9$ ,  $k_{11} = 0.7$ .

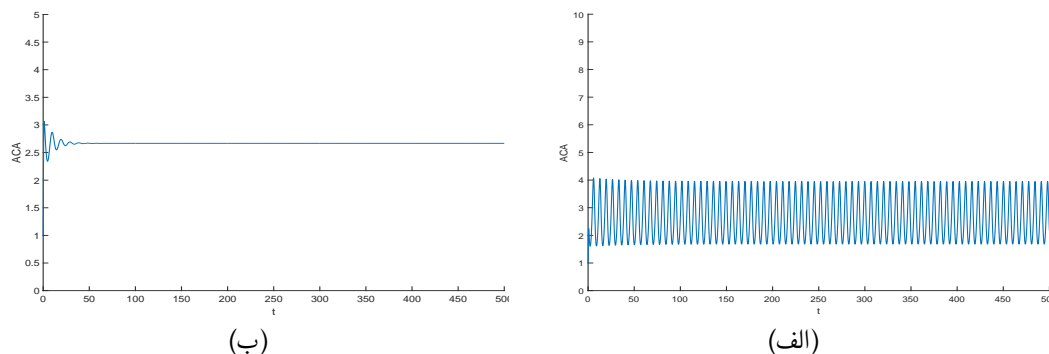
### ۳. نتایج

۱.۳. تولید نوسان توسط حلقه‌ی بازخورد منفی (۲). با جایگزینی مولفه‌های  $k_1 * ACA$  و  $k_{10} * REGA * cAMP_{int}$  با  $k_1$  و  $k_{10}$  حلقه‌ی بازخورد مثبت (۱) و حلقه‌ی بازخورد منفی (۳)، غیر فعال و لذا سامانه فقط یک حلقه‌ی بازخورد منفی فعال خواهد داشت (حلقه‌ی ۲). این سامانه با شرایط اولیه‌ی مفروض قادر به تولید نوسانات پایدار و مداوم خواهد بود (شکل ۲، بخش «الف»).

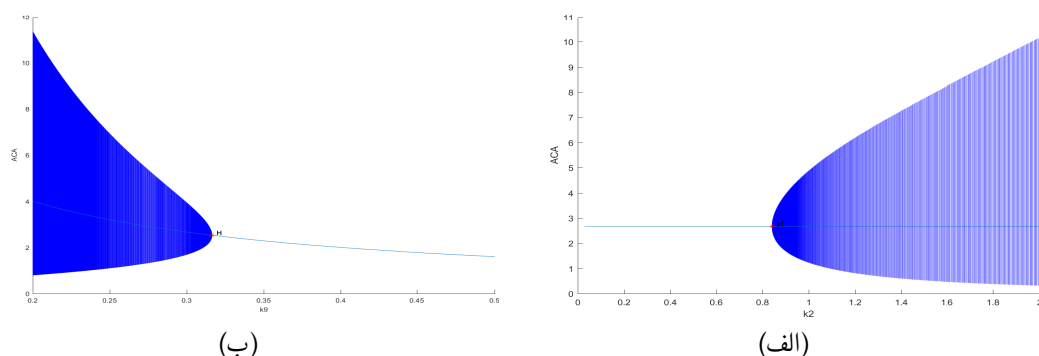
کاهش قدرت بازخورد منفی توسط کاهش مقدار یکی از پارامترهای  $k_2$  و  $k_6$  به نوساناتی میرا که در نهایت، در یک حالت پایا مستقر خواهد شد را نمایش می‌دهد (شکل ۲، بخش «ب»). این نتایج با مرجع [۶] همخوانی دارد.

با دقت در بخش «الف» شکل ۳، در می‌یابیم که افزایش قدرت بازخورد منفی توسط تغییر مقدار یکی از پارامترهای  $k_2$  و  $k_6$  درگیر در حلقه‌ی بازخورد منفی مرکزی منجر به افزایش دامنه‌ی نوسانات در سامانه‌ی مفروض و کاهش این مقادیر، باعث کاهش دامنه‌ی نوسانات تا انحطاط دامنه‌ی نوسان در سامانه و همگرایی و لذا استقرار در حالت پایا خواهد شد (نقطه‌ی H در نمودار، نقطه‌ی شروع نوسانات سامانه و نشان‌دهنده‌ی انشعاب Hopf می‌باشد).

۲.۳. تأثیر تعاملات اجزای حلقه‌های بازخورد (۱) و (۲) با سایر گونه‌ها. با توجه به نکات ذکر شده در بخش اخیر، انتظار می‌رود تغییر مقدار پارامتر  $k_9$  و اتخاذ مقادیر بالاتر، ایجاد محدوده‌ی نوسانی و افزایش دامنه‌ی نوسانات رادر پی داشته باشد. این در حالی است



شکل ۲. (الف) تولید نوسانات پایدار و مداوم توسط حلقه‌ی بازخورد منفی (۲) (ب) تولید نوسانات میرا توسط حلقه‌ی بازخورد منفی (۲)



شکل ۳. (الف) نمودار انشعاب غلظت گونه‌ی ACA بر حسب پارامتر  $k_2$  (ب) نمودار انشعاب غلظت گونه‌ی ACA بر حسب پارامتر  $k_1$

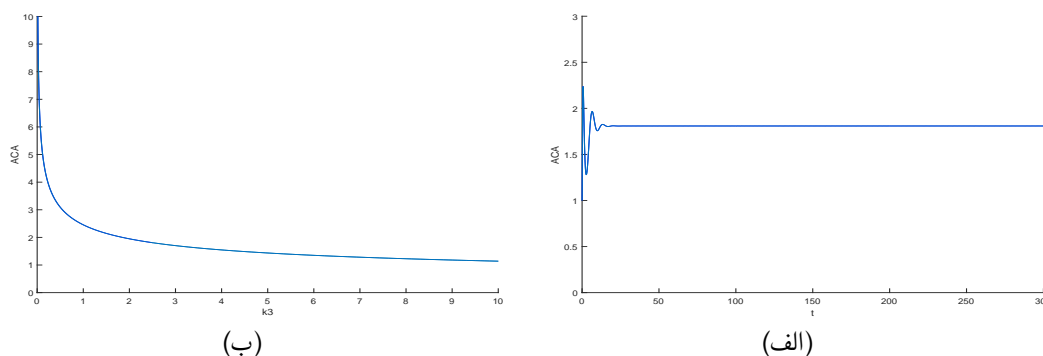
که افزایش مقدار این پارامتر در سامانه، بر خلاف انتظار، منجر به کاهش دامنه‌ی نوسان و در نهایت استقرار سامانه در حالت پایا خواهد شد (شکل ۳، بخش «ب»). این نکته ضرورت توجه به سایر تعاملات اجزای حلقه‌های بازخورد (۱) و (۲) با سایر گونه‌ها را آشکار می‌سازد. همان‌طور که پیش‌تر نیز ذکر شد، با وجود غیر فعال بودن حلقه‌ی بازخورد منفی (۳)، گونه‌ی cAMP داخلی با نرخ ثابت  $k_{10}$  توسط REGA مهار می‌گردد.

فعال‌سازی حلقه‌ی بازخورد منفی (۳) نیز نتایج جالبی به دنبال خواهد داشت. فعال‌سازی این حلقه در شرایط اولیه‌ی مفروض منجر به از بین رفتن نوسانات و پس از آن استقرار سامانه پس از گذران نوسانات در حالت پایا می‌گردد (شکل ۴، بخش «الف»). همان‌طور که در بخش «ب» شکل ۴ نیز مشاهده می‌شود، افزایش قدرت بازخورد منفی (۲) توسط پارامتر  $k_2$  نتیجه‌ای جز تک‌پایایی بودن سامانه را نخواهد داشت و به این ترتیب محدوده‌ی نوسان در نمودار انشعاب مشاهده نمی‌شود.

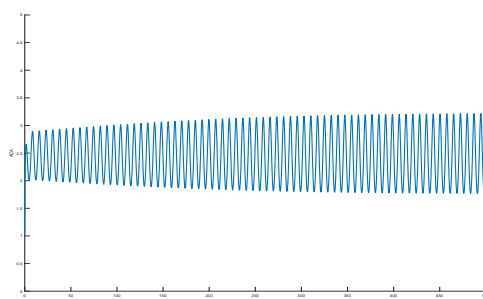
۳.۳. فعال‌سازی حلقه‌ی بازخورد مثبت (۱). نوسانات پایدار و مداوم در سامانه‌ی مذکور در حالت فعال بودن حلقه‌های بازخورد منفی (۲) و (۳) توسط افزودن یک حلقه‌ی بازخورد مثبت مرکزی به سامانه با استفاده از جایگزینی مولفه‌ی  $k_{11}$  با  $ACA * k_{11}$  مشاهده می‌گردد (شکل ۵). این نتیجه موید یکی از نقش‌های دوگانه‌ی حلقه‌ی بازخورد مثبت یعنی تولید نوسانات در سامانه که توسط مرجع [۶] ارائه شده است، می‌باشد.

## مراجع

1. O. Brandman, J.J.E. Ferrell, R. Li, T. Meyer, *Interlinked fast and slow positive feedback loops drive reliable cell decisions*, Science (2005), no. 5747, 496–498.



شکل ۴. (الف) استقرار سامانه در حالت پایا با فعال‌سازی بازخورد منفی (۳) (ب) نمودار غلظت گونه‌ی ACA بر حسب پارامتر  $k_3$



شکل ۵. تولید نوسانات پایدار و مداوم با فعال‌سازی حلقه‌ی بازخورد مثبت (۳)

2. J. E Ferrell Jr, *Self-perpetuating states in signal transduction: positive feedback, double-negative feedback and bistability*, Current Opinion in Cell Biology (2002), no. 2, 140–148.
3. B.P. Ingalls, *Mathematical Modelling in Systems Biology: An Introduction*, 2014, 185–186.
4. A.Y. Mitrophanov and E.A. Grosiman, *Positive feedback in cellular control systems*, Bioessays (2008), no. 6, 542–555.
5. J. J Tyson, K. C Chen and B. Novak, *Sniffers, buzzers, toggles and blinkers: dynamics of regulatory and signaling pathways in the cell*, Current Opinion in Cell Biology (2003), no. 2, 221–231.
6. L. Wang, N. Li, J. Chen, X. Zhang, F. Liu and W. Wang, *Modulation of dynamic modes by interplay between positive and negative feedback loops in gene regulatory networks*, Phys. Rev. E (2018), no. 4, 042412–8.

پست الکترونیکی: [zahra.bagheri@modares.ac.ir](mailto:zahra.bagheri@modares.ac.ir)

پست الکترونیکی: [mirzaie@modares.ac.ir](mailto:mirzaie@modares.ac.ir)

تجزیه و تحلیل ریاضی پویایی کلی یک مدل برای عفونت HIV از سلولهای  $CD4 + T$ 

پونه تیموری\*

بخش ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران  
و محمد صادق شاهرخانی دهکردی  
دانشکده ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران

چکیده. در این مقاله یک مدل ریاضی که عفونت HIV سلولهای  $CD4 + T$  را توصیف می کند، مورد تجزیه و تحلیل قرار می گیرد. پایداری  $P^*$  مورد بحث قرار می گیرد. متوسط بازتولید اساسی یا همان مولد  $R_0$  که تابعی از پارامترهای ثابت موجود در مدل است، نقش مهمی در پایداری مدل فوق ایفا می کند. برای مدل ارائه شده نشان می دهیم که اگر  $R_0 < 1$  باشد، تعادل بدون عفونت  $P_0$  در سطح کلی پایدار است و بیماری از بین می رود. اگر  $R_0 > 1$  باشد  $P_0$  ناپایدار است و عفونت HIV در سلول  $CD4 + T$  ادامه دارد. واژه های کلیدی: عفونت HIV، سلولهای  $CD4 + T$ ، پایداری، تابع لجستیک، سیستم های دینامیکی.

## ۱. پیش گفتار

ایدز نوعی بیماری است که توسط ویروس نقص ایمنی (HIV) در دستگاه ایمنی بدن ایجاد می شود. این بیماری دارای سه مرحله است. مرحله اول که عفونت حاد است و در آن فرد برای مدت زمانی کوتاه بیماری شبیه به آنفولانزا را تجربه می کند، که به دلیل نبودن هیچ گونه علائمی به این مرحله دوره نهفتگی گفته می شود. در مرحله دوم فرد به عفونت هایی مانند عفونت های فرصت طلب، سرطانها و تومور دچار می شود. معمولاً در افرادی که دستگاه ایمنی آنها به خوبی عمل می کند تاثیرگذار نیست. در مرحله سوم بیماری به مرحله نهایی خود می رسد و آن زمانی است که شمار سلولهای  $CD4 + T$  به کمتر از  $200$  سلول در هر میکرومتر برسد. در نهایت HIV با به تحلیل بردن سلولهای  $CD4 + T$  منجر به ایدز می شود و باعث تضعیف دستگاه ایمنی بدن می شود. وجود سلولهای T برای واکنش ایمنی بدن ضروری است و بدون آن ها بدن نمی تواند با عفونت ها مقابله کند. دلیل اصلی از دست رفتن سلولهای مخاطی  $CD4 + T$  این است که اکثر سلولهای مخاطی  $CD4 + T$  دارای پروتئین ccrb هستند که HIV از آن ها برای دستیابی به سلول ها استفاده می کند. در حالی که تنها بخش کوچکی از سلولهای  $CD4 + T$  در جریان خون این کار را انجام می دهند. فردی که به HIV مبتلا می شود تا شروع بیماری ایدز ممکن است بیش از ۱۰ سال به طول بیانجامد. در این مدت فرد سالم است و می تواند به کار و فعالیت خود ادامه دهد اما ناقل بیماری ایدز است.

اولین مدل ریاضی در سال ۱۷۶۰ به وسیله دانیل برنولی فرموله شد. در این پایان نامه بررسی پایداری سیستم

$$(1) \quad \frac{dT}{dt} = S - \alpha T + rT\left(1 - \frac{T}{T_{\max}}\right)$$

و بررسی اثر میزان بهبودی و تکثیر سلولهای  $CD4 + T$  آلوده با پایداری سیستم (۱) است. سلولهای T یک نرخ نوسان طبیعی  $\alpha$  دارند. یک مدل ریاضی که عفونت HIV سلولهای  $CD4 + T$  را توصیف می کند مورد تجزیه و تحلیل قرار می گیرد. سلولهای T در طی میتوز با سرعت  $\gamma$  چند برابر می شوند. بنابراین پایداری سلولهای  $CD4 + T$  را می توان با معادله لجستیک (۱) مدل سازی کرد.

معادله لجستیکی را بررسی کرده و با مدلی که ارائه می دهیم ادامه می دهیم و شرایط را بررسی می کنیم.

مدل (۱) همانطور که اشاره شد برای بررسی تعاملات بین سلولهای  $CD4 + T$  و سلولهای  $CD4 + T$  آلوده به ویروس HIV است. رشد لجستیکی سلولهای سالم T در حال حاضر توسط فرمول

$$(2) \quad rT\left(1 - \frac{T + T^*}{T_{\max}}\right)$$

تولید می شود و تکثیر سلولهای  $CD4 + T$  آلوده اهمیتی ندارد. هر سول آلوده  $CD4 + T$  در طول عمر خود ذرات ویروس N را تولید می کند، از جمله هر یک از سلولهای دخترش. چندین مدل ریاضی برای توصیف دینامیک از سلولهای T و تعامل با HIV ارائه شده

\* ارائه دهنده

است. برای بررسی به [۱] - [۶] مراجعه کنید. ما یک مدل به صورت زیر که از معادلات دیفرانسیل ارائه شده است، بررسی می کنیم:

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{dT}{dt} = S - \alpha T + rT(1 - \frac{T+T^*}{T_{max}} - KVT) \\ \frac{dT^*}{dt} = KVT - \beta T^* \\ \frac{dV}{dt} = N\beta T^* - \gamma V \end{cases}$$

تفاوت در نوع تکثیر تعداد بازتولید اساسی را تغییر نمی دهد، که این تعداد  $CD4$  را در سطح تعادل تغییر نخواهد داد اما سطح تعادلی ویروس را در عفونت مزمن تغییر می دهد. مساله اصلی در تجزیه و تحلیل ریاضی در تعیین حوضه جذب تعادل مزمن عفونت  $P^*$  نهفته است. این کار با شناسایی طیف وسیعی از پارامترهایی که  $P^*$  در سطح کلی به طور متناوب پایدار در کل منطقه قابل اجرا است انجام می شود. تجزیه و تحلیل پایداری سراسری مهم است، زیرا مدل های این نوع شناخته شده دارای راه حل های دوره ای برای یک مجموعه باز از مقادیر پارامتر است. ما با این مدل می خواهیم بسیاری از ویژگی های کمی گنج کننده عفونت HIV را به سادگی توضیح دهیم. این مدل همچنین نشان می دهد که چرا دوره پنهان (نهفته) در کودکان می تواند به طور قابل توجهی کوتاهتر باشد.

گزاره ۱.۱. اگر  $R_0 \leq 1$  باشد، نقطه تعادل غیر عفونی  $P_0 = (T_0, 0, 0)$  تنها نقطه تعادل در  $\gamma$  باشد، اگر  $R_0 \geq 1$  باشد، دو نقطه تعادل در  $\gamma$  وجود دارد. نقطه  $p^*$  و  $p^*$  یک نقطه تعادل غیر عفونی به صورت  $p^* = (T, T, V)$  است، جایی که

$$\bar{T} = \frac{\gamma}{NK}, \quad \bar{T}^* = \frac{\gamma}{N\beta} \bar{V}, \quad \bar{V} = \frac{sp^* + (r - \alpha)\gamma p - \frac{r}{T_{max}}\gamma^2}{k\gamma(p + \frac{r\gamma}{\beta T_{max}})}$$

و  $P = KN$

گزاره ۲.۱. اگر  $R_0 \leq 1$  باشد،  $P_0$  به طور موضعی پایدار متناوب است. اگر  $R_0 = 1$  باشد در این صورت  $P_0$  یک نقطه موضعی پایدار است و اگر  $R_0 \geq 1$  باشد،  $P_0$  یک نقطه زینی با یک چند ضلعی ثابت دو بعدی و یک منیفولد ناپایدار یک بعدی است.

قضیه ۳.۱. اگر  $R_0 \leq 1$  باشد، نقطه تعادل غیر عفونی  $P_0$  به طور سراسری پایدار در  $\Gamma$  است. اگر  $R_0 > 1$  باشد، نقطه  $P_0$  غیر ناپایدار است و جواب ها به  $P_0$  دور و نزدیک می شوند به جز آنهایی که از محور  $T$  محاسبه می شوند به طوری که  $P_0$  را در امتداد محور  $T$  قرار می دهند به طور خاص سیستم (۳) در  $\bar{\Gamma}$  پایدار است.

اثبات: فرض کنیم  $L = NT^* + T$  باشد. پس مشتق  $L$  از راه حل (۳) به صورت زیر است.

$$(4) \quad L' = \gamma V \left( \frac{KN}{\gamma} T - 1 \right)$$

اکنون با توجه به اینکه رابطه

$$R_0 = \frac{KNT_0}{\gamma}$$

برقرار است می توانیم به صورت  $\frac{R_0}{T_0} = \frac{KN}{\gamma}$  بنویسیم و در معادله (۴) قرار می دهیم و داریم:

$$L' = \gamma V \left( \frac{R_0}{T_0} - 1 \right)$$

حال با توجه به اینکه اگر  $R_0 \leq 1$  باشد،  $L' \leq 0$  خواهد شد. پس  $T \leq T_0$  در  $\Gamma$  می شود. به علاوه  $L' = 0$  اگر و فقط اگر  $R_0 = 1$  و  $T = T_0$  باشد. یعنی به صورت:

$$L' = \gamma V \left( \frac{KNT_0}{\gamma} - 1 \right) = \gamma V (R_0 - 1) = \gamma V(0) = 0$$

و مقادیر ماکسیم مجموعه  $\{(T, T^*, V) \in \gamma : L' = 0\}$  در نقطه  $\{P_0\}$  است

نشان می دهد که تمام راه حل ها در  $\Gamma$  همگرا به صفر هستند. جاذب ها و پایداری سراسری آن همانگونه که در گزاره ۲.۱ ثابت شده است. ادعا میکنیم طبق پایداری سراسری زمانی که  $R_0 > 1$  است، در شروع حل در  $\gamma$  و نزدیک به  $P_0$  این حل از همسایگی  $P_0$  دور می شود. راه حل ها در محور حرکت مثبت محرک  $T$  تضمین شده در معادله (۱) است. بنابراین اگر  $t \rightarrow \infty$  در این صورت

$$T(t) \rightarrow T_0$$

بنابراین راه حل ها در امتداد محور  $T$  به  $P_0$  همگرا می شوند. تجزیه و تحلیل ما نشان می دهد که چنین تفاوت در اصطلاح رشد، رفتار کیفی راه حل ها را تغییر نمیدهد. به طور خاص مدل های با این دو اصطلاح مختلف رشد دارای همان باز تولید اساسی

$$R_0 = \frac{KNT_0}{\gamma}$$

هستند که  $T_0$  تعادل سلول های  $CD4 + T$  در غیاب عفونت HIV است. علاوه بر این برای هر دو مدل، اگر  $R_0 < 1$  تعادل بدون عفونت  $P_0 = (T_0, 0, 0)$  به طور کلی پایداری است، و اگر  $R_0 > 1$  باشد یک تعادل منحصر به فرد عفونت مزمن  $P^*$  وجود دارد.  $P^*$  می تواند برای یک مجموعه باز از مقادیر پارامتر ناپایدار باشد و راه حل های متناوب ممکن است وجود داشته باشد. به طور کلی هر دو فرم رشد همان سطح  $CD4$  را در تعادل مزمن عفونت  $P^*$  تولید می کند، در حالی که اصطلاح لجستیک کامل باعث می شود که سطح بار ویروسی در تعادل  $P^*$  پایین شود. تجزیه و تحلیل به روش پایه ای بر این واقعیت است که مدل رقابتی است. مدل ۲ با یک اصطلاح لجستیک کامل دیگر رقابتی نیست. برای ایجاد پایداری کلی  $P^*$  ما یک رویکرد کلی لی و مالولونی را اتخاذ کردیم که برای سیستم های با ابعاد بالاتر بدون در نظر گرفتن اینکه آیا آنها رقابتی هستند. محدوده پارامتر تولید شده توسط تجزیه و تحلیل پایداری کلی ما نیز از نظر زیست شناختی منطقی است. در حالی که رویکرد لی و مالولونی به موفقیت در بسیاری از کلاس های مدل اپیدمی اعمال شده است. در این مقاله برای اولین بار نشان داده شده است که این رویکرد نیز برای مدل های HIV میزبان قابل استفاده است.

### مراجع

1. A.S. Perelson, D.E. Kirschner, R. de Boer, Dynamics of HIV infection of CD4+ T cells, Math. Biosci. 114 (1993) 81.
2. A.S. Perelson, P.W. Nelson, Mathematical analysis of HIV-I dynamics in vivo, SIAM Rev. 41 (1999) 3.
3. P.W. Nelson, A.S. Perelson, Mathematical analysis of delay differential equation models of HIV-1 infection, Math. Biosci. 179 (2002) 73.
4. A.S. Perelson, Modeling the interaction of the immune system with HIV, in: C. Castillo-Chavez (Ed.), Mathematical and Statistical Approaches to AIDS Epidemiology, Lecture Notes in Biomathematics, vol. 83, Springer, New York, 1989, p. 350.
5. P. De Leenheer, H.L. Smith, Virus dynamics: a global analysis, SIAM J. Appl. Math. 63 (2003) 1313.
6. M.Y. Li, J.S. Muldowney, A geometric approach to the global-stability problems, SIAM J. Math. Anal. 27 (1996) 1070.
7. D. Kirschner, Using mathematics to understand HIV immune dynamics, Notices AMS 43 (1996) 191.

پست الکترونیکی: [teimoori1116sh@gmail.com](mailto:teimoori1116sh@gmail.com)  
 پست الکترونیکی: [shahrokhi@ipm.ir](mailto:shahrokhi@ipm.ir)

## انشعاب مسیرهای تناوبی بزرگ با گذر از مسیرهای همکلینیکی متقارن

لیلا سلیمانی\* و امید ربیعی مطلق  
گروه ریاضی، دانشگاه بیرجند، بیرجند، ایران

چکیده. میدان برداری متقارن مسطحی را در نظر می‌گیریم که دچار انشعاب همکلینیکی می‌شود. به منظور بررسی وجود جواب‌های تناوبی خارجی این میدان برداری در اطراف مسیرهای همکلینیکی متقارن شکسته شده، وجود نقاط ثابت نگاشت پوانکاره خارجی در اطراف این مسیرها را بررسی می‌کنیم. این نگاشت پوانکاره حاصل ترکیب شارهای درون و بیرون مسیرهای همکلینیکی است. و نشان می‌دهد که چگونه در اثر یک انشعاب همکلینیکی، یک مسیر تناوبی بزرگ، با عبور از یک ساختار همکلینیکی دوگانه، به دو مسیر تناوبی کوچک‌تر تبدیل می‌شود.

واژه‌های کلیدی: نگاشت پوانکاره، انشعاب همکلینیکی، نقطه ثابت، جواب تناوبی.  
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 34C37.

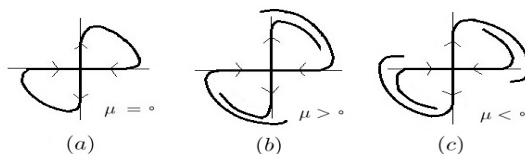
### ۱. مقدمه

مساله انشعاب‌های سرتاسری جواب‌های تناوبی که منجر به پیدایش مسیرهای همکلینیکی متقارن می‌شود از موضوعات جذاب در نظریه‌ی معادلات دیفرانسیل و سیستم‌های دینامیکی است. نگاشت پوانکاره یکی از ابزارهای اصلی در مطالعه‌ی انشعاب‌های همکلینیکی است به طوری که می‌توان گفت بررسی رفتار مسیرهای میدان برداری در نزدیکی مسیر همکلینیکی آن با بررسی رفتار مسیرهای نگاشت پوانکاره معادل است؛ برای مثال مسیرهای بسته میدان برداری معادل با نقاط ثابت نگاشت پوانکاره هستند، و برعکس. امروزه روش‌های مختلفی برای بررسی انشعاب‌های مسیرهای همکلینیکی در معادلات دیفرانسیل معمولی و سیستم‌های دینامیکی خودگردان و ناخودگردان تحت اختلال وجود دارد [۳، ۴].

هدف این مقاله بررسی انشعاب سرتاسری جواب‌های تناوبی میدان برداری مسطح در اطراف دو مسیر همکلینیک متقارن نسبت به مبدا است. برای این منظور دستگاه مسطح

$$(1) \quad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(x, y, \mu) \\ f_2(x, y, \mu) \end{pmatrix},$$

را در نظر می‌گیریم که در آن  $\mu \in \mathbb{R}$ ،  $\lambda_1 < 0$ ،  $\lambda_2 > 0$  و  $f_i$ ها از مرتبه  $C^2$  و در مبدا غیر خطی هستند. همچنین فرض می‌کنیم دستگاه (۱) برای  $\mu = 0$  نسبت به مبدا متقارن و دارای دو مسیر همکلینیکی استوار بر مبدا است (شکل ۱.۱ را ببینید).

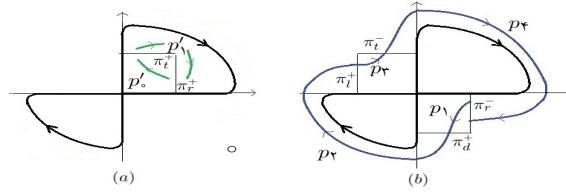


شکل ۱.۱. رفتار مسیرهای همکلینیک برای  $\mu$  های مختلف

فرض اصلی در اینجا این است که برای  $\mu > 0$ ، دستگاه از یک انشعاب همکلینیکی عبور کرده است (شکل ۱.۱ b و ۱.۱ c را ببینید). پیشتر در مرجع [۵] نگاشت پوانکاره داخلی ( $P_i = p'_i \circ p'_i$ ) را ببینید) ساخته شده و نتایج آن به صورت زیر جمع‌بندی شده است.

قضیه ۱.۱. ([۵]، صفحه ۱۴۴) دستگاه (۱) را در نظر بگیرید و فرض کنید  $1 < |\mu| < \infty$ .  
الف: اگر  $-\lambda_1/\lambda_2 < 1$  آنگاه دستگاه (۱) برای  $\mu < 0$  یک جواب تناوبی منحصر به فرد درون مسیر همکلینیک شکسته شده دارد.  
ب: اگر  $-\lambda_1/\lambda_2 > 1$  آنگاه دستگاه (۱) برای  $\mu > 0$  یک جواب تناوبی منحصر به فرد درون مسیر همکلینیک شکسته شده دارد.

\* ارائه‌دهنده



شکل ۲. شار تولید شده درون و بیرون مسیر هموکلینیک

محدودیت‌های زیادی، به ویژه زمانی که  $\mu \neq 0$ ، وجود دارند که بررسی نگاشت پوانکاره بیرونی حاصل از ترکیب چهار نگاشت پوانکاره موضعی  $p_1$  و  $p_2$  و  $p_3$  و  $p_4$  را به یک مساله جالب در سیستم‌های دینامیکی تبدیل می‌کند (تصویر ۲.۵ را ببینید). به منظور ساخت نگاشت پوانکاره بیرونی چهار قطعه متقاطع اریب معرفی شده در زیر را باید در نظر بگیریم:

$$\pi_r^- = \{(x, y) \in R^2 : x = \varepsilon, -\varepsilon \leq y < 0\}, \quad \pi_d^+ = \{(x, y) \in R^2 : 0 < x \leq \varepsilon, y = -\varepsilon\},$$

$$\pi_l^+ = \{(x, y) \in R^2 : x = -\varepsilon, 0 < y \leq \varepsilon\}, \quad \pi_t^- = \{(x, y) \in R^2 : -\varepsilon \leq x < 0, y = \varepsilon\}.$$

ما در بخش‌های آینده نگاشت پوانکاره بیرونی را می‌سازیم و نشان می‌دهیم که یک جواب تناوبی بزرگ<sup>۱</sup> وجود دارد که با گذر از مسیرهای هموکلینیک متقارن به دو جواب تناوبی کوچک<sup>۲</sup> شکسته می‌شود (شکل ۴) و توضیحات مربوط به آن را در بخش ۴ ببینید).

## ۲. ساخت نگاشت پوانکاره بیرونی

برای شروع، نگاشت پوانکاره  $p_1 : \pi_r^- \rightarrow \pi_d^+$  را در نظر می‌گیریم که با دنبال کردن شار تولید شده توسط قسمت خطی دستگاه در نزدیکی مبدا ساخته شده است. به سادگی می‌توان دید که

$$p_1 : (\varepsilon, y) \mapsto M_1(\varepsilon, y)^t = (x, -\varepsilon), \quad y < 0,$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} (-\varepsilon/y)^{\lambda_1/\lambda_2} & 0 \\ 0 & -\varepsilon/y \end{pmatrix}.$$

برای تعریف نگاشت  $p_2$  فرض می‌کنیم،  $p_2(0, -\varepsilon, 0) = (p_{20}(0, -\varepsilon, 0), p_{21}(0, -\varepsilon, 0)) = (-\varepsilon, 0)$ ، بسط تیلور نگاشت  $p_{21}$  حول  $(0, -\varepsilon, 0)$  به صورت:

$$p_{21}(x, y, \mu) = p_{21}(0, -\varepsilon, 0) + \frac{\partial p_{21}}{\partial x}(0, -\varepsilon, 0)(x - 0) + \frac{\partial p_{21}}{\partial y}(0, -\varepsilon, 0)(-\varepsilon + \varepsilon) + \frac{\partial p_{21}}{\partial \mu}(0, -\varepsilon, 0)(\mu - 0) + O(2) = ax + b\mu + O(2),$$

می‌باشد. با توجه به شکل ۱، می‌توان  $\mu$  را به گونه‌ای مقیاس گذاری کرد که  $b = -1$  شود. از آنجا که،  $0 < x$  و  $0 < p_2(x, y, \mu)$  هستند پس  $a > 0$ . بنابراین نگاشت  $p_2 : \pi_d^+ \rightarrow \pi_l^+$  را می‌توان برای  $x > 0$  چنین تعریف کرد:

$$p_2 : (x, -\varepsilon) \mapsto (-\varepsilon, ax - \mu) + O(2) = (-\varepsilon, 0) + M_2(x, -\varepsilon)^t + \mu(0, -1) + O(2) = (-\varepsilon, \tilde{y}),$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}.$$

با توجه به تقارن دستگاه نسبت به مبدا، نگاشت‌های  $p_3 : \pi_l^+ \rightarrow \pi_t^-$  و  $p_4 : \pi_t^- \rightarrow \pi_r^-$  به ترتیب مشابه نگاشت‌های  $p_2$  و  $p_1$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$p_3 : (-\varepsilon, \tilde{y}) \mapsto (-\varepsilon(\frac{\varepsilon}{\tilde{y}})^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}, -\varepsilon) + O(2) = M_3(\varepsilon, \tilde{y})^t + O(2), \quad \tilde{y} > 0,$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} (\varepsilon/\tilde{y})^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} & 0 \\ 0 & \varepsilon/\tilde{y} \end{pmatrix}.$$

$$p_4 : (\tilde{x}, \varepsilon) \mapsto (\varepsilon, a\tilde{x} + \mu) + O(2) = (\varepsilon, 0) + M_4(\tilde{x}, \varepsilon) + \mu(0, 1) + O(2),$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}.$$

<sup>۱</sup> منظور جواب تناوبی است که ساختار هموکلینیک را در ناحیه درون خود دارد. <sup>۲</sup> منظور جواب تناوبی است که درون مسیرهای هموکلینیک محصور شده است



در نتیجه، نگاشت پوانکاره  $P_o : \pi_r^- \rightarrow \pi_r^-$  حاصل ترکیب چهار نگاشت  $p_1, p_2, p_3$  و  $p_4$  می‌باشد:

$$(2) \quad P_o : (\varepsilon, y) \mapsto p_4 \circ p_3 \circ p_2 \circ p_1(\varepsilon, y) = (\varepsilon, \mu) + M(-\varepsilon, -\mu)^t,$$

$$M = \begin{pmatrix} a(a\varepsilon^{\lambda_1/\lambda_2}(-y)^{-\lambda_1/\lambda_2} - \mu/\varepsilon)^{-\lambda_1/\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

دقت کنیم که در رابطه (۲) برای اینکه تصویر  $p_3 \circ p_2 \circ p_1$  قابل ترکیب باشند باید تصویر  $p_2 \circ p_1$  در دامنه‌ی  $p_3$  محدود شده باشد یعنی،  $0 < p_2 \circ p_1$  و یا به طور معادل باید،  $0 < (a\varepsilon^{\lambda_1/\lambda_2}(-y)^{-\lambda_1/\lambda_2} - \mu/\varepsilon)^{-\lambda_1/\lambda_2}$ . به بیان دیگر، دامنه‌ی  $p_2 \circ p_1$  به صورت  $\{(\varepsilon, y) : -\varepsilon < y < \min(-\varepsilon(\mu/\varepsilon a)^{-\lambda_2/\lambda_1}, 0)\}$  است. فرض کنیم،  $y_{max}(\mu) := -\varepsilon(\mu/\varepsilon a)^{-\lambda_2/\lambda_1}$ . حال نگاشت پوانکاره  $P : \pi_{r,\mu}^- \cup \pi_r^+ \rightarrow \pi_r^- \cup \pi_r^+$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$P(\varepsilon, y) = P_i(\varepsilon, y), \text{ if } y > 0, \quad P(\varepsilon, y) = P_o(\varepsilon, y), \text{ if } y < y_{max}(\mu).$$

دقت کنیم که نگاشت پوانکاره  $P_i : \pi_o^{r,+} \rightarrow \pi_o^{r,+}$  در مرجع [۵] را می‌توان از ترکیب  $p_4$  و  $p_1$  نیز محاسبه کرد و به دست آورد:

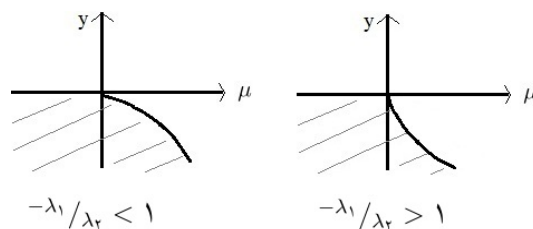
$$P_i : (\varepsilon, y) \mapsto (\varepsilon, 0) + M'(\varepsilon, y) + \mu(0, 1), \quad M' = \begin{pmatrix} a(\varepsilon/y)^{\lambda_1/\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

از آنجا که دو مسیر هموکلینیک نسبت به مبدا متقارنند بنابراین می‌توان نتایج نگاشت پوانکاره درون یکی از مسیرهای هموکلینیک را به دیگر مسیر هموکلینیک تعمیم داد. در بخش بعد وجود نقاط ثابت نگاشت پوانکاره  $P$  را بررسی می‌کنیم.

### ۳. نقاط ثابت نگاشت پوانکاره

می‌دانیم نقاط ثابت نگاشت پوانکاره  $P$  از رابطه‌ی  $P(\varepsilon, y) = (\varepsilon, y)$  بدست می‌آید. نقاط ثابت نگاشت  $P$  برای حالت  $y > 0$  معادل نقاط ثابت نگاشت  $P_i$  می‌باشند که وجود آنها پیشتر در مرجع [۵] بررسی شده و نتایج به دست آمده در قضیه ۱.۱ توضیح داده شده است.

ما در ادامه به بررسی نقاط ثابت نگاشت  $P$  در حالت  $y < y_{max}(\mu)$  می‌پردازیم که معادل با نقاط ثابت نگاشت  $P_o$  است. اگر  $0 < \mu$  باشد، نگاشت  $P_o$  برای  $y < 0$  تعریف می‌شود و اگر  $0 < \mu$ ، نگاشت  $P_o$  برای  $y$ های متعلق به بازه‌ی  $(-\varepsilon, y_{max}(\mu))$  قابل تعریف است. از طرفی،  $0 < (a\varepsilon^{\lambda_1/\lambda_2}(-y)^{-\lambda_1/\lambda_2} - \mu/\varepsilon)^{-\lambda_1/\lambda_2} < 0$ ، بنابراین  $y_{max}(\mu)/d\mu = -\varepsilon/a\varepsilon^{\lambda_1/\lambda_2}(-y)^{-\lambda_1/\lambda_2-1}$ . بنا بر این  $y_{max}(\mu)$  تابعی اکیداً نزولی است. به علاوه، برای  $-\lambda_1/\lambda_2 < 1$ ،  $y_{max}(\mu)/d\mu|_{(0,0)} = 0$ ، و برای  $-\lambda_1/\lambda_2 > 1$ ،  $y_{max}(\mu)/d\mu|_{(0,0)} = -\infty$ . لذا حوزه تعریف  $P_o$  در صفحه  $(y, \mu)$  به صورت شکل ۳ است. برای یافتن نقاط ثابت  $P_o$  نیاز به تعمیمی از قضیه تابع ضمنی داریم.



شکل ۳. دامنه‌ی نگاشت پوانکاره  $P_o$

تعریف ۱.۳. یک ناحیه را به طور یکنواخت همبند می‌نامیم هرگاه ثابتی مانند  $G$  وجود داشته باشد به طوری که هر دو نقطه از این ناحیه بتوانند توسط یک خط شکسته که کاملاً درون ناحیه قرار می‌گیرد به یکدیگر متصل شوند و طول این خط شکسته از  $G$  برابر طول خط راست واصل بین دو نقطه بیشتر نباشد.

قضیه ۲.۳. (قضیه تابع ضمنی بر روی مرز [۱]) فرض کنید  $1 \leq i \leq n$ ،  $F_i(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) = 0$  یک دستگاه از معادلات غیر خطی در ناحیه به طور یکنواخت همبند  $S$  باشد. همچنین فرض کنید  $(a, c) = (a_1, \dots, a_n, c_1, \dots, c_m)$  یک نقطه روی مرز  $S$  و یک جواب این دستگاه باشد به طوری که  $\det(\partial F_i / \partial x_j(a, c)) \neq 0$ . در این صورت دستگاه معادلات  $F_i = 0$  در یک همسایگی  $(a, c)$  از یک جواب به صورت  $x_i = f_i(u_1, u_2, \dots, u_m)$  دارد به طوری که  $a_i = f_i(c_1, c_2, \dots, c_m)$ .

دقت کنیم که در شکل ۳ دامنه نگاشت  $P_o$  یک ناحیه‌ی به طور یکنواخت همبند است. با توجه به رابطه (۲) وجود یک نقطه ثابت برای  $P_o$  معادل است با یافتن ریشه‌های معادله‌ی،  $0 = y - \mu + g(y, \mu) = g(y, \mu)$ ، اینجا،  $g(y, \mu) = -\varepsilon(a\varepsilon^{\lambda_1/\lambda_2}(-y)^{-\lambda_1/\lambda_2} - \mu/\varepsilon)^{-\lambda_1/\lambda_2}$  که این معادل است با تقاطع خط  $x = y - \mu$  و  $x = g(y, \mu)$ .

قضیه ۳.۳. دستگاه (۱) را در نظر بگیرید و فرض کنید  $1 < |\mu| < \infty$ :

الف: اگر  $-\lambda_1/\lambda_2 < 1$  آنگاه دستگاه (۱) برای  $\mu > 0$  یک جواب تناوبی بزرگ بیرون از مسیر هموکلینیک شکسته شده دارد.  
 ب: اگر  $-\lambda_1/\lambda_2 > 1$  آنگاه دستگاه (۱) برای  $\mu < 0$  یک جواب تناوبی بزرگ بیرون از مسیر هموکلینیک شکسته شده دارد.

اثبات. الف)  $-\lambda_1/\lambda_2 < 1$ : می‌دانیم، نقاط تقاطع خط  $x = y - \mu$  و  $x = g(y, \mu)$  معادل با نقاط تقاطع خط  $x = y + \mu$  و  $x = g^{-1}(y, \mu)$  هستند. پس تعریف می‌کنیم:

$$k(y, \mu) := y + \mu + g^{-1}(y, \mu),$$

که در آن،  $\partial k / \partial \mu(y_{\max}, 0) = k(y_{\max}, \mu) = 0$  در این صورت:  $g^{-1}(y, \mu) = -(a^{-1} \varepsilon^{-\lambda_1/\lambda_2} ((y - a\varepsilon)^{-\lambda_2/\lambda_1} + \mu/\varepsilon))^{-\lambda_2/\lambda_1}$ ، لذا بنابر قضیه ۲.۳، معادله  $k(y, \mu) = 0$  برای  $\mu$ ‌های به اندازه کافی کوچک دارای یک جواب است یعنی،  $y + \mu = g^{-1}(y, \mu)$  از طرفی برای  $y < y_{\max}(\mu)$

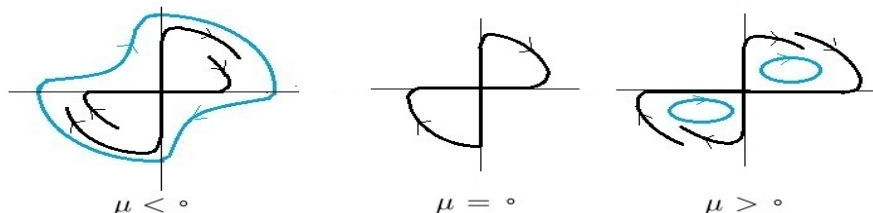
$$\partial g(y, \mu) / \partial \mu = -a\varepsilon^{(-\lambda_1/\lambda_2)} (1/\varepsilon) (a\varepsilon^{\lambda_1/\lambda_2} (-y)^{-\lambda_2/\lambda_2} - \mu/\varepsilon)^{(-\lambda_1-\lambda_2)/\lambda_2} + 1 > 0,$$

که در نتیجه  $g(y, \mu)$  نسبت به  $\mu$  ثابت نیست یعنی، برای  $\mu$ ‌های به اندازه کافی کوچک،  $x = y - \mu$  و  $x = g(y, \mu)$  دارای نقطه تقاطع هستند. لذا  $P_0$  برای  $\mu > 0$ ، دارای یک جواب تناوبی بزرگ خارج از مسیر هموکلینیک شکسته شده می‌باشد.

ب)  $-\lambda_1/\lambda_2 > 1$ : با یک محاسبه مجدد،  $h(0, 0) = 0$ ،  $\partial h / \partial \mu(0, 0) = -1$  و  $\partial h / \partial y(0, 0) = 1$  و لذا با استفاده از قضیه ۲.۳، نتیجه می‌گیریم که نگاشت  $P_0$  دارای یک جواب تناوبی بزرگ خارج از مسیر هموکلینیک شکسته شده است.  $\square$

#### ۴. نتایج اصلی

می‌دانیم نقاط ثابت نگاشت پوانکاره متناظر با مسیرهای سیستم هستند. در حالت  $-\lambda_1 < \lambda_2$ ، طبق شکل ۴ برای  $\mu < 0$  و به اندازه کافی کوچک، سیستم دارای یک جواب تناوبی بیرون مسیرهای هموکلینیک شکسته شده است که در  $\mu = 0$  جذب مسیرهای هموکلینیک می‌گردد و در نهایت برای  $\mu > 0$  تبدیل به دو جواب تناوبی درون مسیر هموکلینیک شکسته شده می‌شود. به طور مشابه برای  $-\lambda_1 > \lambda_2$ ، دو جواب تناوبی در حالت  $\mu < 0$  درون مسیرهای هموکلینیک شکسته شده داریم که در  $\mu = 0$  جذب مسیرهای هموکلینیک می‌شوند و در  $\mu > 0$  تبدیل به یک جواب تناوبی بیرون مسیر هموکلینیک شکسته شده می‌شود.



شکل ۴. انشعاب سرتاسری جواب‌های تناوبی

#### مراجع

1. L. S. Dederick, *Implicit functions at a boundary point*, Annals of mathematics, 1/4 (1913-1914), 170-178.
2. J. Palis, J. W. D. Melo, *Geometric theory of dynamical systems*, Springer, New York, 1982.
3. C. Zhu, W. Zhang, *homoclinic finger in  $\mathbb{R}^n$* , J. Differential Equations, 263 (2017), 3460-3490.
4. Y. Wang, M. Han, . Constantinescu, *On the limit cycles of perturbed discontinuous planar systems with 4 switching lines*, Chaos, Solitons and Fractals 83 (2016) 158-177.
5. S. Wiggins, *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*, 2nd ed, springer, 2000.

پست الکترونیکی: [l.soleimani@birjand.ac.ir](mailto:l.soleimani@birjand.ac.ir)  
 پست الکترونیکی: [orabieimotlagh@birjand.ac.ir](mailto:orabieimotlagh@birjand.ac.ir)



## نامساوی هارناک برای معادلات بیضوی در فرم واگرایی

غزاله فرجام\*

بخش ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران  
و محمد صادق شاهرخی دهکردی  
دانشکده ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران

چکیده. در سال ۱۹۵۷، De Giorgi [۳] پیوستگی نامساوی هولدر را برای معادلات بیضوی در فرم واگرایی ثابت کرد و در سال ۱۹۶۰ Moser [۶] اثبات جدیدی را از آن ارائه داد و سال بعد نامساوی هارناک را بدست آورد. در اینجا ما به نامساوی هارناک پنهان شده در اثبات [۳] خواهیم پرداخت.  
واژه‌های کلیدی: نامساوی هارناک، معادلات بیضوی، جواب ضعیف.

### ۱. نامساوی هارناک

معادله بیضوی زیر را در نظر بگیرید:

(۱)  $(a^{ij}u_i)_j = 0 \quad \text{in } Q_\rho$   
که  $(a^{ij})_{n \times n}$  بیضی یکنواختی با ثابت‌های بیضوی  $\lambda$  و  $\Lambda$  است، به طوری که  $Q_\rho(x_0)$  مکعبی به مرکز  $x_0$  و طول جانبی  $\rho$  و  $Q_\rho := Q_\rho(x_0)$  را نشان می‌دهد.  
در سال ۱۹۶۱، Moser [۸] نامساوی هارناک را به صورت زیر به دست آورد:

قضیه ۱.۱. فرض کنید  $u \geq 0$  یک جواب ضعیف (۱) باشد، آنگاه

$$(2) \quad \sup_{Q_1} u \leq C \inf_{Q_1} u$$

که  $C$  فقط وابسته به  $n$  و  $\Lambda$  است.

برای اولین بار برای تخمین حد بالا و پایین  $u$  با توجه به  $\|u\|_{L^{p_0}}$  و  $\|u^{-1}\|_{L^{p_0}}$  به ترتیب به وسیله تکرار برای برخی از  $p_0 > 0$  و آنگاه به منظور رسیدن به این دو تخمین برای به دست آوردن (۲) از نامساوی John-Nirenberg استفاده کرد.  
در سال ۱۹۵۷، Giorgi De [۳] پیوستگی هولدر را برای جوابهای ضعیف (۱) اثبات کرد. و Moser [۷] بعداً اثبات جدیدی را ارائه کرد. در زیر دو نتیجه اصلی به دست آمده توسط [۳] و [۷] را می‌بینیم. [۱]

قضیه ۲.۱. فرض کنید  $u \geq 0$  یک زیر جواب ضعیف از (۱) باشد. آنگاه

$$(3) \quad \|u\|_{L^\infty(Q_1)} \leq C \|u\|_{L^2(Q_2)}$$

که  $C$  فقط وابسته به  $n$  و  $\Lambda$  است.

قضیه ۳.۱. فرض کنید  $u \geq 0$  یک جواب ضعیف (۱) باشد. آنگاه برای هر  $c_0 > 0$  یک ثابت  $c$  وجود دارد که فقط وابسته به  $n$ ،  $\Lambda$ ،  $c_0$  است، به طوری که

$$(4) \quad m\{x \in Q_1 \mid u(x) > c\} > c_0 \implies u > 1 \quad Q_2,$$

که  $m$  نشان دهنده اندازه لبگ است.

در این مقاله ما قضیه ۱.۱ را با دو قضیه فوق به طور مستقیم ثابت خواهیم کرد.  
این بدین معنا است که اثبات De Giorgi به نامساوی هارناک اشاره می‌کند. این نخستین بار مورد توجه Dibenedetto [۴] قرار گرفت. برخی دیگر از دست‌آوردهای جدید نامساوی هارناک در کار [۵] و [۶]، Gianazza U. و Vespri V. [۶] نیز به چشم می‌خورد که فقط به کرانداری کیفی جوابها نیاز دارد، به طوری که از اینجا متفاوت است.

\* ارائه‌دهنده

## ۲. اثبات قضیه ۱.۱

در زیر، ما نکات کلیدی برای به دست آوردن قضیه ۱.۱ را توسط قضیه ۲.۱ و ۳.۱ ارائه می‌کنیم. ابتدا نشان می‌دهیم که قضیه ۲.۱ اصل ماکزیمم نسبی را نشان می‌دهد.

لم ۱.۲. فرض کنید  $u \geq 0$  یک زیر جواب ضعیف از (۱) باشد و  $0 < p_0$ . آنگاه

$$(5) \quad \|u\|_{L^\infty(Q_1)} \leq C \|u\|_{L^{p_0}(Q_r)}$$

که  $C$  فقط وابسته به  $n, \lambda, \Lambda$  و  $p_0$  است.

اثبات. با درونیایی برای توابع  $L^p$  و (۳) برای هر  $\epsilon > 0$  داریم:

$$(6) \quad \|u\|_{L^\infty(Q_1)} \leq \epsilon \|u\|_{L^{p_0}(Q_r)}$$

که نسخه اولیه آن به صورت زیر است:

$$(7) \quad r^{\frac{n}{p_0}} \|u\|_{L^\infty(Q_r(x_*))} \leq \epsilon r^{\frac{n}{p_0}} \|u\|_{L^\infty(Q_{r^2}(x_*))} + C\epsilon \|u\|_{L^{p_0}(Q_{r^2}(x_*))}$$

برای هر  $Q_{r^2}(x_*) \subset Q_{\epsilon r}(x_*)$ .

فرض کنید که  $x_* \in Q_r$ ، توجه کنید که  $d_{x_*}$  فاصله بین  $x_*$  و  $\partial Q_r$  است. آنگاه  $Q_{\epsilon r}(x_*) \subset Q_r$  که در آن  $r = \frac{d_{x_*}}{\sqrt[n]{n}}$  است و داریم:

$$(8) \quad \begin{aligned} d_{x_*}^{\frac{n}{p_0} \lceil \frac{n}{u(x_*)} \rceil} &\leq C(n) r^{\frac{n}{p_0}} \|u\|_{L^\infty(Q_r(x_*))} \leq \epsilon C(n) r^{\frac{n}{p_0}} \|u\|_{L^\infty(Q_{r^2}(x_*))} + C(\epsilon) \|u\|_{L^{p_0}(Q_{r^2}(x_*))} \\ &\leq \epsilon C(n) \sup_{(x \in Q_r)} d_x^{\frac{n}{p_0} \lceil \frac{n}{u(x)} \rceil} + C(\epsilon) \|u\|_{L^{p_0}(Q_r)} \end{aligned}$$

supremum را روی  $Q_r$  و  $\epsilon$  کوچک به طوری که  $\frac{1}{p} < \epsilon C(n)$  قرار دهید. آنگاه

$$(9) \quad \sup_{(x \in Q_r)} d_x^{\frac{n}{p_0} \lceil \frac{n}{u(x)} \rceil} \leq C \|u\|_{L^{p_0}(Q_r)}$$

□

که (۲) را نشان می‌دهد.

اکنون نشان می‌دهیم که قضیه ۱.۱ به نامساوی ضعیف هارناک اشاره می‌کند.

لم ۲.۲. فرض کنید  $u \geq 0$  یک زیر جواب ضعیف باشد. آنگاه

$$(10) \quad \|u\|_{L^p(Q_1)} \leq C \inf_{(Q_r)} u,$$

که  $0 < p$  و  $C$  فقط وابسته به  $n, \lambda$  و  $\Lambda$  است.

اثبات. بدون کم شدن از کلیت فرض می‌کنیم که  $\inf_{(Q_r)} u = 1$  و فقط به اثبات اینکه ثابت  $c$  فقط وابسته به  $n, \lambda$  و  $\Lambda$  است نیاز داریم، به طوری که

$$(11) \quad m\{x \in Q_1 : u(x) > c^k\} \leq \frac{1}{c^k}$$

برای  $k = 1, 2, \dots$ .

با استفاده از استقرا (۱۱) را ثابت می‌کنیم، در قضیه ۳.۱ قرار دهید  $c_0 = \frac{1}{c}$  در این صورت ثابتی مانند  $c$  فقط وابسته به  $n, \lambda$  و  $\Lambda$  وجود دارد به طوری که (۴) برقرار است. از این رو (۱۱) برای  $k = 1$  برقرار است از آنجایی که فرض کردیم که  $\inf_{(Q_r)} u = 1$  کنید که (۱۱) برای  $1 \leq k \leq k_0$  برقرار باشد. تعریف می‌کنیم

$$(12) \quad A := \{x \in Q_1 : u(x) > c_0^k\}$$

و

$$(13) \quad B := \{x \in Q_1 : u(x) > c_0^{k_0-1}\}$$

باید نشان دهیم که  $m(A) \leq \frac{m(B)}{c}$  با تجزیه مکعب Caldean-Zygmund ما فقط باید ثابت کنیم که برای هر  $Q_r(x_*) \subset Q_1$

$$(14) \quad m(A \cap Q_r(x_*)) > \frac{1}{c} m(Q_r(x_*)) \Rightarrow (Q_{r^2}(x_*)) \cap Q_1 \subset B,$$

□

که دقیقاً فرم کلی (۴) برای  $v = \frac{u}{c_0^{k_0-1}}$  است.

اکنون قضیه ۱.۱ به طور واضح ترکیب ۲.۱ و ۳.۱ است.

نکته ۳.۲. می‌توان  $u \geq 0$  را از لم ۱.۲ حذف کرد و تخمین مربوطه برای  $u^+$  برقرار است. از آنجایی که برای معادلات بیضوی در فرم غیر واگرا، همچنین اصل ماکزیمم نسبی و نامساوی ضعیف هارناک را داریم.

### مراجع

1. L. Ambrosio, G. Dal Maso, M. Forti, M. Miranda and S. Spagnolo, Ennio De Giorgi Selected Papers, Springer-Verlag, Berlin, 2006, pp. 149–174.
2. L. A. Caffarelli and X. Cabré, Fully nonlinear elliptic equations, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.
3. E. De Giorgi, Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari (Italian), Mem. Accad. Sci. Torino. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (3) 3 (1957) 25–43.
4. E. DiBenedetto, Harnack Estimates in Certain Function Classes, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena 37(1989), 173–182.
5. E. DiBenedetto, U. Gianazza and V. Vespri, Harnack inequality for degenerate and singular parabolic equations, Springer Monographs in Mathematics, Springer 2011.
6. U. Gianazza and V. Vespri, Parabolic De Giorgi classes of order  $p$  and the Harnack inequality, Calc. Var. Partial Differential Equations 26 (2006), 379–399.
7. J. Moser, A new proof of De Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations, Comm. Pure Appl. Math. 13 (1960) 457–468.
8. J. Moser, On Harnack's theorem for elliptic differential equations, Comm. Pure Appl. Math. 14 (1961), 577–591.

پست الکترونیکی: [maghf94@gmail.com](mailto:maghf94@gmail.com)

پست الکترونیکی: [shahrokhi@ipm.ir](mailto:shahrokhi@ipm.ir)

## مطالعه عددی دینامیک یک مدل سرطان در افراد آلوده به HIV

فاطمه محمدی  
گروه ریاضی، دانشگاه بجنورد، بجنورد، ایران  
و زهره دادی\*  
گروه ریاضی، دانشگاه بجنورد، بجنورد، ایران

چکیده. مدل سازی و شبیه سازی ریاضی مسائل زیستی تا کنون توانسته است به ارزیابی، پیشگیری و یا کنترل یک ویروس مانند HIV و HTLV و ... کمک کند. در این مقاله یک مدل دینامیکی انتشار ویروس HIV در بدن فرد بیمار (سرطان سارکوم کاپوسی) مورد مطالعه قرار می گیرد. دو پارامتر نرخ تکثیر کنترل نشده سلول های سرطانی و نرخ کشندگی سلول های سرطانی توسط سیستم ایمنی را به عنوان پارامترهای کنترلی مدل در نظر می گیریم و با استفاده از روش های عددی، دینامیک های مدل را بررسی کردیم. واژه های کلیدی: مدل ۱-HIV، سرطان.

## ۱. پیش گفتار

ویروس نقص ایمنی انسانی (HIV) یک رتروویروس محسوب می شود. این ویروس، سلول های سیستم ایمنی به ویژه یک رده از لنفوسیت های T به نام  $CD4$  را آلوده می کند [۳]. مطابق آمار ثبت شده ۸۰ درصد از افراد آلوده به این ویروس در کشورهای در حال توسعه زندگی می کنند [۴]. از آنجا که امروزه HIV-۱ عامل اصلی ایدز به شمار می رود، توجه ما به عفونت HIV-۱ جلب گردیده است. در واقع زمانی که ویروس HIV به طور جدی به سیستم ایمنی بدن آسیب می رساند، منجر به انواع خاصی از عفونت ها یا بیماری های دیگر مانند سرطان سارکوم کاپوسی (KS) می شود [۱]. آنچه که برای مدل سازان در بیماری های ناشی از HIV مورد توجه قرار می گیرد این است که این بیماری ها قابلیت شیوع دارد، لذا با توجه به امکان شیوع و بروز این بیماری، بررسی پیشرفت بیماری در هر فرد، از اهمیت ویژه ای برخوردار است. یکی از انواع مدل سازی ها، مدل سازی دینامیکی انتشار ویروس HIV در یک فرد بیمار و در نتیجه بروز بیماری ایدز و بیماری های وابسته به آن مانند KS است. مطالعه علمی مدل های غیرخطی بیماری های واگیردار، درک فعل و انفعالات میان سرطان های مرتبط با ایدز را امکان پذیر کرده است به طوری که به ما فهم بهتری از ایمنی و ایمنی درمانی، درمان سرطان و ژن های توموری ویروسی ارائه کرده است [۲]، [۴]. یکی از اهداف پژوهشگران در بررسی مکانیسم این نوع بیماری ها، ساده سازی مدل و انتخاب مؤلفه های مؤثر است. در ارزیابی وضعیت بیماران KS آلوده به HIV-۱، سطح سلول های سرطانی، جمعیت سلول های ایمنی و ویروسی در بدن فرد به عنوان مهمترین مؤلفه های مدل دینامیکی آن شناخته می شود که در تعیین درمان دارویی نیز می تواند مؤثر باشد. هدف ما از این پژوهش این است که با استفاده از یک مدل دینامیکی و روش های عددی، تحلیلی از پیشرفت بیماری KS در افراد آلوده به HIV انجام دهیم.

## ۲. مدل

در سال ۲۰۰۶، لیائو و همکاران [۲]، با مدل سازی سرطان KS در افراد آلوده به HIV-۱، سعی در تبیین رفتار دینامیکی این مدل داشته اند، آن ها در این مطالعه به بررسی نقاط تعادل، دوره ها و رفتار آشوبناک مدل پرداخته اند. آن ها یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی را بر اساس پاسخ ایمنی بدن در مقابل ویروس HIV-۱ در کشت بافت بدن موجود زنده به صورت زیر طراحی کرده اند:

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{dC}{dt} &= C(t) \left[ r_1 \left( 1 - \frac{C(t) + T(t) + I(t)}{m} \right) - k_1 T(t) \right], \\ \frac{dT}{dt} &= T(t) \left[ r_2 \left( 1 - \frac{C(t) + T(t) + I(t)}{m} \right) - pk_1 C(t) - k_2 I(t) \right], \\ \frac{dI}{dt} &= I(t) (k_2 T(t) - \mu_I), \end{aligned}$$

که در آن  $C(t)$  نشان دهنده غلظت سلول های سرطانی،  $T(t)$  نشان دهنده غلظت سلول های سالم و  $I(t)$  نشان دهنده غلظت سلول های آلوده است. در این مدل فرض شده است که سرطان فقط به علت جهش ژنی یک سلول بوجود آمده باشد و پارامتر  $r_1$  نیز نشان دهنده نرخ تکثیر کنترل نشده آن است،  $k_1$  نرخ کشندگی سلول های سرطانی توسط سیستم ایمنی،  $m$  ظرفیت مؤثر سیستم،  $r_2$  نرخ رشد ذاتی

\* ارائه دهنده

سلول‌های سالم (که  $r_1 > r_2$ )، توجه کنید که تکثیر سلول‌های سرطانی باید بیشتر از تکثیر سلول‌های سالم باشد، زیرا ویژگی مشترک سلول‌های سرطانی افزایش آن‌ها در نرخ تکثیر ناشی از ناهنجاری‌های ژنتیکی، هم در آنکوژن‌ها (ژن‌های تومور زا) و هم در ژن‌های سرکوبگر تومور می‌باشد [۴] و  $p$  نشان دهنده نرخ از دست دادن سلول‌های ایمنی به دلیل کشتن سلول‌های سرطانی است. روند عفونت سلول‌های سالم به آلوده با عبارت  $k_2 T(t) I(t)$  نشان داده شده است که در آن  $k_2$  ضریب نرخ آلودگی که در واقع برای اثرات کلی تولید مثل HIV-۱ شناخته می‌شود، مانند نرخ تماس و عفونت. در نهایت  $\mu_I$  نشان‌دهنده اثر کلیدی سیستم ایمنی بدن بر روی سلول‌های آلوده یا در واقع کشندگی سلول‌های آلوده توسط سیستم ایمنی است. به علاوه فرض می‌کنیم تمام مقادیر پارامتر بالا نامنفی است.

بر اساس مطالعات بالینی [۲] قرار می‌دهیم  $r_2 = 0.03$ ،  $k_2 = 0.0005$ ،  $m = 1500$ ،  $p = 0.1$ ،  $\mu_I = 0.3$  و فرض می‌کنیم شرایط اولیه به صورت زیر باشد، [۴]

$$C(0) = 678, \quad T(0) = 452, \quad I(0) = 0.25.$$

### ۳. نتایج اصلی

بر اساس مطالعات لیائو و همکاران [۲]، مدل دارای ۶ وضعیت ایستا (نقطه تعادل) به شرح زیر می‌باشد.  $E_0 = (0, 0, 0)$  وضعیت ایستایی بدیهی؛  $E_1 = (m, 0, 0)$  وضعیت ایستایی سرطان؛  $E_2 = (0, m, 0)$  وضعیت ایستایی سلامتی؛  $E_3 = (\bar{C}, \bar{T}, 0) = \left( \frac{mr_2}{r_2 + p(r_1 + mk_1)}, \frac{mr_1 p}{r_2 + p(r_1 + mk_1)}, 0 \right)$  وضعیت ایستایی سرطان-سلامتی؛  $E_4 = (0, \hat{T}, \hat{I}) = \left( 0, \frac{\mu_I}{k_2}, \frac{r_1(mk_2 - \mu_I)}{k_2(mk_2 + r_2)} \right)$  وضعیت ایستایی سلامتی HIV- $E^* = (C^*, T^*, I^*)$  وضعیت ایستایی سرطان-HIV-سلامتی است، به طوری که:

$$(2) \quad \begin{aligned} C^* &= \frac{mr_1 k_2^2 - (r_1 k_2 + k_1 r_2 + mk_1 k_2) \mu_I}{r_1 k_2 (k_2 - pk_1)}, \\ T^* &= \frac{\mu_I}{k_2}, \\ I^* &= \frac{k_1 [pmr_1 k_2 - (r_2 + pr_1 + pmk_1) \mu_I]}{r_1 k_2 (pk_1 - k_2)}. \end{aligned}$$

بر اساس تحلیل‌های انجام شده بر روی نقاط تعادل و انتخاب مقادیر متفاوت برای  $r_1$  و  $k_1$  نتایج جالبی حاصل می‌شود. به ازای  $r_1 = 0.15$  و  $r_2 = 0.25$  به کمک شبیه سازی عددی نشان داده شده است که هنگامی که نرخ تکثیر کنترل نشده سلول‌های سرطانی ( $r_1$ ) کوچک باشد، یا در مقایسه با نرخ رشد ذاتی سلول‌های سالم ( $r_2$ ) و نرخ کشندگی سلول‌های سرطانی توسط سیستم ایمنی ( $m_1$ )، به اندازه کافی بزرگ نباشد، در این صورت بین سلول‌های سرطانی و سلول‌های آلوده به ویروس توازن وجود دارد و وضعیت ایستایی سرطان-HIV وجود دارد. به عبارت دیگر وضعیتی به نام سرطان رخ نمی‌دهد. سپس با تغییر مقدار  $r_1$  و  $k_1$  به کمک شبیه سازی عددی نشان دادیم که اگر  $r_1 = 0.1522$  و  $k_1 = 0.2 \times 10^{-3}$ ، آنگاه با افزایش نرخ کشندگی سلول‌های سرطانی از حالت  $k_1 = 0.2 \times 10^{-4}$ ، تغییر در رفتار کلی مؤلفه  $I$  در ۱۲۰ روز نداشته‌ایم. در نهایت در این حالت با افزایش مجدد پارامتر  $k_1$  به  $k_1 = 10^{-3}$  مشاهده گردید که در ۱۲۰ روز اول با کاهش جدی سلول‌های سرطانی رو به رو خواهیم بود و پس از آن مجدداً سلول‌های سرطانی افزایش ناگهانی خواهند داشت. این موضوع معرف پیشنهاد تغییر استراتژی درمان خواهد بود.

### ۴. دست‌آوردهای پژوهش

ما به کمک شبیه سازی عددی، یعنی با استفاده از روش‌های AB و RK۴ رفتارهای دستگاه را بر اساس جدول مقادیر پارامتری زیر بررسی کرده و با یکدیگر مقایسه می‌کنیم:

جدول ۱. بازه تغییرات پارامتر  $r_1$  و  $k_1$

$r_1$	۰/۱۵	۰/۱۵	۰/۱۵	۰/۲۵	۰/۲۵	۰/۲۵	۰/۱۵۲۲	۰/۱۵۲۲
$k_1$	$0.2 \times 10^{-4}$	$0.4 \times 10^{-4}$	$0.9 \times 10^{-4}$	$0.1 \times 10^{-4}$	$1.8 \times 10^{-4}$	$2.5 \times 10^{-4}$	$0.2 \times 10^{-3}$	$10^{-3}$

برای در نظر گرفتن جواب‌های دقیق از دستور NDSolve متمتیکا برای حل دستگاه استفاده می‌کنیم و این جواب‌ها را به عنوان جواب دقیق، ملاک همگرایی جواب‌های عددی حاصل از روش RK4 و AB2 قرار می‌دهیم. بر اساس نتایج عددی به‌دست آمده در جدول‌های ۲، ۳ و ۴ مشاهده گردید که RK4 با طول گام معادل ۵ برابر طول گام AB2 روشی دقیق‌تر است.

جدول ۲. سلول‌های سرطانی

$t$	$exact$	$RK4, h = 5$	$AB2, h = 1$	$E_{RK}$	$E_{AB}$
۰	۶۷۸	۶۷۸	۶۷۸	۰	۰
۳۰	۷۷۷,۷۰۷	۷۷۷,۵۶۶	۷۷۴,۸۸۵	۰/۱۴۱	۲,۸۲۲
۶۰	۹۶۴,۹۲	۹۶۳,۹۲۱	۹۱۰,۰۸۷	۰/۹۹۹	۵۴,۸۳۳
۹۰	۱۲۱۵,۰۹	۱۲۱۴,۲۱	۱۱۵۴,۲۳	۰/۸۸	۶۰,۸۶
۱۲۰	۱۳۷۵,۷۳	۱۳۷۵,۲۶	۱۳۴۳,۱	۰/۴۷	۳۲,۶۳

جدول ۳. سلول‌های سالم

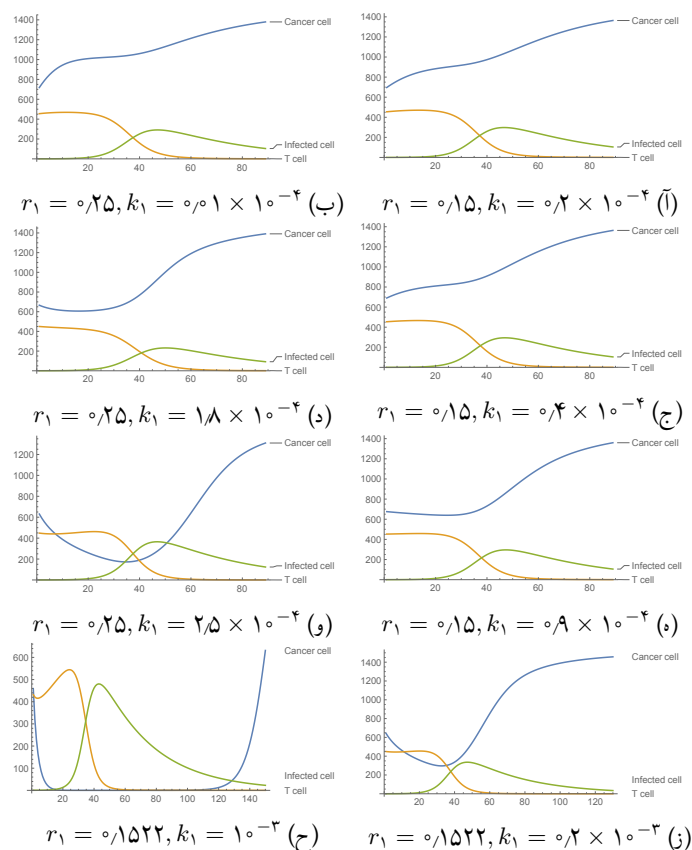
$t$	$exact$	$RK4, h = 5$	$AB2, h = 1$	$E_{RK}$	$E_{AB}$
۰	۴۵۲	۴۵۲	۴۵۲	۰	۰
۳۰	۳۸۹,۴۱۱	۳۹۱,۷۹۲	۴۷۱,۴۰۶	-۲,۳۸۱	-۸۱,۹۹۵
۶۰	۶۶۱,۸۵۲	۶۸۱,۶۴۶	۱۸,۲۶۹۴	-۰/۱۹۷۹۴	-۱۱,۶۵۰۸۸
۹۰	۰,۵۵۱۹۵	۰,۵۶۴۲۶	۰/۱۳۵۹۹	-۰/۰۱۲۳۱	-۰/۱۶۱۶۴۹
۱۲۰	۰/۱۹۶۵۹۶	۰/۲۰۰۲۰۸	۰/۱۹۳۷۳۹	$-۳/۶۱۲ \times ۱۰^{-۳}$	$۲,۸۵۷ \times ۱۰^{-۳}$

جدول ۴. سلول‌های آلوده

$t$	$exact$	$RK4, h = 5$	$AB2, h = 1$	$E_{RK}$	$E_{AB}$
۰	۰/۲۵	۰/۲۵	۰/۲۵	۰	۰
۳۰	۱۱۲,۸۳۷	۱۱۰,۸۳۸	۳۴,۷۰۲۲	۱,۹۹۹	۷۸,۱۳۴۸
۶۰	۲۵۶,۷۸	۲۵۷,۵۴۲	۳۲۸,۳۸۶	-۰/۷۶۲	-۷۱,۶۰۶
۹۰	۱۰۷,۶۹	۱۰۸,۰۹۸	۱۳۹,۷۳۴	-۰/۴۰۸	-۳۲,۰۴۴
۱۲۰	۴۳,۹۹۴	۴۴,۱۶۵۳	۵۴,۷۴۸۳	-۰/۱۷۱۳	-۱۰,۷۵۴۳

به علاوه با استفاده از شبیه سازی عددی و تکیه بر روش RK4 با  $h = 5$ ، نمودارهای پاسخ دستگاه (۱) را به ازای مقادیر پارامتری ارائه شده در جدول ۱ را رسم کردیم و مشاهده گردید که به ازای وضعیت ۱-آ سلول‌های سرطانی با افزایش جمعیت رو به رو بوده ولی در وضعیت ۱ مشاهده شد که با کاهش جدی سلول‌های سرطانی، یعنی تقریباً صفر در بازه زمانی  $[0, 120]$  روز، رو به رو هستیم. بنابراین به عنوان یک پیشنهاد درمانی برای بیمار، در صورتی که مقادیر  $r_1$  و  $k_1$  در وضعیت ۱ کنترل شوند می‌توان امید به بهبود بیمار در ۱۰۰ روز اول داشت و سپس ممکن است با تغییر استراتژی اولیه درمانی، به بهبود قطعی بیمار امید بیشتری داشت.





شکل ۱. نمودارهای RK4

## مراجع

1. Hofmann, C., Rockstroh, J.K., Kamps, B.S.: HIV Medicine 2003. Flying Publisher, Paris, Cagliari, Wappertal (2003)
2. Lou, J., Ruggeri, T., Tebaldi, C.: Modeling cancer in HIV-1 infected individuals: equilibria, cycles and chaotic behavior. Math. Bios. Eng. 3, 313-324 (2006)
3. Madge, S., Mathews, P., Surinde, S., Theobald, N.: HIV in Primary Care. Mwd.F.A.S.H. (2011)
4. Duarte, J., Januario, C., Martins, N., Ramos, C.C., Radriguse, C., Sardanyes, J.: Optimal homotopy analysis of a chaotic HIV-1 model incorporating AIDS-related cancer cells. Numer. Algor. Springer 77, 261-288 (2018)

پست الکترونیکی: [fatemehmohammadi2121@gmail.com](mailto:fatemehmohammadi2121@gmail.com)

پست الکترونیکی: [z.dadi@ub.ac.ir](mailto:z.dadi@ub.ac.ir)

## یک مدل غیر خطی ساده دینامیکی روی تار صوتی با استفاده از ترکیب و تجزیه و تحلیل

زینب مرادی\*

بخش ریاضی، دانشگاه یزد، یزد، ایران

مهدی فاتحی‌نیا

دانشکده ریاضی، دانشگاه یزد، یزد، ایران

چکیده. مدل خطی دستگاه صوتی از لحاظ بیومکانیکی توجیه شده و پیش‌بینی خطی یک کار پردازش سیگنال ساده و قابل درک است. با این حال ثابت شده است در صداهایی، تارهای صوتی درجه بالایی از غیرخطی بودن را نشان می‌دهند. نیاز به رویکردی برای مدل‌سازی نزدیک به رفتار تارهای صوتی وجود دارد. این مقاله یک مدل غیرخطی ساده و بیوفیزیکی برای تارهای صوتی را مورد بررسی قرار می‌دهد و یک مدل گسسته بدست می‌آید که انعکاس دقیق دینامیک انرژی در مدل پیوسته است. **واژه‌های کلیدی:** (تارهای صوتی، سیگنال سرعت، معادله حرکت گسسته).

## ۱. پیش‌گفتار

پردازش سیگنال خطی گفتار دارای تاریخچه طولانی مرتبط با علم آکوستیک خطی دارد. استفاده از آکوستیک خطی از طریق بیوفیزیکی توجیه‌پذیر است. زیرا یک نمایش واقعی از عضو صوتی با فرض این که تاثیر تارهای صوتی در طول سخن گفتن له دست می‌آید. با فرض تاثیر دستگاه صوتی یکی از مجراها یا لوله‌های صوتی است که به عنوان تشدید کننده خطی تقویت یا تشدید، برهم زدن اجزای هارمونیک از تارهای صوتی در طول صداهای تولید شده، عمل می‌کند. این تشدید کننده را در زمان گسسته به عنوان فیلتر دیجیتال نشان داده می‌شود. [۱] پیش‌بینی خطی می‌تواند برای پیدا کردن پارامترهای دستگاه صوتی مورد استفاده قرار بگیرد. [۲] با این حال در *vitro* و در تحقیق مدل‌سازی *silico* از تارهای صوتی میزان زیادی از غیرخطی بودن را آشکار کرده است. بنابراین استفاده از همان ابزار خطی نامناسب است و نیاز به یک رویکرد مشابه برای مدل‌سازی رفتار نوسان تارهای صوتی وجود دارد. چنین مدلی می‌تواند جایگاه رویکرد ترکیبی را برای مدل‌سازی رفتار تار صوتی مورد استفاده قرار دهد. بسیاری از جزییات بافت تار صوتی ویسکوالاستیک و آیرودینامیک و جریان هوا از طریق تارهای صوتی را به دست آورد. برای این مدل‌های دقیق از روش‌های عددی مانند روش عددی محدود استفاده می‌شود. [۴] این مقاله یک مدل ساده پیوسته رفتار تارهای صوتی و یک هم‌تای گسسته مناسب را ارائه می‌دهد. [۶] این مدل پنج پارامتر دارد و می‌تواند با استفاده از عملیات محاسباتی ساده‌ای از سخت افزار پردازش سیگنال دیجیتال موجود داغام شود. هم‌تای گسسته مناسب با استفاده از تکنیک ادغام تخصصی، ساخته می‌شود که ویژگی‌های انرژی بلند مدت مدل پیوسته را تکرار می‌کند و در نتیجه باعث کم شدن مشکلات خطای عددی می‌شود. از این گذشته مدل شبه‌خطی است و در نتیجه یک بسط طبیعی پیش‌بینی خطی تشکیل می‌دهد که در آن از تکنیک‌های شناسایی پارامتری که قبلاً بسط یافته استفاده کرده است. که این نشان دهنده نوسانات غیرخطی ناشی از یک سیکل حدی پایدار است که تعادل انرژی ذاتی با گفتار پایدار معمول را در گفتار پیوسته به دست می‌آورد. این مدل همچنین عدم تقارن مشاهده شده از سرعت خروجی جریان را نشان می‌دهد. این مدل دوبعدی است و بنابراین به آسانی به تکنیک‌های تجزیه و تحلیل برای سیستم‌های دینامیکی مسطح منجر می‌شود. دو برنامه اصلی از این مدل وجود دارد. اولین برنامه، سیگنال‌های گفتار را ترکیب می‌کنیم. خروجی مدل تار صوتی گسسته  $u_n$  است و همچنین یک سیگنال گسسته  $p_n$  به دست می‌آورد. دومین برنامه اصلی آنالیز به وسیله شناسایی پارامترهاست. در این جا پیش‌بینی شبه‌خطی برای شناسایی پنج پارامتر مدل به‌طور غیرمستقیم از اندازه‌گیری گسسته از سیگنال‌های تارهای صوتی  $u_n$  استفاده می‌شود.

## ۲. بررسی مدل پیوسته

فرض کنیم جریان هوای انعطاف‌پذیر در دستگاه صوتی است. حوزه‌های دو نقطه  $A$  و  $B$  در تارهای صوتی عبارتند از :

$$(۱) \quad a_A = \psi l x_A, a_B = \psi l x_B$$

\* ارائه‌دهنده

$x_A$  و  $x_B$  موثقیعت دو نقطه  $A$  و  $B$  است. نقطه‌ی  $A$  ثابت فرض شده است. فشار برنولی در هر دو نقطه بصورت زیر است:

$$(2) \quad \frac{1}{2} \rho_0 \frac{U^2}{a_A^2} + P_A = P_s$$

$$(3) \quad \frac{1}{2} \rho_0 \frac{U^2}{a_B^2} + P_B = P_s$$

نمادهای  $U$  و  $\rho_0$  و  $P_s$  به ترتیب بیانگر سرعت جریان هوا از طریق تار صوتی، چگالی تعادل و فشار ریه (ثابت) می باشند. در بالای تار صوتی یک جت فرض شده که هیچ فشار هوایی وجود ندارد بنابراین  $P_B = 0$ .

$$(4) \quad U = \sqrt{\frac{2P_s}{\rho_0}} x_B \phi(x_B)$$

جایی که تابع گام  $\phi(x)$  نشان دهنده این است که هیچ جریان هوایی در زمانی که نقطه‌ی  $B$  منفی است وجود ندارد (تارهای صوتی بطور کامل بسته شده اند) بنابراین  $U \propto x_B, x_B > 0$  و فشار در نقطه  $A$  برابر است با

$$(5) \quad P_A = P_s - \frac{1}{2} \rho_0 \frac{U^2}{a_A^2} = P_s \left[ 1 - \phi(x_B) \frac{x_B^2}{x_A^2} \right]$$

و نیرویی که بر بافت تار صوتی اعمال می شود به طور میانگین در نقاط  $A$  و  $B$  به دست می آید:

$$(6) \quad F = \frac{1}{2} (P_A + P_B) l d = \frac{1}{2} l d P_s \left[ 1 - \phi(x_B) \frac{x_B^2}{x_A^2} \right]$$

$l$  و  $d$  به ترتیب طول و ارتفاع این تارها هستند.

قرارداد: از حالا به بعد می نویسیم  $x = x_B$ .

برای تارهای صوتی فرض شود بافت دارای رابطه استرس-کشش غیرخطی است [7]:

$$(7) \quad s(x, \dot{x}) = kx + ax\dot{x}$$

$k$  سفتی بافت تار صوتی که به سفتی عضلات صوتی در حنجره بستگی دارد. پارامتر  $a$  میزان سفتی وابسته به سرعت تارهای صوتی را کنترل می کند. این وابستگی به سرعت باعث اهمیت عدم تقارن زمانی تار صوتی است. سیگنال سرعت  $U$  در سیگنال های گفتاری واقعی مشاهده می شود [8]. با استفاده از اثرهای میرایی بافت تار صوتی متناسب با سرعت، معادله‌ی حرکت ارتی سیستم عبارت است از:

$$(8) \quad m\ddot{x} + r\dot{x} + s(x, \dot{x}) = F = b - c\phi(x)x^2$$

جایی که  $b = \frac{P_s l d}{2x_A^2}$  و  $c = \frac{P_s l d}{2x_A^2}$  و  $r$  میرایی حرکت است که به خواص بیومکانیکی تار صوتی بستگی دارد.

### ۳. پیاده سازی مدل گسسته

با استفاده از محاسبات تناوبی گسسته [9] می توان معادلات گسسته حرکت را به صورت زیر به دست آورد.

$$(9) \quad m \left( \frac{x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}}{\Delta t^2} \right) + r \left( \frac{x_n - x_{n-1}}{\Delta t} \right) + ax_n \left( \frac{x_n - x_{n-1}}{\Delta t} \right) - b + kx_n + c\phi(x_n)x_n^2 = 0$$

که  $n$  شاخص زمان و تفاوت زمانی بین نمونه های یک سیگنال گفتاری است. چنین اختلافی همیلتون گسسته را حفظ می کند که انرژی مکانیکی را در تارهای صوتی به صورت زیر نشان می دهد:

$$(10) \quad E_n = \frac{1}{2} (x_{n+1} - x_n)^2 + \frac{1}{2} K x_n^2$$

میزان تغییر در انرژی گسسته به صورت زیر است:

$$(11) \quad dE_n = -(x_{n+1} - x_n) [R(x_{n+1} - x_n) + Ax_n(x_{n+1} - x_n) - B + Cx_n^2]$$

جایی که  $A = \frac{a\Delta t^2}{m}$  و  $B = \frac{b\Delta t^2}{m}$  و  $K = \frac{k\Delta t^2}{m}$  و  $C = \frac{c\Delta t^2}{m}$  و  $R = \frac{r\Delta t}{m}$ . معادلات گسسته حرکت (9) را می توان یک ترکیب یکپارچه برای مدل مورد استفاده قرار داد:

$$(12) \quad x_{n+1} = 2x_n - x_{n-1} - R(x_n - x_{n-1}) - Ax_n(x_n - x_{n-1}) + B - Kx_n - C\phi(x_n)x_n^2$$

این یک سیستم گسسته شبه‌خطی است که در بخش بعدی شرح داده می‌شود. سرعت جریان خروجی گسسته عبارت است از:

$$(13) \quad u_n = 2l\sqrt{\frac{2P_s}{\rho_s}} x_n \phi(x_n)$$

به‌طور کلی ما با دریافت سیگنال فشار  $p_n$  نمی‌توانیم مقیاس واقعی را بدانیم عامل مقیاس در معادله (۱۴) غیرقابل شناخت است.

#### ۴. پیش‌بینی شبه‌خطی برای شناسایی پارامتریک

از آنجا که موقعیت نقطه  $A$  در تارهای صوتی بوسیله معادله (۴) متناسب با سرعت جریان گسسته  $u_n$  است فرض کنیم  $x_n = u_n$  پس از حذف تمام مقادیر منفی با تعریف خطای باقیمانده به‌صورت زیر:

$$(14) \quad e_n = x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} + R(x_n - x_{n-1}) + Ax_n(x_n - x_{n-1}) - B + Kx_n + C\phi(x_n)x_n^2$$

ما می‌توانیم فرآیند پیش‌بینی خطی [۲] را بسط دهیم، با فرض این که در آن  $e_n$  میانگین صفر، توزیع گاوسی مستقل وجود دارد. این منجر به راه‌حل کمترین مربع برای یافتن بهترین پارامترهای مدل می‌شود. این تنها زمانی است که فرض کنیم پارامترها خود متغیرهای تصادفی نیستند [۱۰]. برای یک سیگنال غیرمنفی طول  $N$  سیستم که راه‌حل مسئله کمترین مربع است به‌صورت زیر است:

$$(15) \quad \sum_{n=2}^{N-1} Ma = - \sum_{n=2}^{N-1} d$$

که  $a$  به‌صورت زیر است:

$$(16) \quad [R \quad A \quad B \quad K \quad C]^T$$

و همچنین  $M$  ماتریس  $5 \times 5$  می‌باشد. سیگنال‌های سرعت جریان تار صوتی  $u_n$  با استفاده از پیش‌بینی خطی معکوس، مشابه فرآیند توصیف شده در [۱۲] به دست می‌آید. برای فیلتر کردن فشار سخنرانی  $p_n$  و سیگنال متوسط  $v_n$  به‌دست آمده استپس یک فیلتر پایین‌گذر مرتبه دوم به منظور دستیابی به یک تخمین برای سیگنال سرعت جریان تار صوتی  $u_n$  مورد استفاده قرار گرفت. فیلتر پایین‌گذر تابع انتقال زیر است:

$$(17) \quad H(z) = \frac{(1-R)^2}{(1-Rz^{-1})^2}$$

این فیلتر یک پاسخ بزرگ در فرکانس صفر،  $H(1) = 1$  دارد. فیلتر با استفاده از تکنیک فاز صفر، یعنی استفاده از فیلتر رو به جلو در طول سیگنال و سپس معکوس کردن خروجی و استفاده از فیلتر یک بار دیگر، به منظور لغو تاخیر فاز اعمال می‌شود. بعد از آن سیگنال تار صوتی به بخش‌های باز و بسته تقسیم می‌شود. این کار با مشتق عددی برآورد  $u_n$  و برجسب گذاری بخش‌هایی که مشتق کمتر از ۰/۰۲ است، انجام شد. اگر  $u_n > 0$  در بخش باز و اگر  $u_n < 0$  در بخش بسته در نظر بگیریم منطبق بر فرضیه‌ای است که مبنای مشتق تار صوتی است.

#### مراجع

1. J.D. Markel, A.H. Gray : Linear prediction of speech. Springer-Verlag (1976)
2. J.G. Proakis, Manolakis, D.G.: Digital signal processing: principles, algorithms, and applications. Prentice-Hall (1996)
3. K.Kleijn, K.Paliwal: Speech coding and synthesis. Elsevier Science, Amsterdam (1995)
4. B.H. Story: An overview of the physiology, physics and modeling of the sound source for vowels. Acoust. Sci. Tech. (2002) 195-206
5. I.Steinecke, H.Herzel: Bifurcations in an asymmetric vocal-fold model. J. Acoust. Soc. Am. 97 (1995) 1874-1884
6. M.A. Little, I.M. Moroz, P.E. McSharry, S.J. Roberts: System for generating a signal representative of vocal fold dynamics. (2004)
7. R.W. Chan: Constitutive characterization of vocal fold viscoelasticity based on a modified arruda-boyce eight-chain model. J. Acoust. Soc. Am 114 (2003) 2458
8. J. Holmes: Speech synthesis and recognition. Van Nostrand Reinhold (UK) (1988)
9. J. Marsden, M.West: Discrete mechanics and variational integrators. Acta Numerica (2001) 357-514
10. O. D. MacKay: Information theory, inference and learning algorithms. Cambridge University Press (2003)
11. W. Fisher, G. Doddington, K. Goudie-Marshall: The DARPA speech recognition research database: specifications and status. Proceedings of the DARPA Workshop on Speech Recognition (1986) 93-99
12. D. Wong, J. Markel, A. Gray: Least squares glottal inverse filtering from the acoustic speech waveform. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing 27 (1979) 350-355

13. 3. H.U. Voss, J.Timmer, J. Kurths: Nonlinear dynamical system identification from uncertain and indirect measurements. International Journal of Bifurcation and Chaos 14 (2004) 1905–1933
14. 5. Alipour. F, Brücker. CH, D. Cook. D, Gömmel. A, Kaltenbacher. M, Mattheus. W, Mongeau. L, Nauman. E, Schwarze.R, Tokuda. I and Zörner. S:Mathematical Models and Numerical Schemes for the Simulation of Human Phonation. Current Bioinformatics, 2011, 6, 323-343

پست الکترونیکی: [zeynabmoradi363@gmail.com](mailto:zeynabmoradi363@gmail.com)

پست الکترونیکی: [fatehiniam@yazd.ac.ir](mailto:fatehiniam@yazd.ac.ir)

ارائه‌های پوستری

سایر

## توزیع نرمال کوماراسوامی و کاربرد آن در مدل‌های رگرسیون خطی

مرضیه افرازنده\*

بخش آمار، دانشگاه شیراز، شیراز، ایران  
مریم شرفی

بخش آمار، دانشگاه شیراز، شیراز، ایران  
و زهرا سجادینیا  
بخش آمار، دانشگاه شیراز، شیراز، ایران

چکیده. توزیع داده‌های واقعی اغلب چوله هستند، اما در بسیاری از موارد چولگی نادیده گرفته می‌شود و توزیع آنها را نرمال در نظر می‌گیرند. در این مقاله به معرفی یک خانواده جدید از توزیع‌های چوله به نام توزیع نرمال کوماراسوامی که توزیع نرمال را شامل می‌شود، می‌پردازیم. سپس یک مدل رگرسیونی خطی چندگانه با جمله خطای دارای توزیع نرمال کوماراسوامی را معرفی و به برآورد پارامترهای این مدل پرداخته و به منظور ارزیابی حساسیت برآوردهای درست‌نمایی ماکزیم، معیارهای آنالیز تشخیصی را ارائه می‌دهیم. واژه‌های کلیدی: توزیع نرمال کوماراسوامی- تاثیر فراموضعی- تاثیر موضعی. طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 62J05, 62J20.

### ۱. توزیع نرمال کوماراسوامی

توزیع نرمال کوماراسوامی در سال ۲۰۱۷ توسط کوردیرو و همکارانش معرفی گردید. متغیر تصادفی  $X$  دارای توزیع نرمال کوماراسوامی با پارامترهای  $a, b, \mu, \sigma$  است، اگر تابع توزیع تجمعی آن به صورت زیر باشد:

$$F(x) = 1 - \{1 - \Phi((x - \mu)/\sigma)^a\}^b, \quad x \in \mathbb{R},$$

که در آن  $\Phi(\cdot)$  تابع توزیع تجمعی نرمال استاندارد،  $\mu \in \mathbb{R}$  پارامتر مکان،  $\sigma > 0$  پارامتر مقیاس،  $a > 0$  و  $b > 0$  پارامترهای شکل هستند و آن را با نماد  $X \sim KWN(a, b, \mu, \sigma)$  نشان می‌دهیم. در توزیع نرمال کوماراسوامی، پارامترهای  $a$  و  $b$  چولگی و هم‌چنین سبکی و سنگینی دم‌ها را کنترل می‌کنند. این توزیع انعطاف‌پذیری بیشتری را روی دم‌ها ایجاد می‌کند و بنابراین به مجموعه داده‌هایی که شامل مشاهدات دور افتاده هستند، بهتر برازش داده می‌شود.

نکته ۱.۱. در توزیع نرمال کوماراسوامی در حالتی که  $a = b = 1$  و  $\mu = 0$  و  $\sigma = 1$  باشد، توزیع نرمال استاندارد به دست می‌آید.

### ۲. معرفی مدل رگرسیونی نرمال کوماراسوامی

یک مدل رگرسیونی خطی جدید مکانی-مقیاسی مرتبط با متغیر پاسخ  $y_i$  و بردار متغیرهای مستقل  $\underline{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{ip})^T$  بر اساس توزیع  $KWN$  به صورت زیر می‌باشد:

$$(1) \quad y_i = \underline{x}_i^T \underline{\beta} + \sigma z_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

که در آن  $z_i$  دارای توزیع  $KWN(a, b, 0, 1)$ ،  $\underline{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_p)^T$ ،  $a > 0$  و  $b > 0$  پارامترهای مجهول می‌باشند. لگاریتم تابع درست‌نمایی مدل رگرسیونی نرمال کوماراسوامی، برای بردار پارامترهای  $\underline{\eta} = (a, b, \sigma, \underline{\beta}^T)^T$  به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$(2) \quad \ell(\underline{\eta}) = \log L(\underline{\eta}) = n[\log(a) + \log(b) - \log(\sigma^2) - \log(\sqrt{2\pi})] + \sum_{i=1}^n \left\{ (a-1) \log[\Phi(z_i)] + (b-1) \log[1 - \Phi(z_i)^a] - \frac{z_i^2}{2} \right\},$$

که در آن  $z_i = \frac{(y_i - \underline{x}_i^T \underline{\beta})}{\sigma}$  می‌باشد. برآوردگر درست‌نمایی ماکزیم  $\underline{\eta}$  با ماکزیم کردن لگاریتم تابع درست‌نمایی رابطه (۲) به دست می‌آید. این کار را می‌توان با استفاده از بسته‌ی محاسباتی maxLik در نرم افزار R انجام داد. [۱]

\* ارائه‌دهنده

### ۳. آنالیز تشخیصی

در این قسمت به منظور ارزیابی حساسیت برآوردگرهای ماکزیمم درستنمایی مدل رگرسیون معرفی شده در بخش قبل، از دو ابزار “تاثیر فراموضعی” و “تاثیر موضعی” تحت سه حالت پرشیدگی (اختلال)، استفاده می‌گردد.

۱.۳. **تاثیر فراموضعی.** اولین ابزار برای انجام آنالیز حساسیت برآوردگرها، تاثیر فراموضعی است که بر اساس روش حذف مورد انجام می‌شود. حذف مورد یکی از روش‌های رایج برای مطالعه اثر حذف  $i$ امین مشاهده از مجموعه داده‌ها می‌باشد. حذف مورد برای مدل (۱) به صورت زیر انجام می‌شود:

$$(۳) \quad y_l = \underline{x}_l^T \underline{\beta} + \sigma z_l, \quad l = 1, \dots, n, \quad l \neq i,$$

لگاریتم تابع درستنمایی برای مدل (۳)، با نماد  $\ell(\underline{\eta})$  نشان داده می‌شود و  $\underline{\eta} = (\hat{a}_{(i)}, \hat{b}_{(i)}, \hat{\sigma}_{(i)}, \hat{\beta}_{(i)}^T)^T$  نیز برآوردگر متناظر با  $\underline{\eta}$  می‌باشد. (اندیس  $(i)$  به این معنی است که مشاهده  $i$ ام حذف شده است.)

جهت بررسی اثر  $i$ امین مشاهده روی برآوردگرهای ماکزیمم درستنمایی  $\underline{\eta} = (\hat{a}, \hat{b}, \hat{\sigma}, \hat{\beta}^T)^T$ ، به محاسبه اختلاف بین  $\underline{\eta}$  و  $\underline{\eta}_{(i)}$  می‌پردازیم. اگر تفاوت بین  $\underline{\eta}_{(i)}$  و  $\underline{\eta}$  خیلی زیاد باشد، این مشاهده را می‌توان به عنوان یک مشاهده تاثیرگذار در نظر گرفت. نخستین معیار شناخته شده از تاثیر فراموضعی، “فاصله کوک تعمیم‌یافته” است که با نماد GD نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$GD_i(\underline{\eta}) = (\underline{\eta} - \underline{\eta}_{(i)})^T [-J(\underline{\eta})] (\underline{\eta} - \underline{\eta}_{(i)}).$$

که در آن  $J(\underline{\eta})$  ماتریس اطلاع مشاهده شده است. یکی دیگر از معیارهای شناخته شده برای مشاهده اختلاف بین  $\underline{\eta}$  و  $\underline{\eta}_{(i)}$ ، “تغییریافتگی درستنمایی” است که با نماد LD نشان داده و به صورت  $LD_i(\underline{\eta}) = 2[\ell(\underline{\eta}) - \ell(\underline{\eta}_{(i)})]$  محاسبه می‌شود. [۲]

۲.۳. **تاثیر موضعی.** روش تاثیر موضعی معرفی شده توسط کوک (۱۹۸۶) بر این اساس است که در آن به جای حذف مشاهدات، به بررسی مشاهدات پرداخته می‌شود. در حقیقت روش تاثیر موضعی بر اساس بررسی میزان پرشیدگی یک مورد است نه در حذف آن. روش تاثیر موضعی یک ایده مهم برای کنترل همزمان پرشیدگی‌ها در همه موارد می‌باشد.

طرح‌های پرشیدگی در این روش به دو گروه اصلی تقسیم بندی می‌شوند: گروه اول، پرشیدگی در مدل است که به معنی تغییر پیش فرض‌های مدل می‌باشد و گروه دوم نیز پرشیدگی در داده‌ها می‌باشد. به عنوان مثال، پرشیدگی در مدل می‌تواند “جایگزین کردن فرض هم‌واریانس (ثابت بودن واریانس) خطاها” با “فرض ناهم‌واریانس (ثابت نبودن واریانس) خطاها” باشد و در داده‌ها نیز می‌تواند هم شامل پرشیدگی در ماتریس متغیرهای مستقل و هم پرشیدگی در بردار متغیر پاسخ باشد.

فرض کنید  $\ell(\underline{\eta})$  نمایانگر لگاریتم تابع درستنمایی برای مدل غیر پرشیده و داده‌های مشاهده شده باشد که در آن  $\underline{\eta}$  یک بردار  $(p+3) \times 1$  از پارامترهای مجهول با برآورد ماکزیمم درستنمایی  $\underline{\eta}$  می‌باشد. پرشیدگی در مدل یا داده‌ها توسط بردار  $\underline{\omega} \in \Omega$ ،  $m \times 1$  انجام می‌شود که در آن  $\Omega \subset \mathbb{R}^q$  نمایانگر مجموعه‌ای باز از پرشیدگی‌های مربوطه است که به مدل معرفی شده‌اند. هم‌چنین فرض کنید  $\ell(\underline{\eta}|\underline{\omega})$  نمایانگر لگاریتم تابع درستنمایی مربوط به مدل پرشیده یا داده‌ها باشد و نیز برآوردگر ماکزیمم درستنمایی مربوط به  $\underline{\eta}$  در این مدل می‌باشد. مقادیر نزدیک به هم  $\underline{\eta}$  و  $\underline{\eta}_{\underline{\omega}}$  نشان می‌دهد که پرشیدگی روی برآورد پارامترها اثر کمی دارد و مقدار بسیار متفاوت آنها، حاکی از آن است که روش برآوردیابی به چنین پرشیدگی‌هایی بسیار حساس است.

فرض کنید که یک نقطه  $\underline{\omega}_0$  در  $\Omega$  وجود دارد که هیچ نوع پرشیدگی بر روی داده‌ها ایجاد نمی‌کند یعنی  $\ell(\underline{\eta}|\underline{\omega}_0) = \ell(\underline{\eta})$ . هم‌چنین فرض کنید  $\ell(\underline{\eta}|\underline{\omega})$  در همسایگی  $(\underline{\eta}^T, \underline{\omega}_0^T)$  دوبار مشتق‌پذیر پیوسته باشد. کوک (۱۹۸۶) برای اندازه‌گیری فاصله بین  $\underline{\eta}$  و  $\underline{\eta}_{\underline{\omega}}$  معیار “تغییریافتگی درستنمایی” را به صورت زیر معرفی کرد:

$$LD(\underline{\omega}) = 2[\ell(\underline{\eta}) - \ell(\underline{\eta}_{\underline{\omega}})].$$

که در آن  $\underline{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_m)$  بردار پرشیدگی اعمال شده بر روی مدل است. رسم نمودار  $LD(\underline{\omega})$  در برابر  $\underline{\omega}$  که “نمودار تاثیر” گفته می‌شود، شامل اطلاعات اساسی درباره اثرات پرشیدگی موردنظر است. وقتی که بعد  $\underline{\omega}$ ، یعنی  $m$  کمتر یا مساوی ۲ باشد، اطلاعات مربوطه را می‌توان به طور مستقیم از نمودار تاثیر به دست آورد. اما در حالت کلی، اگر  $m$  بزرگتر از ۲ باشد، بدست آوردن اطلاعات از نمودار تاثیر ساده نیست. به این ترتیب کوک (۱۹۸۶) یک روش دیگر برای استخراج اطلاعات در مورد اثر پرشیدگی ارائه داده است. این روش بر اساس مطالعه رفتار موضعی “نمودار تاثیر” حول  $\underline{\omega}_0$  پایه‌گذاری شده است و از معیاری به نام “خمیدگی نرمال” برای  $\underline{\eta}$  در جهت  $\underline{d}$  که با رابطه  $C_d(\underline{\eta}) = 2[\underline{d}^T \Delta^T [J(\underline{\eta})]^{-1} \Delta \underline{d}]$  بیان می‌شود، استفاده می‌کند، وقتی که  $\|\underline{d}\| = 1$  و  $\Delta$  یک ماتریس  $(p+3) \times m$  بوده که به طرح پرشیدگی مورد استفاده بستگی دارد و



درایه‌های آن از رابطه زیر به دست می‌آیند:

$$\Delta = (\Delta)_{(p+3) \times m} = \left( \frac{\partial^2 \ell(\underline{\eta}|\underline{\omega})}{\partial \eta_i \partial \omega_i} \right) \quad i = 1, \dots, p+3, \quad j = 1, \dots, m.$$

در واقع،  $C_d$  تاثیر موضعی پرشیدگی را بر روی برآوردیابی  $\underline{\eta}$  نشان می‌دهد. مقادیر بزرگ  $C_d$  نشان دهنده حساسیت به پرشیدگی‌های ایجاد شده در جهت  $d$  است.  $C_{d_{max}} = \max_d C_d$  بزرگترین مقدار ویژه ماتریس  $\Delta = -\Delta^T [J(\underline{\eta})]^{-1} \Delta$  و  $d_{max}$  نیز بردار ویژه مربوط به آن مقدار ویژه است.  $d_{max}$  نشان می‌دهد که چگونه می‌توان مدل را طوری پرشیده کرد که بزرگترین تغییرات موضعی در "تغییر یافتگی درست‌نمایی" به وجود بیاید. مثلاً اگر  $i$  امین مولفه بردار  $d_{max}$  نسبتاً بزرگ باشد، این موضوع نشان‌دهنده این است که  $\omega_i$  تغییرات اساسی در نتایج تجزیه و تحلیل‌ها ایجاد می‌کند.

کوک (۱۹۸۶) مقدار ۲ برای  $C_{d_{max}}$  را به عنوان یک معیار، پیشنهاد داده است. اگر خمیدگی بسیار بزرگتر از ۲ باشد، نشان‌دهنده حساسیت موضعی قابل توجهی است. لازم به ذکر است که در این مقاله، صرفاً پرشیدگی در داده‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای تعیین ماتریس  $\Delta$ ، به تابع  $\ell(\underline{\eta}|\underline{\omega})$  نیاز داریم که تحت سه نوع پرشیدگی زیر، تابع  $\ell(\underline{\eta}|\underline{\omega})$  را به دست می‌آوریم:

#### • پرشیدگی وزن - مورد

در این حالت برای مدل (۳)، لگاریتم تابع درست‌نمایی به صورت زیر داده می‌شود:

$$\begin{aligned} \ell(\underline{\eta}|\underline{\omega}) &= \sum_{i=1}^n \omega_i \ell(\underline{\eta}) = [\log(a) + \log(b) - \log(\sigma^2) - \log(\sqrt{2\pi})] \sum_{i=1}^n \omega_i \\ &+ \sum_{i=1}^n \omega_i \left\{ (a-1) \log[\Phi(z_i)] + (b-1) \log[1 - \Phi(z_i)^a] - \frac{z_i^2}{2} \right\}, \end{aligned}$$

که در آن،  $0 \leq \omega_i \leq 1$  و  $\underline{\omega} = (1, \dots, 1)^T$  می‌باشد. درایه‌های ماتریس  $\Delta = (\Delta_a^T, \Delta_b^T, \Delta_\sigma^T, \Delta_\beta^T)$  به صورت عددی محاسبه می‌شوند.

#### • پرشیدگی متغیر پاسخ

در این حالت، به تشخیص حساسیت مدل، وقتی که متغیر پاسخ با یک پرشیدگی به صورت مجموع به شکل  $Y_i = y_i + \omega_i S_y$  داده شده است، می‌پردازیم که در آن  $S_y$  یک عامل مقیاس است و می‌تواند توسط انحراف استاندارد متغیر پاسخ  $Y$  برآورد شود و  $\omega_i \in \mathbb{R}$ . لگاریتم تابع درست‌نمایی پرشیده به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} \ell(\underline{\eta}|\underline{\omega}) &= n[\log(a) + \log(b) - \log(\sigma^2) - \log(\sqrt{2\pi})] \\ &+ \sum_{i=1}^n \left\{ (a-1) \log[\Phi(z_i^*)] + (b-1) \log[1 - \Phi(z_i^*)^a] - \frac{z_i^{*2}}{2} \right\}, \end{aligned}$$

که در آن  $\underline{\omega} = (0, \dots, 0)^T$  و  $z_i^* = \frac{(y_i + \omega_i S_y) - x_i^T \beta}{\sigma}$  عامل عدم پرشیدگی می‌باشد. درایه‌های ماتریس  $\Delta = (\Delta_a^T, \Delta_b^T, \Delta_\sigma^T, \Delta_\beta^T)$  به صورت عددی محاسبه می‌گردند.

#### • پرشیدگی متغیر مستقل

در این حالت، یک پرشیدگی به صورت مجموع روی یکی از متغیرهای مستقل پیوسته مدل رگرسیونی مثلاً  $x_q$  به صورت  $x_{iq\omega} = x_{iq} + \omega_i S_q$  در نظر گرفته می‌شود، وقتی که در آن  $S_q$  یک عامل مقیاس می‌باشد و  $\omega_i \in \mathbb{R}$ . لگاریتم تابع درست‌نمایی پرشیده در این مدل به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} \ell(\underline{\eta}|\underline{\omega}) &= n[\log(a) + \log(b) - \log(\sigma^2) - \log(\sqrt{2\pi})] \\ &+ \sum_{i=1}^n \left\{ (a-1) \log[\Phi(z_i^{**})] + (b-1) \log[1 - \Phi(z_i^{**})^a] - \frac{z_i^{**2}}{2} \right\}, \end{aligned}$$

که در آن  $\underline{\omega} = (0, \dots, 0)^T$  و  $x_i^{*T} \beta = \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_q (x_{iq} + \omega_i S_q) + \dots + \beta_p x_{ip}$  و  $z_i^{**} = \frac{[y_i - x_i^{*T} \beta]}{\sigma}$  عامل عدم پرشیدگی می‌باشد. درایه‌های ماتریس  $\Delta = (\Delta_a^T, \Delta_b^T, \Delta_\sigma^T, \Delta_\beta^T)$  به صورت عددی محاسبه می‌گردند. [۳]

مثال ۱.۳. در این مثال می‌خواهیم اثر سن افراد را بر روی زمان ثبت شده به دقیقه ( $y$ ) برای نفرات اول دو مسابقه دوی ماراتن و نیمه ماراتن در نظر بگیریم. بنابراین یک مدل رگرسیونی به صورت  $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \sigma z_i$  در آن  $x_1$  سن، نفرات اول دوی ماراتن، نفرات اول دوی نیمه ماراتن،  $x_2 = \begin{cases} 1, & \text{نفرات اول دوی ماراتن} \\ 2, & \text{نفرات اول دوی نیمه ماراتن} \end{cases}$  و  $z_i$  جمله خطای مدل می‌باشد. [۴]

پارامترهای مدل را تحت دو فرض  $z_i \sim N(0, 1)$  و  $z_i \sim Kwn(a, b)$  با روش ماکزیمم درستمایی برآورد کرده‌ایم و معیارهای BIC، AIC و CAIC را برای این دو مدل رگرسیونی به دست آورده‌ایم. نتایج در جدول ۱ آورده شده است.

جدول ۱. برآورد پارامترهای مدل‌های رگرسیونی نرمال کوماراسوامی و نرمال و خطای استاندارد شده آنها (مقادیر درون پرانتز)

پارامتر	$Kwn$	$N$
$a$	۰/۰۰۳۳۱۶ (۰/۰۰۱۲۹۹)	—
$b$	۰/۳۸۰۳۹۹ (۰/۱۴۲۱۲۴)	—
$\sigma$	۰/۳۲۴۳۱۰ (۰/۰۰۲۹۰۲)	۳/۶۵۸۷ (۰/۵۷۸۹)
$\beta_0$	۲۳۳/۴۰۹۷۵۳ (۰/۶۳۱۹۶۹)	۲۲۵/۶۲۶۵ (۷/۱۱۸۹)
$\beta_1$	۰/۸۳۷۱۹۶ (۰/۰۰۴۷۹۲)	۰/۸۴۷۷ (۰/۱۳۱۰)
$\beta_2$	-۹۳/۳۴۴۸۴۲ (۰/۶۳۱۳۲۸)	-۹۱/۱۸۰۴ (۱/۶۵۱۳)
$AIC$	۹۵/۵۹۲۷۶	۱۱۶/۶۳۵۱
$BIC$	۱۰۱/۵۶۷۲	۱۲۰/۶۱۸
$CAIC$	۱۰۲/۰۵۴۳	۱۱۹/۳۰۱۸

در این جدول ملاحظه می‌شود که مدل  $Kwn$  دارای کمترین BIC، AIC و CAIC است و در نتیجه مدل بهتری است. همچنین در این مثال، فاصله اطمینان ۰/۹۵ درصدی مربوط به ضرایب رگرسیونی در جدول ۲ ارائه شده‌اند که با توجه به این فواصل نیز مدل نرمال کوماراسوامی برازش بهتری بر این داده‌ها دارد.

جدول ۲. فاصله اطمینان مربوط به ضرایب رگرسیونی

ضریب رگرسیونی	فاصله اطمینان مدل نرمال	فاصله اطمینان مدل نرمال کوماراسوامی
$\beta_0$	(۲۰۶/۹۱۲۸, ۲۴۴/۳۴۵۸)	(۲۳۲/۱۷۱۲, ۲۳۴/۶۴۸۲)
$\beta_1$	(۰/۵۰۳۶, ۱/۱۹۱۷)	(۰/۸۲۸۷, ۰/۸۴۶۶)
$\beta_2$	(-۹۴/۹۵۳۷, -۹۲/۱۰۷۴)	(-۹۴/۵۸۲۲, -۹۲/۱۰۷۵)

## مراجع

1. Bingham, N. H., Fry, J. M. (2010). *Regression; Linear model in statistics*. Springer.
2. Cook, R. D. (1977). Detection of influential observations in linear regression. *Technometrics*, 19, 15–18.
3. Cook, R. D. (1986). Assessment of local influence (with discussion). *Journal of the Royal Statistical Society* 48, 133–169.
4. Cordeiro, G. M., Machado, E. C., Botter, D. A., and Sandoval, M. C. (2017). The Kumaraswamy normal linear regression model with applications. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 1–21.

پست الکترونیکی: [afrazandehmarziyeh6@gmail.com](mailto:afrazandehmarziyeh6@gmail.com)

پست الکترونیکی: [msharafi@shirazu.ac.ir](mailto:msharafi@shirazu.ac.ir)

پست الکترونیکی: [sajjadnia@shirazu.ac.ir](mailto:sajjadnia@shirazu.ac.ir)



## آموزش ریاضی از طریق دست‌ورزی راه‌حلی برای ایجاد علاقه به رشته ریاضی

افشین بهرام  
هیئت علمی دانشکده علوم ریاضی دانشگاه تبریز  
نیما محمدی\*  
دانشجوی دبیری ریاضی، دانشگاه فرهنگیان، پردیس علامه امینی تبریز  
مانده حسینی  
دانشجوی دبیری ریاضی، دانشگاه فرهنگیان، پردیس فاطمه الزهرا (س) تبریز

چکیده. همانطور که می‌دانیم در ایران مخصوصاً در طی یکی دو ساله اخیر عدم توازن دواطلبان رشته های تحصیلی علوم پایه به طور خاص تر رشته ریاضی یکی از چالش هایست که با آن روبه رو شده ایم، چرا که در طی این مدت با کاهش حدود ۵۰ درصدی تعداد داوطلبان این رشته همراه شده ایم. عوامل زیادی دست در دست هم داده‌اند و سبب عدم انگیزه دانش‌آموزان و دانشجویان به تحصیل در رشته ریاضی شده است. اما اگر بخواهیم به مهم ترین آنها اشاره کنیم، (۱) نبود آینده شغلی و بازارکار (۲) عدم آموزش موفق این رشته، می‌تواند برای آن کاندیدایی باشد. اگر بخواهیم بیشتر روی عامل دوم متمرکز شویم می‌توان بخش عظیم پدید آورنده آن را روش های تدریس رایج در ایران دانست. امروزه در دنیا روش های فعال در ریاضی جزو موفق ترین روش های تدریس در آموزش ریاضی می‌باشد و این زمینه به دلیل اهمیتی که دارد سالهاست که مورد توجه دانشمندان این حوزه قرار گرفته است اما با اینکه در سند تحول بنیادین آموزش و پرورش در سال ۱۳۹۱ اشاره شده است، معلمان ریاضی و حتی مولفان کتب درسی به طور جدی و فراگیر از آن تبعیت نکرده اند. ما در این مقاله ضمن معرفی روش های تدریس فعال و شاخصه های آن، تلاش کرده تادست‌ورزی را به کلکسیون روش های تدریس فعال اضافه کنیم و همچنین در پایان با آوردن یکی از مطالعات تحقیقی، تأثیرات آن را بر روی ایجاد گرایش به رشته و دروس ریاضی و همچنین موفقیت تحصیلی بیان کنیم.

واژه‌های کلیدی: دانش آموز، معلم، روش های فعال، دست‌ورزی.

### ۱. مقدمه و اهمیت تحقیق

طبق صفحه ی ۳۷ سند تحول بنیادین آموزش و پرورش جمهوری اسلامی ایران داریم: در ریاضیات مدرسه ای، فعالیت های آموزشی باید برخاسته از ریاضی محیط پیرامون باشد و به دانش‌آموزان کمک کند تا با مفاهیم و گزاره های ریاضی را در محیط پیرامونی خود مشاهده، تجزیه و تحلیل و درک کنند و برای مفاهیم ریاضی پیرامونی تعبیرهای گوناگون به دست آورند و... یادگیری عمیق مفاهیم ریاضی وقتی رخ می‌دهد که دانش‌آموز خودشان در طی حل یک مسئله قابل توجه به آن مفاهیم رسیده باشند و خودشان آن مفاهیم را ساخته باشند. استفاده از چنین روند آموزش می‌تواند منجر به یک یادگیری عمیق شود و از آن مهم تر این است که می‌تواند بسیار برای دانش‌آموزان جذاب باشد. برای دانش‌آموزان حائز اهمیت است که ابزارهای متنوعی برای دست‌ورزی داشته باشند تا فرصتی برای مرتب کردن، طبقه بندی کردن، اندازه گرفتن و کشف کردن آنچه که آن ها با آن دانش ریاضیاتی خود را می‌سازند فراهم شود. بدین منظور، دانش‌آموزان نیازمند تجربیات دست اول در ارتباط با ریاضی، تعامل با سایر دانش‌آموزان و بزرگسالان و فرصتی برای بازتاب بر این تجربیات هستند. تحقیقات آموزشی نشان می‌دهد که ماندگارترین یادگیری زمانی رخ می‌دهد که دانش‌آموزان فعالانه فهم ریاضی خود را می‌سازند و این اغلب از طریق دست‌سازه ها به انجام می‌رسد. (۲۰۰۰- نقل شده در سی فلدت و اسیک، ۲۰۰۶)

روش فعال تدریس مجموعه‌ای از روش هایی است که در فعال کردن کلاس نقش موثری دارد و می‌تواند بیشتر اهداف آموزش ریاضی را محقق کند. این روش دانش‌آموز محور است و معلم فقط نقش هدایتی و راهنمایی را بر عهده دارد. در این روش چون دانش‌آموز با مسائل گوناگون مواجه می‌شود و راجع به آن مسائل فکر می‌کند و با راهنمایی های معلم به حل آنها می‌پردازد لذا در اثر فعالیت‌های آموزشی خود موفق به یادگیری مطالب جدید می‌شود و با پی بردن به توانایی های خود در او حس اعتماد به نفس تقویت می‌شود چون در بدست آوردن نتیجه ها و کشف قواعد، خود را سهیم می‌داند و نسبت به مطالب احساس علاقه و مالکیت میکند. [۱]

معلم باید شرایطی را فراهم آورد که اندیشه‌ها و مفاهیم جدید از طریق انجام فعالیت‌های مناسب توسط خود دانش‌آموز کشف شود و او در همه مراحل تدریس مانند تعریف مسئله و ارائه راه حل‌ها شرکت داشته باشد.

## ۲. آموزش از طریق دست ورزی

یکی از روش های آموزشی که در چند دهه اخیر بسیار مورد توجه قرار گرفته و مقالات زیادی در این زمینه نوشته شده است [۳] [۴] استفاده از حس لامسه و آموزش از طریق دست ورزی (جابجایی و لمس کردن) است. جمله معروفی از ادیسون است که می گوید: ( ایده های بزرگ همواره توسط بازوها شکل گرفته است). تحقیقات متعدد آماری نشان می دهد که وقتی دانش آموزان مطلبی را با دستانشان لمس می کنند و از طریق جابجایی و ساختن این مطلب را یاد می گیرند نه تنها درک بهتری نسبت به آن موضوع دارند بلکه آن مطلب مدت طولانی تری در ذهن دانش آموزان می ماند و از یادگیری شان رضایت بیشتری دارند چرا که نسبت به یافته ها حس مالکیت دارند. این روش تمایزی که با سایر روش فعالی که دارد این است که ریاضیات را همانند یک سرگرمی یا بهتر بگوییم به عنوان یک بازی فکری معرفی می کند.

۱.۲. تاریخچه دست ورزی. از زمان های قدیم انسان ها از وسایل و اجسام فیزیکی در ریاضی به منظور کمک کردن به حل مسائل روزمره استفاده کرده اند. اگر بخواهیم تاریخ ساخت اولین دست سازه را بیان کنیم می توان آن را از تاریخ ۱۸۰۰ میلادی به بعد در نظر بگیریم چرا که بعد از این تاریخ در سال ۱۸۳۷ فردریک فروبل، معلم آلمانی، مهد کودکی را در جهان معرفی کرد که در این مهد کودک انواعی از وسایل بازی آموزشی طراحی کرد که به عنوان فروبل گیفت شناخته شدند و شامل بلوک هایی با ساختمان هندسی برای فعالیت ریاضی بودند (فروبل، ۲۰۰۹). سپس در اوایل سال ۱۹۰۰ مربی ایتالیایی، ماریا مونته سوری، ایده دست ورزی در آموزش ریاضی و اهمیت آن را مطرح کرد و گسترش داد. او چندین وسایل کمک آموزشی را برای کمک به یادگیری ریاضی دانش آموزان را طراحی کرد لذا از دهه ۱۹۰۰ دست سازه ها به عنوان یک ضرورت در تدریس ریاضیات ابتدایی مورد توجه قرار گرفت و همچنین وی معتقد بود که دانش آموزان با استفاده از دست سازه های تهیه شده مناسب، میل فطری و درونی خود را با یادگیری از طریق خود جهت دهی اکتشافی، واقعی می کنند. (به نقل از وارد، ۱۹۷۱). در بین سال های ۱۹۶۰ تا ۱۹۷۰، پیدایش دست سازه ها در کلاس های ابتدایی بر اساس نظریه دلتان دینز برای تصدیق استفاده از آن ها، به سرعت افزایش یافت. [۲]

۲.۲. تعاریفی از دست ورزی. دست سازه های فیزیکی تعریف می شوند که به عنوان ابزارهای تدریس مورد استفاده قرار می گیرند تا دانش آموزان را با کار عملی ریاضی درگیر کنند ( بوگان، هارپر و وایت میر، ۲۰۰۹). کندی (۱۹۸۶) دست سازه ها را اشیائی معرفی می کند که می توانند چندین حس را درگیر کنند، به این معنا که این اشیاء توسط دانش آموزان لمس می شوند، حرکت داده می شوند، مرتب می شوند، دست ورزی های دیگری روی آن ها انجام می شوند. از دیدگاه مویر (۲۰۰۱)، دست سازه ها ابزارهایی هستند که ایده های انتزاعی ریاضیات را به طور صریح، روشن و محسوس نمایش می دهند. استین و بووالینو (۲۰۰۱) نیز دست سازه ها را به عنوان یکی از راه هایی که ریاضیات را برای دانش آموزان با معنا می کنند، معرفی کرده اند.

۳.۲. پیاده سازی آموزش از طریق دست ورزی. می توان در ابتدا دست سازه ها را به سه بخش تقسیم کرد: (مارشال و سوان، ۲۰۰۵):

۱. دست سازه هایی که ساخته نشده اند، این دست سازه ها توسط معلم و دانش آموزان با استفاده از ابزارهای در دسترس ساخته می شوند،
۲. دست سازه هایی که در شرکت های صنایع ساخته می شود و در اختیار معلمان و دانش آموزان قرار می گیرد،
۳. استفاده از دست سازه های مجازی.

معلم با توجه به اقتضای سنی دانش آموزان و دانشجویان و همچنین متناسب با درس مربوطه و مدت زمان تدریس باید یکی از سه روش بالا را انتخاب کند. سپس در ابتدا مفاهیم ابتدایی و پیش نیاز را برای دانش آموزان ارائه می دهد در گام بعد از آنان می خواهد با استفاده از ابزار های موجود به نتایج مورد نظر برسد. برای رسیدن به نتایج مورد نظر معلم، معلم باید دانش آموزان را راهنمایی کند. بعد از اینکه دانش آموزان مفاهیم خواسته شده را بدست آوردند و آن مطالب را تجربه کردند و معلم نظرات دانش آموزان را می پرسد و سپس درس را جمع بندی می کند.

۴.۲. ویژگی های آموزش از طریق دست ورزی. برخی از اهم ویژگی های این نوع آموزش می توان به موارد زیر اشاره کرد [۵] [۶]:

۱. همه اساسی ترین حقایق در مورد جهان برای اولین بار از میان اعضای فیزیکی کشف شد. به جهت رشد ذهن، حقایق جدا شده و به راهکار های دیگر ربط داده شدند. بشر بهترین یادگیری را با درست کردن چیز های به هم چسبیده سپس جدا کردن آن ها برای ایجاد شیوه جدید دارد،
۲. این روش یادگیری فعال باعث می شود نیم کره راست مغز هم در آموزش مفاهیم ریاضی مورد استفاده و فعال گردد،

۳. آموزش ریاضی از طریق دست‌ورزی و جابجایی باعث هوشمند شدن و هماهنگی دست‌ها و چشم‌ها با یکدیگر می‌شود که این توانایی برای موفقیت در علوم مهندسی بسیار پر اهمیت هست. و تحقیقات آماری نشان می‌دهد فارغ‌التحصیلان مدارس که فعالیتهای دست‌ورزی در آموزش انجام می‌دهند در علوم مهندسی موفق‌ترند،
۴. انگیزه و شوق یادگیری در نزد دانش‌آموزان ارتقا بیابد دانش‌آموزان این روش یادگیری همانند بازی می‌بینند و شور و ذوق بیشتری را در آموزش از طریق دست‌ورزی نشان می‌دهند،
۵. این روش کاملاً دانش‌آموز محور می‌باشد و معلم تنها نقش راهنما دارد،
۶. این روش، یک روش پویاست و به رشد خلاقیت دانش‌آموزان کمک می‌کند.

### ۳. آیا آموزش از طریق دست‌ورزی را می‌توان به عنوان یک روش تدریس فعال بیان کنیم؟

با توجه به ویژگی‌های مطرح شده برای روش آموزش از طریق دست‌ورزی و تطبیق آن با ویژگی‌های روش‌های فعال تدریس می‌توان نتیجه گرفت که آری، این روش کاملاً یک روش فعال محسوب می‌شود، چون این روش یک روش دانش‌آموز محور است و کمک می‌کند دانش‌آموزان خود نتایج مورد نظر را بدست آورند و در کلاس فعال باشند.

### ۴. نمونه‌ای از یک مطالعه تحقیقی دست‌ورزی و نتایج آن

مقالات زیادی به این مهم و آثار آن اشاره داشته‌اند که در این قسمت یکی از آن مطالعات تحقیقی آورده شده است [۷]:

۱.۴. طرح پژوهش. در این مطالعه تحقیقی بر تاثیر دست‌ورزی بر روی موفقیت‌های تحصیلی و نگرش به رشته‌های ریاضی بر مدل گروه کنترل شده پیش‌آزمون/پس‌آزمون که طراحی شب آزمایش است، صورت گرفته است. در مدل گروه کنترل پیش‌آزمون/پس‌آزمون یکی از گروه‌ها که قبلاً برای هدف دیگری تشکیل شده بود به طور تصادفی به عنوان گروه آزمایشی انتخاب شده است در حالیکه گروه دیگر به عنوان گروه کنترل در نظر گرفته شده است. گروه‌ها یک بار قبل از آزمایش و یک بار بعد از آزمایش مورد ارزیابی قرار گرفته‌اند. از آنجا که انتظار می‌رود تاثیر متغیرها بر گروه‌های آزمایشی و کنترل یکسان باشند، مدل این امکان را به ما می‌دهد که خطاهایی که از منابعی مانند زمان، آزمایش و ابزار سرچشمه می‌گیرند را به طور قابل توجهی کنترل کنیم. (کاپتان، ۱۹۹۸، صفحه ۸۵) در روش آزمایشی محقق تاثیرات دقیق، روش‌ها یا شرایط محیطی و... کنترل می‌کند تا ببیند و بفهمد که چگونه وسایل یا رفتارهای اشخاص (فاعل‌ها) تحت تاثیر قرار می‌گیرند و تغییر می‌کنند. روش آزمایشی همچنین یک روش ایده‌آل برای کشف علت‌ها و روابط تاثیر گذاری در تحقیق است. (کاپتان، ۱۹۹۸، صفحه ۷۵-۷۴)

۲.۴. ابزار جمع‌آوری داده. آزمون دستاوردهای ریاضی و مقیاس گرایش به دروس ریاضی برای جمع‌آوری داده‌های تحقیق استفاده می‌شوند.

۳.۴. آزمون دستاوردهای ریاضی. یک آزمون چندگزینه‌ای که شامل ۲۵ سوال در مورد مبحث دایره و کره مربوط به موضوع هندسه است که دامنه یادگیری به دروس ریاضی پایه هفتم در مدرسه راهنمایی توسعه یافته است. حداقل دوسوال برای هریک از واکنش‌ها در آزمون آورده شده است. آزمون توسط یک معلم ریاضی، یک متخصص در زمینه ریاضی، یک متخصص ارزشیابی و یک معلم ترکیه‌ای بررسی شد. به مدل نهایی خود بعد از طرح آزمایشی درآمد. ضریب اطمینان آزمون دستاورد، ۰.۸۲ / محاسبه شد. این مقدار اطمینان، آزمون را به عنوان یک ابزار ارزیابی را نشان می‌دهد.

۴.۴. روش تجربی. تحقیق بر روی دو کلاس پایه هفتم یک مدرسه انجام گرفت. توجه‌ها صرف این شد که کلاس‌ها ویژگی‌هایی با کیفیت مشابه از لحاظ استعداد در طول انتخاب کلاس‌ها داشته باشند. به این منظور، دستاوردهای پیشین ریاضی به معنی نمرات کلاس‌هایی که مقایسه شده‌اند و دو کلاسی که ارزشیابی دستاوردهای ریاضی در این مطالعه را داشتند، است. یکی از کلاس‌ها به عنوان گروه آزمایشی و کلاس‌های دیگر به طور تصادفی به عنوان گروه کنترل تعیین شدند. بر روی هر دو گروه آزمون دستاوردهای ریاضی و مقیاس گرایش به دروس ریاضی اعمال شد. در این مطالعه روش تجربی که هر کدام ۴ هفته طول کشید (۵ کلاس هر هفته، در کل ۲۰ کلاس) دست‌سازها مطابق با موضوع‌های "طول در دایره و کره" و "زاویه‌ها" طراحی شدند که توسط گروه آزمایشی با محقق مورد استفاده قرار گرفتند در حالی که در گروه کنترل شده درسها با روش‌های سنتی آموزش داده شدند. مواد طراحی شده تدریس محسوس بودند و به دانش‌آموزان این اجازه را می‌دادند که به اندازه کافی تمرین کنند و در موضوعات تجدید نظر کنند.

۵.۴. نتایج تحقیق. تحقیقات متنوعی اخیراً بر روی تأثیرات دست سازه‌ها بر دستورالعمل‌های ریاضی انجام گرفته است. با توجه به نتایج مطالعات، مشاهده می‌شود که دست سازه‌ها موفقیت‌های ریاضی را افزایش داده‌اند. (کلمنت، ۱۹۹۹، کایما، ۲۰۱۰، سول ۱۹۸۹) علاوه بر این، محقق‌های دیگر نیز پیشنهاد می‌کنند چون هنگامی که از دست سازه‌ها در کلاس‌ها استفاده می‌شود دانش‌آموزان بیشتر فعال هستند و انگیزه‌ی بالاتری برای یادگیری دارند و گرایش مثبت به دروس ریاضی کسب می‌کنند. (Enki, 2014; Gürbüz, 2007; Sowell, 1989)

با توجه به نمرات قبلی موفقیت‌های گروه‌های آزمایشی و کنترل، نمرات بالای گروه آزمایشی نشان می‌دهد که دست سازه‌هایی که برای مبحث‌های دایره و کره آماده شده بودند به طور قابل توجهی در یادگیری موثر نقش دارند. هرچند بعضی مطالعات در ادبیات هستند که پیشنهاد می‌کنند دست سازه‌ها در موفقیت‌های ریاضی دانش‌آموزان غیرموثر هستند. (Boakes, 2009; Boyraz, 2008; Enki, 2014 & Kaplan, Baran, Işık, Kal, & Hazer, 2013; McClung, 1998; White, 2012)

با توجه به اینکه براساس اطلاعات ما، سطح گرایش گروه‌های آزمایشی و کنترل شده به دروس ریاضی قبل از عملکرد، یکسان بودند. نتیجه گرفته می‌شود که دست سازه‌ها در افزایش نمرات گرایش به دروس ریاضی در گروه آزمایشی موثر هستند. مطالعات دیگری نیز هستند که نشان می‌دهند دست سازه‌ها بر گرایش دانش‌آموزان به دروس ریاضی موثر است. در مطالعات انکی (۲۰۱۴) دانش‌آموزان در مخالفت با روش‌های قدیمی تدریس اشاره کردند که یادگیری با فعالیت شامل استفاده از دست سازه‌ها برای آنها لذت بخش‌تر است و انگیزه آنها را افزایش می‌دهد و سبب می‌شود که دانش‌آموزان با خوش‌گذرانی یاد بگیرند. بازخوردهای مثبت این نوع، نشان دهنده یک گرایش مثبت به دروس ریاضی و استفاده از دست سازه‌ها در عملکردهای ریاضی است. در نتیجه با توجه به این ایده که استفاده از دست سازه‌ها برای تکامل مباحث انتزاعی سودمند است، استفاده بیشتر از دست سازه‌ها در فرایند تدریس-یادگیری پیشنهاد می‌شود.

## ۵. نتیجه‌گیری

با توجه به مباحثی که ارائه شد می‌توان چنین نتیجه‌گیری کرد که روش آموزش ریاضی از طریق دست‌ورزی را می‌توان یک روش آموزش فعال ریاضی بشمار آورد چراکه تمام ویژگی‌ها و شاخصه‌های یک روش فعال را دارا می‌باشد و همچنین از مطالعه تحقیقی که آورده شد می‌توان چنین استنباط کرد، در صورتی که تنها از روش‌های سنتی استفاده کرد تأثیراتی منفی بر روی نگرش، علاقه و انگیزه دانش‌آموزان دارد و عملکرد آنان را کاهش می‌دهد اما در صورتی که از روش‌های نوین و فعال به طور خاص‌تر روش آموزش ریاضی از طریق دست‌ورزی استفاده کرد تأثیر مثبتی بر روی علاقه و انگیزه دانش‌آموزان به دروس ریاضی و گرایش ادامه تحصیل در این رشته دارد. اما گفتن این نکته خالی از لطف نیست که این روش‌ها باید نه تنها در سطح کلاس به صورت هدف‌های کلی مطرح شود بلکه باید این مطالب به صورت هدف‌های جزئی و رفتاری مطرح و در مدارس و کلاس‌های درس عملی شود تا نتایج و تأثیرات استفاده از آنان را در بلند مدت بر روی سیستم آموزشی و پرورشی کشور ببینیم.

## مراجع

1. Donaldson, Sarah Elizabeth. Teaching Through Problem Solving: Practices of Four High School Mathematics Teachers. 2011.
۲. مجله رشد آموزش ریاضی، دوره ۲۸، شماره ۴، تابستان ۹۰، مرادی توپقرا، لایلا، بیات، مرتضی
3. Clements, D. H. (1999). Concrete Manipulatives, Concrete Ideas. Contemporary Issues in Early Childhood. (1), 45-60.
4. Uttal, D. H & Scudder, K. V & Deloache, J. S. (1997). Manipulatives as Symbols: A New Perspective on the Use of Concrete Objects to Teach Mathematics. Journal of Applied Developmental Psychology
5. Begel A., Garcia D. and Wolfman S., "Kinesthetic Learning in the Classroom", ACM SIGCSE Bulletin, v.36, n.1, March 2004.
6. Clements, D. H. (1999). Concrete Manipulatives, Concrete Ideas. Contemporary Issues in Early Childhood. (1), 45-60.
7. Hakkı Konaş, The Effect of Manipulatives on Mathematics Achievement and Attitudes of Secondary School Students, Journal of Education and Learning

پست الکترونیکی: [behmaram@tabrizu.ac.ir](mailto:behmaram@tabrizu.ac.ir)

پست الکترونیکی: [Nima.mohammadi.math@gmail.com](mailto:Nima.mohammadi.math@gmail.com)

پست الکترونیکی: [Maedeh.hosseini1377@gmail.com](mailto:Maedeh.hosseini1377@gmail.com)

## مطالعه‌ای بر روش‌های گوناگون نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار و مقایسه‌ی کارایی میانگین نمونه‌ای آن‌ها

خاطره تراوش\*

بخش آمار، دانشگاه شیراز، شیراز، ایران  
مریم شرفیبخش آمار، دانشگاه شیراز، شیراز، ایران  
و زهرا سجادینیا  
بخش آمار، دانشگاه شیراز، شیراز، ایران

چکیده. در شرایطی که اندازه‌گیری حجم زیادی از واحدهای نمونه دشوار است اما در مقابل رتبه‌بندی آنها آسان است، روش‌های نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار کارایی بیشتری نسبت به نمونه‌گیری تصادفی ساده دارند و از نظر اقتصادی مقرون به صرفه‌تر هستند. روش نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار برای اولین بار توسط مک-ایننتایر (۱۹۵۲) [۳] به منظور برآورد میانگین جامعه معرفی شد. در این مقاله روش نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار را معرفی کرده و سپس به روشهای دیگری از نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار مانند نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار زوجی، نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار دومرحله‌ای و نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار دومرحله‌ای زوجی می‌پردازیم و نشان می‌دهیم که برآورد میانگین نمونه‌ای به روش نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار دومرحله‌ای کارایی بیشتری نسبت به سایر روش‌ها دارد.

واژه‌های کلیدی: نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار، نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار زوجی، نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار دومرحله‌ای، کارایی نسبی.

طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 62D05.

## ۱. مقدمه

یکی از مسائل مهم در آمار، دستیابی به روش‌های نمونه‌گیری است که از لحاظ اقتصادی مقرون به صرفه باشد؛ به‌خصوص زمانی که اندازه‌گیری متغیر مورد مطالعه بسیار وقت‌گیر و پرهزینه است و یا اثرات تخریب‌پذیری به دنبال دارد. معمول‌ترین روش، استفاده از نمونه‌گیری تصادفی ساده (SRS)<sup>۱</sup> می‌باشد. اما هیچ ضمانتی وجود ندارد که نمونه‌ی انتخابی، نماینده خوبی از جامعه‌ی مورد مطالعه باشد. اولین راهکار برای انتخاب یک نمونه‌ی مناسب، گردآوری اطلاعات اولیه از جامعه می‌باشد تا به وسیله‌ی آن جامعه را به زیرگروه‌های مشابه تقسیم بندی کرده و سپس از هر زیرگروه جداگانه، نمونه‌ی تصادفی گرفته تا در نهایت نمونه‌ای که بتواند نماینده بهتری از جامعه باشد، به دست آید. به عنوان مثال روش‌های نمونه‌گیری طبقه‌بندی، سیستماتیک و خوشه‌ای از این دسته هستند. اما باز هم چنین راهکارهایی مشکل هزینه و اثرات مخربی که ممکن است در پی داشته باشد را حل نمی‌کند. بنابراین روشی را معرفی خواهیم کرد که علاوه بر کم هزینه بودن، یک نمونه‌ی دقیق‌تر از جامعه در اختیار ما قرار دهد.

مک-ایننتایر (۱۹۵۲) [۳] روشی کارا به منظور برآورد محصول چراگاه پیشنهاد داد که بعدها با نام نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار (RSS)<sup>۲</sup> شناخته شد. نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار در زمینه‌های کشاورزی، زیست محیطی، بوم‌شناسی و هر شرایط دیگری که اندازه‌گیری دقیق واحدهای نمونه سخت یا هزینه‌بر است اما در مقابل رتبه‌بندی آنها آسان و کم هزینه است، بسیار سودمند می‌باشد. در واقع اگر رتبه‌بندی مشاهدات نمونه نسبت به متغیر مورد بررسی به وسیله‌ی مشاهده‌ی چشمی یا هر روش دیگری که نیاز به اندازه‌گیری نداشته باشد امکان پذیر باشد، روش نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار (RSS) نسبت به نمونه‌گیری تصادفی ساده (SRS) بهتر عمل می‌کند و احتمال دستیابی به یک نمونه‌ی مطلوب را که بتواند نماینده خوبی از جامعه باشد بیشتر کرده و برآورد دقیق‌تری برای ویژگی مورد مطالعه در جامعه حاصل می‌نماید. فرض اساسی در روش RSS نامتناهی بودن جامعه‌ی تحت مطالعه می‌باشد و همچنین فرض بر این است که اندازه‌گیری واحدهای نمونه‌گیری هزینه‌بر و طاقت‌فرسا است؛ اما رتبه‌بندی یک مجموعه کوچک از آن‌ها امکان‌پذیر و کم هزینه است. برای انتخاب نمونه‌ای به حجم  $mn$  به روش RSS به صورت زیر عمل می‌کنیم:

گام اول: انتخاب  $n$  مجموعه هر کدام به حجم  $n$  از جامعه به روش SRS.گام دوم: رتبه‌بندی هر کدام از این  $n$  مجموعه براساس روش چشمی یا متغیر کمکی.گام سوم: انتخاب واحد با رتبه  $r$  از مجموعه  $r$  ام.تمام سه مرحله بالا را یک چرخه می‌نامیم. حال این چرخه را  $m$  بار تکرار می‌کنیم تا در نهایت  $mn$  نمونه‌ی رتبه‌بندی شده به دست آوریم.<sup>2</sup> Ranked Set Sampling<sup>1</sup> Simple Random Sampling

\* ارائه‌دهنده



## ۲. نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار زوجی (PRSS)

روش نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار زوجی (PRSS)<sup>۲</sup> برای اولین بار توسط ماتلاک (۱۹۹۶) [۴] مطرح شد. این روش زمانی سودمند است که انتخاب حجم زیاد نمونه از جامعه میسر نیست. اما در مقابل رتبه‌بندی تعداد زیادی از واحدهای نمونه با استفاده از مشاهده یا هر روش دیگری که بدون هزینه است، آسان است. به عنوان مثال در نمونه‌گیری‌های جنگلی و زیست محیطی که به دلیل محدود بودن منابع طبیعی امکان نمونه‌گیری به حجم زیاد وجود ندارد و ممکن است اثرات تخریب‌پذیر محیطی به دنبال داشته باشد، روش PRSS می‌تواند مفید باشد. نمونه‌گیری به روش PRSS در هر چرخه بدین صورت است:

گام اول: برای  $n$  زوج، انتخاب  $K = \frac{n}{2}$  مجموعه هر یک به حجم  $n$  و برای  $n$  فرد، انتخاب  $K = \frac{(n+1)}{2}$  مجموعه هر یک به حجم  $n$ .

گام دوم: رتبه‌بندی هر کدام از این  $K$  مجموعه براساس روش چشمی یا متغیر کمکی.

گام سوم: اندازه‌گیری واحد با رتبه  $r$  و  $n - r + 1$  از مجموعه‌ی  $r$  ام، برای  $r = 1, \dots, K$  در پایان چرخه بالا را  $m$  مرتبه تکرار می‌کنیم.

## ۳. نمونه مجموعه رتبه‌دار دومرحله‌ای (DRSS) و ادغام آن با روش نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار زوجی (PRSS)

در این بخش، به عنوان روشی متفاوت پیرامون RSS، روش نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار دومرحله‌ای (DRSS)<sup>۴</sup> معرفی شده و مورد بررسی قرار گرفته است و نشان خواهیم داد که روش DRSS کارایی بیشتری در برآورد میانگین جامعه نسبت به روش‌های RSS و SRS دارد. در انتها با ترکیب دو روش PRSS و DRSS روش جدیدی را به نام نمونه‌ی مجموعه رتبه‌دار دومرحله‌ای زوجی (PDRSS)<sup>۵</sup> معرفی خواهیم کرد. در واقع زمانی که تعداد زیادی از واحدهای نمونه در دسترس نیست و یا هزینه‌ی رتبه‌بندی غیر قابل چشم‌پوشی است روش PDRSS می‌تواند جایگزین مناسبی برای روش DRSS واقع شود.

۱.۳. نمونه مجموعه رتبه‌دار دومرحله‌ای (DRSS). الصالح و الکدیری (۲۰۰۰) [۲] روش نمونه‌گیری کاراتری نسبت به RSS به نام نمونه مجموعه رتبه‌دار دومرحله‌ای (DRSS) پیشنهاد کردند. این روش زمانی که حجم نمونه  $n$ ، کوچک در نظر گرفته میشود خوب عمل میکند. نمونه‌گیری به روش DRSS در هر چرخه به صورت زیر می‌باشد:

گام اول: انتخاب  $n$  مجموعه هر کدام به حجم  $n^2$  از جامعه به روش SRS.

گام دوم: به کارگیری روش RSS برای هر یک از مجموعه‌های  $n^2$  تایی تا دستیابی به  $n^2$  واحد نمونه RSS.

گام سوم: به کارگیری مجدد روش RSS در مرحله دوم برای  $n^2$  نمونه به دست آمده در گام دوم تا دستیابی به  $n$  واحد نمونه نهایی. در پایان چرخه بالا را  $m$  مرتبه تکرار می‌کنیم.

۲.۳. نمونه مجموعه رتبه‌دار دومرحله‌ای زوجی (PDRSS). روش PDRSS توسط عبدالحق و همکاران (۲۰۱۶) [۱] معرفی شد. زمانی که در به کار بردن روش DRSS با محدودیت تعداد واحد نمونه روبرو هستیم و یا هزینه نمونه‌گیری غیر قابل چشم‌پوشی است، می‌توان روش PDRSS را جایگزین DRSS کرد. مهم‌ترین مزیت روش PDRSS این است که حجم نمونه کمتری نسبت به روش DRSS نیاز است که در نتیجه صرفه‌جویی در وقت و هزینه را به دنبال دارد. در این روش در هر چرخه گام‌ها به صورت زیر خواهند بود.

گام اول: برای  $n$  زوج، انتخاب  $K = \frac{n}{2}$  مجموعه هر یک به حجم  $n^2$  و برای  $n$  فرد، انتخاب  $K = \frac{(n+1)}{2}$  مجموعه هر یک به حجم  $n^2$ .

گام دوم: به کارگیری روش RSS برای هر یک از مجموعه‌های  $n^2$  تایی تا دستیابی به  $n$  واحد نمونه در هر یک از  $K$  مجموعه.

گام سوم: به کارگیری روش PRSS برای  $K$  مجموعه به حجم  $n$  تا دستیابی به  $n$  واحد نمونه نهایی. در نهایت چرخه بالا را  $m$  مرتبه تکرار می‌کنیم.

میانگین نمونه‌ای تمام روش‌های معرفی شده در این مقاله، هر یک برآوردگری نااریب برای میانگین جامعه هستند. جهت مقایسه کارایی روش‌های نمونه‌گیری معرفی شده، روابط زیر برقرار است.

$$Var(\bar{X}_{DRSS}) \leq Var(\bar{X}_{PDRSS}) \leq Var(\bar{X}_{RSS}) \leq Var(\bar{X}_{PRSS}) \leq Var(\bar{X}_{SRS})$$

مشاهده می‌شود که کارایی روش DRSS از سایر روش‌ها بیشتر است.

<sup>5</sup> Paired Double Ranked Set Sampling

<sup>4</sup> Double Ranked Set Sampling

<sup>3</sup> Paired Ranked Set Sampling



## ۴. بحث و نتیجه‌گیری

جهت مقایسه کارایی روش‌های معرفی شده در یک مطالعه شبیه‌سازی، سه توزیع متقارن و همچنین سه توزیع نامتقارن را در نظر گرفته‌ایم. طبق جدول ۱ با افزایش اندازه نمونه کارایی نیز افزایش می‌یابد. مشاهده می‌کنیم که میانگین نمونه PRSS بهتر از نمونه RSS نمی‌تواند باشد، ولی در شرایطی که امکان نمونه‌گیری به حجم زیاد جهت رتبه‌بندی وجود ندارد، روش PRSS را می‌توان جایگزین روش RSS کرد. همچنین مشاهده می‌شود کارایی روش PDRSS بیشتر از دو روش PRSS و RSS است و کاملاً واضح است که روش DRSS عملکرد بهتری نسبت به تمام روش‌های ذکر شده دارد. بنابراین در شرایطی که در انتخاب نمونه با محدودیت روبه‌رو هستیم، روش PDRSS می‌تواند جایگزین مناسبی برای روش DRSS باشد.

جدول ۱. کارایی روش‌های مختلف نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار نسبت به SRS در توزیع‌های متقارن و نامتقارن

توزیع	$N = mn$	$n$	PRSS	RSS	PDRSS	DRSS
$U(0,1)$	۴	۲	۱/۹۱	۳/۰۶	۳/۰۸	۴/۰۸
	۸	۴	۳/۳۷	۴/۲۷	۶/۲۲	۸/۴۷
	۱۲	۶	۴/۷۰	۷/۶۶	۱۲/۴۴	۱۵/۴۰
$N(0,1)$	۴	۲	۱/۸۵	۲/۹۷	۳/۰۲	۳/۲۹
	۸	۴	۳/۶۳	۴/۳۵	۶/۴۷	۷/۲۰
	۱۲	۶	۵/۱۵	۶/۷۲	۱۰/۳۱	۱۱/۰۴
$Logistic(0,1)$	۴	۲	۲/۰۶	۳/۱۰	۳/۱۹	۳/۳۷
	۸	۴	۳/۵۲	۴/۶۶	۵/۵۹	۷/۱۷
	۱۲	۶	۴/۹۰	۵/۵۰	۹/۱۶	۹/۵۶
توزیع	$N = mn$	$n$	PRSS	RSS	PDRSS	DRSS
$EXP(1)$	۴	۲	۱/۸۹	۲/۵۳	۲/۷۶	۳/۳۱
	۸	۴	۲/۹۳	۳/۴۱	۵/۰۰	۶/۱۵
	۱۲	۶	۴/۰۰	۵/۳۳	۷/۲۳	۷/۹۰
$Gamma(2,1)$	۴	۲	۲/۰۵	۲/۶۳	۲/۸۶	۳/۱۵
	۸	۴	۲/۹۹	۴/۰۹	۴/۹۲	۴/۹۶
	۱۲	۶	۴/۵۹	۴/۹۰	۸/۴۴	۹/۲۷
$Laplace(0,1)$	۴	۲	۲/۱۴	۲/۵۷	۲/۸۶	۳/۳۷
	۸	۴	۳/۰۶	۴/۰۲	۵/۵۴	۵/۶۹
	۱۲	۶	۴/۶۲	۵/۰۴	۶/۹۳	۷/۴۰

## مراجع

1. Abdul Haq, et. al., *Paired double-ranked set sampling*, Communications in Statistics - Theory and Methods. 45(2016),no. 10, 2873–2889.
2. Al-Saleh, M.F., Al-Kadiri, M., *Double ranked set sampling*, Statist. Probab. Lett. 48(2000), 205–212.
3. G.A.McIntyre, *A method for unbiased selective sampling using ranked sets*, Australian Journal of Agricultural Research. 3(1952), 385–390.
4. Muttalak, H.A., *Pair rank set sampling*, Biometr. 38(1996), 879–885.

پست الکترونیکی: [khaterehtaravosh@gmail.com](mailto:khaterehtaravosh@gmail.com)

پست الکترونیکی: [msharafi@shirazu.ac.ir](mailto:msharafi@shirazu.ac.ir)

پست الکترونیکی: [sajjadnia@shirazu.ac.ir](mailto:sajjadnia@shirazu.ac.ir)

## اندازه‌های احتمال تصادفی برای فرآیندهای فضایی

علی تقوی راد\*

دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران

و مجید جعفری خالدي

عضو هیئت علمی دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران

چکیده. فرآیندهای دیریکله به عنوان توزیع‌های پیشین تصادفی نقش مهمی در رهیافت بیزی ناپارامتری ایفا می‌کنند. در این مقاله روش‌های توسعه‌ی این فرآیندها با هدف ایجاد اندازه‌های احتمال تصادفی وابسته به فضا برای مدل‌سازی فرآیندهای تصادفی معرفی و بررسی می‌شوند. واژه‌های کلیدی: فرآیندهای فضایی، اندازه‌های احتمال تصادفی، فرایند دیریکله. 62M30, 62G99: [۲۰۱۰].

## ۱. پیش‌گفتار

داده‌های فضایی مجموعه داده‌هایی هستند که در یک فضا مشاهده شده و بر حسب موقعیت‌شان در آن فضا وابسته هستند. هدف از تحلیل این داده‌ها عموماً پیشگویی فضایی در موقعیت‌های جدید و رگرسیون فضایی است. برای دستیابی به این اهداف اغلب از یک میدان تصادفی برای مدل‌سازی داده‌ها استفاده می‌شود. فرض متداول در تحلیل داده‌های فضایی این است که میدان تصادفی مورد مطالعه، گاوسی با ساختار همبستگی مانا و همسانگرد است. تحت این فرض‌ها از یک طرف توزیع داده‌ها متقارن و تک مدی است. از طرف دیگر تابع کواریانس نه تنها تابعی از فاصله زوج موقعیت‌ها است، بلکه به جهت قرارگیری موقعیت‌ها نیز بستگی ندارد. اما در عمل با موارد متعددی مواجه می‌شویم که داده‌ها غیر نرمال هستند، بگونه‌ای که توزیع داده‌ها شواهدی از چولگی، سنگینی دم‌ها و چندمدی را به نمایش می‌گذارد. بعلاوه عوامل مختلف از جمله شرایط جغرافیایی ناحیه مورد مطالعه ممکن است موجب نامانایی ساختار همبستگی شود. برای مدل‌سازی فرایندهای نامانای ناگوسی، می‌توان از رهیافت بیز ناپارامتری استفاده نمود. در این رهیافت، توزیع داده‌ها نامعلوم و تصادفی در نظر گرفته می‌شود. برای تعریف پیشین روی توزیع تصادفی می‌توان از فرایندهای چوب‌شکنی استفاده کرد [۷] و [۴]. در ضمن این رده از فرایندها شامل فرایند مهم و شناخته شده دیریکله [۱] است. حال اگر داده‌ها فضایی باشند آنگاه منطقی آن است که توزیع تصادفی به موقعیت فضایی وابسته شود. در اینجا روش‌های متداول وابسته نمودن اندازه‌های احتمال تصادفی به فضا برای مدل‌سازی میدان‌های تصادفی مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد.

## ۲. فرآیند دیریکله

فرایند دیریکله یک توسعه از توزیع دیریکله در فضای پیوسته است. توزیع دیریکله در نظریه احتمال و آمار یک توزیع پیوسته است. در واقع این توزیع یک توزیع چند پارامتری تعمیم یافته از توزیع بتا است. معمولاً از توزیع دیریکله به عنوان توزیع پیشین در استنباط بیزی استفاده می‌شود، چرا که این توزیع یک پیشین مزدوج<sup>۱</sup> برای پارامترهای توزیع چند جمله‌ای و توزیع رسته‌ای است. فرض کنید  $\chi$  یک فضای نمونه،  $\beta$  سیگما میدان بوردل مجموعه‌های  $\chi$  و  $G$  فضای تمامی اندازه‌های احتمال تعریف شده روی  $(\chi, \beta)$  باشد.

**تعریف ۱.۲.** فرض کنید  $\alpha$  یک مقدار حقیقی مثبت،  $F_0$  یک اندازه متناهی، نامنفی و غیر صفر روی فضای اندازه‌پذیر  $(\chi, \beta)$  و  $F(\cdot)$  یک فرایند اندیس‌گذاری شده بوسیله عناصر  $\beta$  است. گوئیم  $F$  یک فرایند دیریکله با پارامتر  $(\alpha, F_0)$  است و می‌نویسیم  $F \sim DP(\alpha F_0)$  هرگاه

- : الف)  $F(B)$  برای  $B \in \beta$ ، یک متغیر تصادفی باشد بگونه‌ای که مقادیرش را در بازه  $[0, 1]$  می‌گیرد.  
: ب) هر تحقق از  $F$  یک اندازه احتمال روی فضای اندازه‌پذیر  $(\chi, \beta)$  باشد.  
: ج) به ازای هر تعداد آفرزهای متناهی اندازه‌پذیر  $B_1, \dots, B_k$ ، برای  $k = 1, 2, \dots$ ، از  $\chi$   $B_i$  ها اندازه‌پذیر و مجزا بوده و  $\bigcup_{i=1}^k B_i = \chi$  بردار تصادفی  $(F(B_1), \dots, F(B_k))$  دارای توزیع دیریکله با پارامترهای  $(\alpha F_0(B_1), \dots, \alpha F_0(B_k))$  باشد.

در این تعریف  $\alpha$  پارامتر دقت<sup>۲</sup> و  $F_0$  اندازه مرکزی<sup>۳</sup> یا توزیع پایه<sup>۴</sup> فرآیند دیریکله نامیده می‌شود. [۷] تصویر دیگری از فرآیند دیریکله را در قالب قضیه زیر ارائه نموده و بر اساس آن می‌توان ثابت کرد که به طور قریب به یقین فرآیند دیریکله یک اندازه احتمال گسسته است.

قضیه ۰.۲.۲. (ستورامن، ۱۹۹۴) فرض کنید :

$$(۱) \quad V_1, V_2, \dots \text{ متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع از } \text{Beta}[\alpha, 1]$$

$$(۲) \quad Y_1, Y_2, \dots \text{ متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع از } F_0.$$

آنگاه

$$F \stackrel{d}{=} \sum_{j=1}^{\infty} p_j \delta_{\theta_j}$$

یک فرآیند دیریکله با پارامترهای  $(\alpha, F_0)$  است، که در آن  $p_i$ ها توابعی نزولی بر حسب امید ریاضی هستند که از فرآیند شکست چوب<sup>۵</sup> حاصل می‌شوند. در واقع  $p_1 = V_1$  و برای  $j > 1$ ،  $p_j = V_j \prod_{i=1}^{j-1} (1 - V_i)$ . حتی اگر  $F_0$  یک توزیع پیوسته باشد. [۷] این قضیه بیان می‌کند که اندازه احتمال تصادفی  $F$  با احتمال یک، اندازه احتمالی گسسته است، اما  $F_0$  یک توزیع پیوسته باشد. [۷] این ویژگی فرآیند دیریکله را در چارچوب فرآیند چوب‌شکنی نشان داد که روشی مهم برای تولید تحققاتی از فرآیند دیریکله شناخته می‌شود. پیشین چوب‌شکنی در حقیقت به عنوان تعمیمی از پیشین‌های فرآیند دیریکله [۱] شناخته می‌شود. پیشین فرآیند چوب‌شکنی در حالت کلاسیک (غیر فضایی) برای توزیع نامعلوم  $F$  بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$F(B) \stackrel{d}{=} \sum_{j=1}^m p_j \delta_{\theta_j}(B), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

که در آن،  $m$  تعداد مؤلفه‌های آمیخته،  $p_1, \dots, p_m$  وزن‌های چوب‌شکنی بوده و به صورت

$$p_1 = V_1, \quad p_j = V_j \prod_{i=1}^{j-1} (1 - V_i); j > 1$$

هستند که در آن  $V_j$ ها از توزیع  $\text{Beta}(a, b)$  تولید می‌شوند.  $\theta_1, \dots, \theta_m$  به عنوان اتم‌ها شناخته شده‌اند که از یک توزیع پایه  $F_0$  تولید می‌شوند.  $\delta_{\theta_j}(B)$  اندازه دیراک را نمایش می‌گذارد. با در نظر گرفتن  $m = \infty$  و همچنین  $V_j \sim \text{Beta}(1, b)$  این پیشین همان پیشین فرآیند دیریکله [۱] خواهد شد. این فرآیندها روی فضای نسبتاً گسترده‌ای از توابع توزیع تعریف می‌شوند. اما برای مدل‌سازی میدان‌های تصادفی فضایی سؤال این است که ”چگونه می‌توان وابستگی فضایی را در توزیع تصادفی اعمال نمود؟“ در بخش بعد به این سؤال اساسی پاسخ داده می‌شود.

### ۳. فرآیند چوب‌شکنی فضایی

معمولاً داده‌های فضایی به‌گونه‌ای هستند که هر یک از آن‌ها مقداری مشاهده شده از متغیر مورد مطالعه در یک موقعیت مجزا در فضای مورد نظر است. در این صورت به مجموعه متغیرهای تصادفی که برای مدل‌سازی این داده‌ها به کار می‌رود، میدان تصادفی و به هر نمونه‌ی کامل از آن، در اصطلاح یک تحقق از میدان تصادفی گویند. بنابراین فرض کنید  $(\Omega, F, P)$  یک فضای احتمال باشد، آنگاه میدان تصادفی فضایی به صورت  $Y(\cdot, \omega) = \{Y(s, \omega), s \in D \subseteq \mathbb{R}^d\}$  است. بعد فضا یعنی  $d$  معمولاً ۲ یا ۳ در نظر گرفته می‌شود که برای سهولت کار میدان تصادفی به صورت  $\{Y(s) : s \in D\}$  نمایش داده می‌شود. در چارچوب رهیافت بیزی ناپارامتری، توزیع  $Y(s)$  تصادفی فرض شده و لازم است توزیع پیشینی به آن نسبت داده شود. برای رسیدن به این هدف، از فرآیند چوب‌شکنی استفاده می‌شود. در ادامه سه روش لحاظ نمودن وابستگی فضایی در پیشین چوب‌شکنی توضیح داده می‌شود.

۱.۳. توزیع‌های تصادفی با اتم‌های فضایی. یکی از نخستین تلاش‌ها برای القای وابستگی فضایی در مدل‌های بیزی ناپارامتری مربوط به مدل [۲] است. آن‌ها فرآیند دیریکله فضایی<sup>۶</sup> را برای مدل‌بندی فرایندهای فضایی که نه گاوسی و نه مانا باشند به‌کار گرفتند. در این مدل هرچند توزیع پایه‌ای آن گاوسی و مانا فرض می‌شود اما فرایند به‌دست آمده نامانا و ناگاوسی است. فرض کنید  $\{Y(s) : s \in D\}$  میدان تصادفی فضایی و  $s^{(n)} = (s_1, \dots, s_n)$  موقعیت‌های فضایی روی ناحیه  $D$  باشد. همچنین به دلیل وجود مشاهدات تکراری در هر مکان میدان تصادفی فضایی به صورت  $Y_t = (Y_t(s_1), \dots, Y_t(s_n))$  برای  $t = 1, \dots, T$  نمایش داده می‌شود. برای اعمال همبستگی فضایی در توزیع تصادفی  $F(\cdot)$  فرض کنید  $Y_D \equiv \{Y(s) : s \in D\}$  است آنگاه می‌توان اتم‌ها را به تحقق‌هایی از میدان تصادفی تعمیم داد که به صورت  $\theta_{j,D} = \{\theta_j(s), s \in D\}$  نمایش داده می‌شود. هر  $\theta_{j,D}$  به عنوان تحقق از توزیع پایه  $F_\circ$  است که  $F_\circ$  یک میدان تصادفی گاوسی مانا فرض می‌شود. به عبارتی دیگر می‌توان گفت که هر  $\theta_{j,D}$  یک رویه بر روی ناحیه  $D$  است. بنابراین توزیع تصادفی به‌دست آمده برای  $Y_D$  با  $\sum_{j=1}^{\infty} p_j \delta_{\theta_{j,D}}$  نشان داده می‌شود و فرآیند دیریکله فضایی نام‌گذاری می‌شود. این فرایند دیریکله فضایی برای  $s^{(n)}$  یک اندازه احتمال تصادفی به‌صورت  $F^{(s^{(n)})}$  را برای  $(Y(s_1), \dots, Y(s_n))$  القا می‌کند. بنابراین می‌توان توزیع پایه  $F_\circ$  را به‌صورت  $F_\circ^{(s^{(n)})} \equiv F_\circ^{(n)}$  نشان داد. در این صورت چون  $F_\circ$  یک فرآیند گاوسی مانا است،  $F_\circ^{(n)}$  یک توزیع نرمال  $n$  متغیره است. بنابراین مدل را می‌توان به صورت

$$\begin{aligned} Y_t | F^{(n)} &\sim F^{(n)}, \quad t = 1, \dots, T, \\ F^{(n)} | \alpha &\sim DP(\alpha F_\circ^{(n)}) \end{aligned}$$

نوشته. تصویر فرآیند چوب‌شکنی مدل نیز به شکل  $F^{(n)} \stackrel{d}{=} \sum_{j=1}^{\infty} p_j \delta_{\theta_j}$  خواهد بود، که در آن  $\theta_j = (\theta_j(s_1), \dots, \theta_j(s_n))$  برای  $j = 1, 2, 3, \dots$  به طور مستقل از توزیع  $F_\circ^{(n)} \equiv N_n(\mathbf{0}_n, \sigma^2 H_n(\phi))$  پیروی می‌کنند. در این چارچوب اگر  $Z(s)$  متغیر پاسخ و  $Y(s)$  فرآیند سیگنال را نمایش دهد به گونه‌ای که  $Z(s) = Y(s) + \epsilon(s)$  که در آن  $\epsilon(s)$  فرآیند نوفه سفید با توزیع  $N(0, \tau^2)$  است، در این صورت توزیع توام  $Z = (Z(s_1), \dots, Z(s_n))$ ، آمیخته‌ای از نرمال‌ها به شکل  $\sum_{j=1}^{\infty} p_j N(\theta_j, \tau^2 I)$  می‌شود. در نتیجه این مدل انعطاف‌پذیری گسترده‌ای در تحلیل آماری داده‌های فضایی ارائه می‌نماید.

۲.۳. توزیع‌های تصادفی با وزن‌های فضایی. یکی از مدل‌ها برای اعمال وابستگی فضایی در وزن‌های توزیع تصادفی  $F(\cdot)$  مدل [۶] است که در چارچوب رهیافت بیزی ناپارامتری توزیع  $Y(s)$  را تصادفی فرض نمودند، یعنی  $Y(s) \sim F(s)$  که  $F(s)$  یک توزیع تصادفی است. در ادامه برای  $F(s)$  یک پیشین فرآیند چوب‌شکنی با وزن‌های فضایی به صورت  $\sum_{j=1}^m p_j(s) \delta_{\theta_j}$  در نظر گرفتند که در آن  $p_j(s) = V_j(s) \prod_{i < j} (1 - V_i(s))$ ،  $p_1(s) = V_1(s)$  همچنین برای  $V_j(s)$  یک ساختار هسته‌ای به شکل  $w_j(s) V_j$  اختیار کردند که در آن  $V_j \stackrel{i.i.d.}{\sim} \beta(a, b)$  و  $w_j(s)$  تابع هسته یکنواخت است که به صورت  $(|s_j - \psi_{ji}| < \frac{\epsilon_{ji}}{4})$  در نظر گرفته می‌شود. تابع هسته  $w_j(s)$  در گره‌های  $\psi_j$  متمرکز می‌شود و گستردگی آن با پارامتر پهنای باند  $\epsilon_j = (\epsilon_{1j}, \epsilon_{2j})$  کنترل می‌شود. گره‌ها و پهنای باند به‌عنوان پارامترهای نامعلوم مدل‌سازی می‌شوند و دارای پیشین‌هایی هستند که از  $\theta_j$  و  $V_j$  مستقل فرض می‌شوند. پهنای باند  $\epsilon_j$  را نیز می‌توان بصورت مساوی برای تابع هسته یا به صورت متغیر در توابع هسته و دارای توزیع‌های پیشین مدل کرد. بعلاوه اتم‌های  $\theta_j$ ،  $j = 1, \dots, m$  مستقل و هم‌توزیع از توزیع پایه  $F_\circ \equiv N_p(0, \Sigma)$  در نظر گرفته می‌شوند که در آن  $\Sigma$  یک ماتریس کواریانس  $p \times p$  است.

۳.۳. توزیع‌های تصادفی با اتم‌ها و وزن‌های فضایی. توسعه‌ای از مدل [۶] توسط [۲] ارائه شد، که این مدل نیازی به تکرار ندارد. در این مدل هم اتم‌ها و هم وزن‌ها دارای ساختار وابستگی فضایی هستند. بطور دقیق اتم‌ها دارای ساختار وابستگی فضایی روی گره‌ها هستند چون در این مدل فرض می‌شود که اتم‌ها یک میدان تصادفی گاوسی باشد اما وزن‌ها دارای ساختار همبستگی فضایی مانند [۶] باشند. میدان تصادفی فضایی  $Y(s)$  دارای پیشین چوب‌شکنی فضایی زیر است:

$$\eta(s) \sim F(s) \stackrel{d}{=} \sum_{j=1}^m p_j(s) \delta_{\theta(\varphi_j)} = \sum_{j=1}^m V_j(s) \prod_{i < j} [1 - V_i(s)] \delta_{\theta(\varphi_j)}$$

که در آن  $\{\theta(\varphi); \varphi \in D\}$  یک میدان تصادفی گاوسی با بردار میانگین صفر و ماتریس کواریانس  $\Sigma_\theta$  است. عناصر این ماتریس بصورت

$$Cov(\theta(\varphi_i), \theta(\varphi_j)) = \sigma(\varphi_i) \sigma(\varphi_j) \rho(|\varphi_i - \varphi_j|)$$

تعریف می‌شوند. که در آن  $\rho$  تابع همبستگی نمایی،  $\{\log(\sigma(\varphi)); \varphi \in D\}$  یک میدان تصادفی گاوسی باشد با بردار میانگین غیر صفری و تابع کواریانس نمایی و  $\varphi$  هاگره‌ها هستند که به‌عنوان پارامترها نامعلوم مانند مدل [۶] مدل سازی می‌شوند و دارای پیشین‌هایی یکنواخت مستقل روی دامنه فضایی هستند.

### بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله سه رویکرد متداول برای ساخت توزیع تصادفی وابسته به فضا برای مدل‌سازی میدان‌های تصادفی ارائه شد. رویکرد نخست که در آن تنها اتم‌ها وابسته به فضا در نظر گرفته می‌شوند نیازمند به داشتن تکرار در مسائل واقعی است. اما این موضوع، محدودیتی قابل توجه در پیاده‌سازی این رویکرد به شمار می‌رود. اما رویکردهای دوم و سوم که مبتنی بر روش هسته هستند، نیازمند به داشتن تکرار در مسائل آمار فضایی نیستند.

### مراجع

1. Ferguson, T. (1973), A Bayesian Analysis of Some Nonparametric Problems, *The Annals of Statistics*, 1(2), 209-230.
2. Fuentes, M., and Reich, B. (2013), Multivariate spatial nonparametric modelling via kernel processes mixing, *Statistica Sinica*, 23, 75-97.
3. Gelfand, A.E., Kottas, A., and MacEachern, S.N. (2005), Bayesian nonparametric spatial modeling with Dirichlet process mixing, *Journal of the American Statistical Association*, 100, 1021-1035.
4. Ishwaran, H., and James, L.F. (2001), Gibbs sampling methods for stick-breaking priors, *Journal of the American Statistical Association*, 96, 161-173.
5. MacEachern, S.N. (1999), Dependent Nonparametric Processes, *American Statistical Association Proceedings of the Section on Bayesian Statistical Science*, Alexandria, VA, USA.
6. Reich, B.J., and Fuentes, M. (2007), A multivariate semiparametric Bayesian spatial modeling framework for hurricane surface wind fields, *Annals of Applied Statistics*, 1, 249-264.
7. Sethuraman, J. (1994), A constructive definition of Dirichlet priors, *Statistica Sinica*, 4, 639-650.

پست الکترونیکی: [alitaghavirad@modares.ac.ir](mailto:alitaghavirad@modares.ac.ir)

پست الکترونیکی: [jafari-m@modares.ac.ir](mailto:jafari-m@modares.ac.ir)

## برآورد پیش آزمون و انقباضی بیزی پارامتر مقیاس در توزیع نمایی بر اساس داده‌های سانسور

زینب روغنی عراقی\*  
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه یزد، یزد، ایران  
و  
حجت‌اله ذاکرزاده  
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه یزد، یزد، ایران

چکیده. توزیع نمایی از توزیع‌های شناخته شده و پرکاربرد در حوزه مطالعات آنالیز بقا و نظریه قابلیت اعتماد است. در این مقاله برآورد پیش آزمون بیزی و خانواده‌ای از برآوردهای بیز انقباضی یک مرحله‌ای پارامتر مقیاس در توزیع نمایی بر اساس داده‌های سانسور نوع دوم ارائه می‌شود. مخاطره این برآوردها معیار مقایسه بین آنها است که بر اساس تابع زیان پایا-مقیاس به دست می‌آید. واژه‌های کلیدی: برآورد درست‌نمایی ماکسیمم، برآورد پیش‌آزمون، برآورد انقباضی، تابع زیان، تابع مخاطره. طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 62N10, 62501.

## ۱. پیش‌گفتار

توزیع نمایی یکی از پرکاربردترین توزیع‌ها در تحلیل طول عمر، آنالیز بقا و قابلیت اعتماد می‌باشد که تابع چگالی احتمال (pdf) و تابع توزیع تجمعی (cdf) این توزیع به ترتیب:

$$(۱) \quad f(x; \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} \quad x > 0, \theta > 0,$$

$$(۲) \quad F(x; \theta) = 1 - e^{-\frac{x}{\theta}} \quad x > 0, \theta > 0.$$

و با نماد  $X \sim \text{Exp}(\theta)$  نمایش داده می‌شود.

توزیع نمایی در موارد بسیاری از استنباط آماری درباره پارامترها در کنترل کیفیت و مسایل مهندسی مورد توجه می‌باشد. یکی از روش‌های پرکاربرد در مسایل قابلیت اعتماد و مهندسی، سانسور نوع دوم می‌باشد. برای مطالعه همه‌جانبه نمونه‌گیری سانسور نوع دوم به [۱] مراجعه نمایید.

بعضی اوقات محقق اطلاعات اولیه‌ای (غیرنمونه‌ای) درباره پارامتر نامعلوم  $\theta$  از تجربیات گذشته دارد که ممکن است کلی و در قالب یک توزیع پیشین باشد  $(\pi(\theta))$  و یا حدس اولیه در خصوص مقدار پارامتر به صورت نقطه‌ای  $(\theta_0)$  باشد. ترکیب این اطلاعات غیرنمونه‌ای با روش‌هایی بر اساس اطلاعات نمونه‌ای منجر به انواع برآورد برای  $\theta$  خواهد شد از جمله برآوردها، برآورد پیش‌آزمون، برآورد انقباضی بعد از یک آزمون اولیه یک مرحله‌ای و دومرحله‌ای که گاهی می‌تواند برآوردهای بیز نیز در آنها مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این مقاله، برآوردهای پیش‌آزمون، انقباضی یک مرحله‌ای بیزی بر اساس داده‌های سانسور برای پارامتر مقیاس توزیع نمایی معرفی و مورد مقایسه قرار می‌گیرند. معیار مقایسه تابع مخاطره آنها می‌باشد که بر اساس تابع زیان پایا-مقیاس  $L(d, \theta) = (\frac{d}{\theta} - 1)^2$  محاسبه می‌گردد.

در برآورد بیز از خانواده توزیع‌های پیشین به صورت  $\pi(\theta) = \frac{1}{\theta^m}, m, \theta > 0$ ، استفاده شده است که به ازای  $m = 1$  چگالی پیشین جفریز، برای  $m = 3$  پیشین هارتینگان و برای مقادیر بزرگ  $m$  (مثلاً  $m = 10$ ) آن را پیشین‌های ضعیف می‌نامند. برآوردهای انقباضی برای پارامتر مقیاس توسط باتاچاریا و سریواستارا [۲] در سال ۱۹۷۴، پاندی در سال ۱۹۹۷ [۳] مطرح شده است. پراکاش و سینگ در سال ۲۰۰۸ [۴] به برآوردیابی انقباضی بر اساس داده‌های سانسور شده تحت تابع زیان لاینکس پرداختند، همچنین آنها در سال ۲۰۰۹ [۵] از یک روش بیزی برای ساختن برآوردهای انقباضی در توزیع وایبل بر اساس داده‌های سانسور شده استفاده کردند.

در این مقاله برآورد پیش‌آزمون بیزی و انقباضی بیزی بر اساس داده‌های سانسور نوع دوم و تابع زیان پایا-مقیاس برای پارامتر توزیع نمایی مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

در بخش ۲ این مقاله ابتدا برآورد پیش‌آزمون بیزی برای پارامتر مقیاس توزیع نمایی معرفی و تابع مخاطره آن محاسبه می‌شود. در بخش ۳ برآورد انقباضی بیزی پس از آزمون و مقایسه آنها ارائه می‌گردد.

## ۲. برآورد پیش‌آزمون بیزی

فرض کنید  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  مقادیر سانسور شده از یک نمونه  $n$  تایی از توزیع نمایی (۱) است. تابع درستنمایی آن عبارت است از:

$$(3) \quad L(\theta; \mathbf{x}) = \frac{n!}{r!(n-r)!} \frac{1}{\theta^r} e^{-\frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^r x_i} e^{-(n-r)x_r} \quad \theta > 0$$

به سادگی دیده می‌شود که آماره  $T_r = \sum_{i=1}^r x_i - (n-r)x_r$ ، آماره بسنده می‌باشد. برآوردگر درستنمایی ماکزیمم ( $MLE$ ) از  $\theta$  به صورت

$$\hat{\theta}_{ML} = \frac{\sum_{i=1}^r X_i + (n-r)X_r}{r} = \frac{T_r}{r}$$

می‌باشد. می‌توان نشان داد که

$$W := \frac{2T_r}{\theta} \sim \chi^2_{(2r)}$$

که  $\chi^2_{(2r)}$  توزیع کای-دو با درجه آزادی  $2r$  است.

هدف این بخش پیدا کردن برآورد پیش‌آزمون بیزی برای  $\theta$  است. فرض می‌کنیم پژوهشگر از قبل حدس اولیه‌ای ( $\theta_0$ ) در مورد  $\theta$  بر اساس تجربه به دست آورده است. ابتدا این حدس اولیه به صورت زیر مورد آزمون قرار می‌گیرد.

$$H_0: \theta = \theta_0, \quad H_1: \theta \neq \theta_0,$$

ناحیه قبول با استفاده از آزمون نسبت درستنمایی در سطح  $\alpha$  به صورت زیر خواهد بود.

$$(4) \quad A = \left\{ \mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n); c_1 < \frac{2T_r}{\theta} < c_2 \right\}$$

که  $c_2 = \chi^2_{1-\alpha/2, 2r}$  و  $c_1 = \chi^2_{\alpha/2, 2r}$  می‌باشد.

برای معرفی برآورد پیش‌آزمون بیزی ابتدا برآوردگر بیز را تحت تابع زیان

$$(5) \quad L(d, \theta) = \left( \frac{d}{\theta} - 1 \right)^2$$

و توزیع پیشین شبه چگالی  $\pi(\theta) = \frac{1}{\theta^m}$ ,  $m, \theta > 0$ ، برای پارامتر  $\theta$  به دست می‌آوریم. توزیع پسین به صورت زیر می‌باشد.

$$\pi(\theta|X) \propto \frac{1}{\theta^m} \cdot \frac{1}{\theta^r} e^{-\frac{1}{\theta}(T_r)} = \frac{1}{\theta^{r+m}} e^{-\frac{1}{\theta}(T_r)}$$

همانطور که دیده می‌شود توزیع پسین، یک توزیع گامای معکوس با  $\alpha = r + m$  و  $\theta = \frac{1}{T_r}$  می‌باشد. برآوردگر بیز تحت تابع زیان (۵) برابر است با:

$$\hat{\theta}_B = \frac{E(\frac{1}{\theta}|\mathbf{X})}{E(\frac{1}{\theta^r}(\mathbf{X}))} = \frac{T_r}{r+m}$$

و در نتیجه برآورد پیش‌آزمون بیزی ( $\hat{\theta}_{Bpt}$ ) به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\hat{\theta}_{Bpt} = \begin{cases} \theta_0 & \mathbf{X} \in A \\ \hat{\theta}_B & \mathbf{X} \in \bar{A} \end{cases}$$

به عبارت دیگر  $\hat{\theta}_{Bpt} = \theta_0 I_A + \hat{\theta}_B (1 - I_A)$  که  $I_A$  تابع نشانگر روی مجموعه  $A$  است.

گزاره ۱۰۲. فرض کنید  $W = \frac{2T_r}{\theta}$  و  $A$  تعریف شده در (۴) باشد آنگاه:

$$A_j := E(W^j I_A) = \int_{c_1 \delta}^{c_2 \delta} w^j f(w) dw$$

که  $\delta = \frac{\theta_0}{2}$  و  $f(w)$  تابع چگالی توزیع کای-دو با درجه آزادی  $2r$  است.

لم ۲۰۲. تحت فرضیات گزاره (۱۰۲) برآوردگر بیز ( $\hat{\theta}_B = \frac{T_r}{r+m}$ ) دارای میانگین مربع خطا به صورت زیر است:

$$MSE(\hat{\theta}_B) = (\theta_0^2 - 2\theta\theta_0)A_0 + \frac{\theta^2}{m+r}A_1 - \frac{\theta^2}{4(m+r)^2}A_2 + \frac{\theta^2 r(r+1)}{m+r} - \frac{2\theta^2}{m+r} + \theta^2$$

قضیه ۳۰۲. فرض کنید  $\hat{\theta}_{Bpt}$  برآوردگر پیش‌آزمون بیزی معرفی شده در (۶) باشد آنگاه تابع مخاطره آن تحت تابع زیان (۵) به صورت زیر است.

$$R_{\hat{\theta}_{Bpt}}(\delta) = (\delta^2 - 2\delta)A_0 + \frac{1}{m+r}A_1 - \frac{1}{4(m+r)^2}A_2 + \frac{m^2+r}{(m+r)^2}$$

### ۳. برآورد انقباضی بیزی

اگر در برآورد پیش‌آزمون زمانی که فرضیه صفر ( $H_0: \theta = \theta_0$ ) پذیرفته شود به جای استفاده از  $\theta_0$ ، از ترکیب خطی  $\theta_0$  و  $\hat{\theta}_B$  استفاده شود برآوردگر انقباضی بیزی به دست می‌آید.

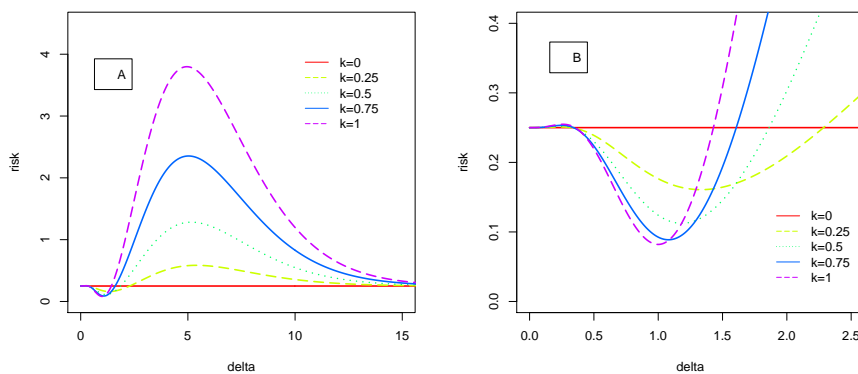
$$(7) \quad \hat{\theta}_{BSP}(k) = \begin{cases} k\theta_0 + (1-k)\hat{\theta}_B & \mathbf{X} \in A \\ \hat{\theta}_B & \mathbf{X} \in \bar{A} \end{cases}$$

به عبارت دیگر  $\hat{\theta}_{BS} = (k\theta_0 + (1-k)\hat{\theta}_B)I_A + \hat{\theta}_B(1-I_A)$  به طوری که  $0 \leq k \leq 1$  اگر  $k = 1$  باشد آنگاه  $\hat{\theta}_{BS}$  به  $\hat{\theta}_{Bpt}$  و اگر  $k = 0$  باشد آنگاه به  $\hat{\theta}_B$  تبدیل می‌شود.

قضیه ۱۰۳. برآورد تابع مخاطره برآوردگر  $\hat{\theta}_{BSP}(k)$  تحت تابع زیان (۵) برابر است با:

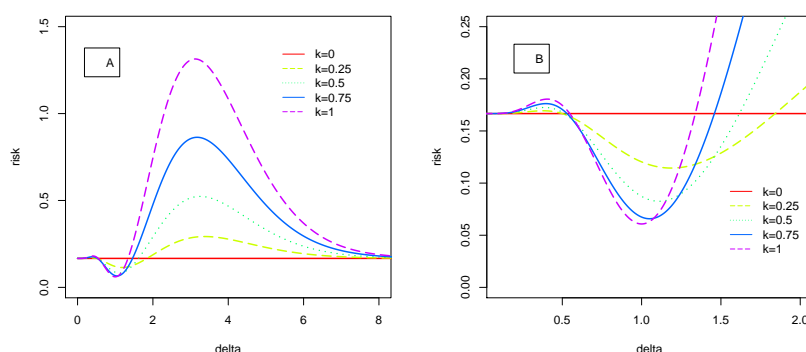
$$R_{\hat{\theta}_{BS}}(k, \delta) = (k^2\delta^2 - 2k\delta)A_0 + \frac{k + k(1-k)\delta}{m+r}A_1 + \frac{k^2 - 2k}{4(m+r)^2}A_2 + \frac{m^2+r}{(m+r)^2}$$

برای مقایسه عملکرد برآوردگرهای ارائه شده بر اساس مقادیر مختلف  $k$  و  $m = 1$  چند نمودار از مخاطره  $\hat{\theta}_{BS}(k)$  رسم شده است.



شکل ۱. نمودار تابع مخاطره  $\hat{\theta}_{BS}(k)$  برای  $r = 3$ ،  $\alpha = 0.1$  و چند مقدار  $k$





شکل ۲. نمودار تابع مخاطره  $\hat{\theta}_{BS}(k)$  برای  $r = 5$ ،  $\alpha = 0.1$  و چند مقدار  $k$

به وضوح پیدا است که تمام توابع مخاطره‌ها به اندازه نمونه  $r$  و سطح معنی‌داری  $\alpha$  بستگی دارد. در هر نمودار شکل  $B$  بزرگ شده شکل  $A$  در اطراف  $\delta = 1$  است. بازه‌هایی از  $\delta$  در اطراف ۱ که  $\hat{\theta}_{BS}(k_1)$  بر  $\hat{\theta}_{BS}(k_2)$  غلبه می‌کند برای بعضی مقادیر  $k_1$  و  $k_2$  در جدول برای  $\alpha = 0.1$  و  $r = 3, 5, 10$  آورده شده است. برای مثال اگر  $n = 5$  آنگاه  $\hat{\theta}_{BS}(1)$  (برآورد پیش‌آزمون بیزی) بر  $\hat{\theta}_{BS}(0)$  (برآورد بیز) در فاصله  $(0.67, 1.31)$  و بر  $\hat{\theta}_{BS}(0.25)$  در فاصله  $(0.71, 1.22)$  دارای مخاطره کمتری است. می‌بینیم که اگر مقدار صحیح  $\theta$  در نزدیکی حدس اولیه  $\theta$  (نزدیک ۱) باشد آنگاه برآورد پیش‌آزمون بیزی بر تمام برآوردهای انقباضی  $\hat{\theta}_{BS}(k)$  برای  $k = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1$  غلبه می‌کند. در جدول زیر نتایج بدست آمده را مشاهده می‌کنید.

جدول ۱. مقایسه برآورد انقباضی بیزی برای  $m = 1$  و  $\alpha = 0.1$  و چند مقدار  $k$  و  $r$

$r = 3$	$k_2 = 0$	$k_2 = 0.25$	$k_2 = 0.5$	$k_2 = 0.75$
$k_1 = 0.25$	(0.32, 2.28)			
$k_1 = 0.5$	(0.33, 1.86)	(0.34, 1.61)		
$k_1 = 0.75$	(0.34, 1.61)	(0.35, 1.43)	(0.37, 1.29)	
$k_1 = 1.0$	(0.35, 1.43)	(0.37, 1.29)	(0.38, 1.18)	(0.40, 1.08)
$r = 5$	$k_2 = 0$	$k_2 = 0.25$	$k_2 = 0.5$	$k_2 = 0.75$
$k_1 = 0.25$	(0.49, 2.12)			
$k_1 = 0.5$	(0.57, 1.66)	(0.63, 1.44)		
$k_1 = 0.75$	(0.62, 1.44)	(0.67, 1.32)	(0.71, 1.23)	
$k_1 = 1.0$	(0.67, 1.31)	(0.71, 1.22)	(0.75, 1.14)	(0.79, 1.07)
$r = 10$	$k_2 = 0$	$k_2 = 0.25$	$k_2 = 0.5$	$k_2 = 0.75$
$k_1 = 0.25$	(0.58, 1.84)			
$k_1 = 0.5$	(0.66, 1.48)	(0.72, 1.33)		
$k_1 = 0.75$	(0.72, 1.33)	(0.76, 1.24)	(0.79, 1.17)	
$k_1 = 1.0$	(0.76, 1.24)	(0.79, 1.17)	(0.83, 1.11)	(0.86, 1.06)

## مراجع

1. N. Balakrishnan and E. Cramer. *The Art of Progressive Censoring*, Springer Science+Business Media New York, 2014.
2. S.K. Bhattacharya and V.K. Srivastava, *A preliminary test procedure in life testing.*, Journal of the American Statistical Association, (1974), no. 69, 726-729.
3. B. N. Pandey, *Testimator of the scale parameter of the Exponential distribution using LINEX loss function*, Communication in Statistics - Theory and Methods. (1997), no. 26, 2191-2202.
4. G Prakash, D.C Singh, *A Bayesian shrinkage approach in Weibull type-II censored data using prior point information*, REVSTAT-Statistical Journal. (2009), no. 7, 171-178.
5. G Prakash, DC Singh, , *Shrinkage estimation in Exponential type-II censored data under LINEX Loss*, Journal of the Korean Statistical Society. (2008), no. 37, 53-61.

پست الکترونیکی: roghani96@yahoo.com

پست الکترونیکی: hzaker@yazd.ac.ir

## قیمت‌گذاری اختیار معامله آسیایی و راهبردهای پوشش ریسک (مورد مطالعاتی بورس اوراق بهادار تهران)

فهیمة سفیدفرد\*، سید محمد مهدی حسینی  
بخش ریاضی کاربردی، دانشکده ریاضی و رایانه، دانشگاه شهید باهنر، کرمان، ایران

چکیده. در این مقاله ابتدا نحوه قیمت‌گذاری اختیار معامله آسیایی به روش درخت دوجمله‌ای مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. سپس با اعمال این روش بر روی ۱۰ شرکت در بورس اوراق بهادار تهران، قیمت اختیار معامله آسیایی برای این شرکت‌ها برآورد شده و با بهره‌گیری از چند راهبرد پوشش ریسک، کارایی به کارگیری اختیار معامله آسیایی در بورس اوراق بهادار تهران مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است. **واژه‌های کلیدی:** قیمت‌گذاری اختیار معامله آسیایی، درخت دوجمله‌ای، راهبردهای پوشش ریسک. **طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]:** 91G20, 91G99.

### ۱. مقدمه

بورس‌های معتبر دنیا برای تنوع‌سازی در پرتفوی سرمایه‌گذاری و جذب سرمایه‌گذاران بیشتر اقدام به راه‌اندازی ابزارهای مالی جدید مانند ابزارهای مشتقه کرده‌اند تا سرمایه‌گذاران بتوانند بر اساس سلیقه خود در ابزارهای موجود سرمایه‌گذاری کنند. در ۲۰ سال گذشته بازارهای مالی رشد چشمگیری داشته‌اند و ابزارهای مالی به رشد آن‌ها کمک بسیاری کرده است. امروزه ابزارهای مشتقه، ستون سیستم‌های مالی هستند. ابزارهای مشتقه نوعی ابزار مالی است که ارزش آن‌ها وابسته به متغیر تصادفی مانند دارایی پایه است. دارایی پایه می‌تواند نفت خام، طلا، ارز، سهام و... باشد.

به طور کلی مشتقات انواع مختلفی دارند که از بین آن‌ها قراردادهای اختیار معامله دارای اهمیت بیشتری هستند و در بازارهای مالی بیشتر به کار می‌روند. بنابراین قیمت‌گذاری این قراردادها یکی از مسائل اساسی در ریاضیات مالی است. روش‌های مختلفی برای قیمت‌گذاری قراردادهای اختیار معامله وجود دارد یکی از این روش‌ها استفاده از درخت دوجمله‌ای می‌باشد. این مدل به شکل نمودار است و مسیرهای حرکت قیمت سهام را نشان می‌دهد.

اختیار معامله‌ها به انواع مختلفی از جمله اختیار معامله اروپایی، آمریکایی و آسیایی تقسیم‌بندی می‌شوند. در این مقاله با معرفی اختیار معامله آسیایی نحوه قیمت‌گذاری آن به روش درخت دوجمله‌ای مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین با در نظر گرفتن چند راهبرد پوشش ریسک، کارایی استفاده از اختیار معامله آسیایی در بورس اوراق بهادار تهران مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است. از جمله منابعی که به نحوه قیمت‌گذاری اختیار معامله آسیایی و مبحث پوشش ریسک توسط اختیار معامله‌ها پرداخته‌اند می‌توان به منابع [۵] و [۶] اشاره کرد.

### ۲. قیمت‌گذاری اختیار معامله آسیایی

مدل درخت دوجمله‌ای یک روش مفید و متداول برای قیمت‌گذاری اختیار معامله است. این مدل به صورت یک نمودار است و مسیرهای مختلفی را که احتمال دارد، سهام در طی عمر اختیار معامله طی کند، نشان می‌دهد. هنگام استفاده از مدل درخت دوجمله‌ای، از اصل ارزش‌گذاری تحت شرایط بی‌تفاوت نسبت به ریسک استفاده می‌شود. این اصل می‌گوید ارزش‌گذاری مشتقاتی که وابسته به قیمت سهام هستند، با فرض اینکه در شرایط بی‌تفاوت نسبت به ریسک هستند، صورت می‌گیرد.

در حالت کلی سهمی در نظر بگیرید که قیمت آن در حال حاضر  $s$  و قیمت جاری اختیار معامله آن  $f$  باشد. فرض کنید که طول عمر اختیار معامله تا زمان سررسید  $T$  باشد و در این فاصله زمانی، قیمت اولیه سهام از مقدار  $s$  افزایش پیدا کرده و به  $s_u$  برسد یا اینکه قیمت سهام تنزل یافته و به مقدار  $s_d$  برسد. به طور کلی  $u > 1$  و  $d < 1$  است.

همچنین اگر قیمت سهام از  $s$  به  $s_u$  یک حرکت رو به بالا داشته باشد، ارزش اختیار معامله برابر  $f_u$  است و اگر قیمت سهام از  $s$  به  $s_d$  یک حرکت رو به پایین داشته باشد، ارزش اختیار معامله برابر  $f_d$  است. احتمال حرکت رو به بالا برابر با  $p$  و احتمال حرکت رو به پایین برابر  $1 - p$  می‌باشد. مقادیر  $u$ ،  $p$  و  $d$  به صورت زیر برآورد می‌شوند.

$$p = \frac{a - d}{u - d}, u = e^{\sigma\sqrt{\delta t}}, d = e^{-\sigma\sqrt{\delta t}}$$

که در آن:

$$a = e^{r\delta t}$$

از متغیر  $a$  به عنوان عامل رشد یاد می‌شود.  $\delta t$  طول گام زمانی در درخت دوجمله‌ای،  $\sigma$  میزان نوسان سهم و  $r$  نرخ بهره بدون ریسک می‌باشد.

مدل درخت دوجمله‌ای روشی مفید و متداول برای قیمت‌گذاری اختیار معامله از جمله اختیار معامله آسیایی می‌باشد. مسئله مهم در قیمت‌گذاری اختیار معامله آسیایی به روش درخت دوجمله‌ای، زیاد بودن تعداد مسیرهای منتهی به گره ردیف آخر و در نتیجه تعداد زیاد میانگین قیمت در گره می‌باشد که محاسبه همه آن‌ها کار را با مشکل روبرو می‌کند. هال و وایت [۴] برای حل این مشکل الگویی را معرفی می‌کنند که در آن تعدادی قیمت میانگین نماینده در فاصله حداکثر و حداقل میانگین قیمت در هر گره تعیین می‌شود و به جای کار کردن با تمام حالات ممکن، بر اساس این قیمت‌های نماینده کار می‌کنند.

روش کار به این شکل است که ابتدا برای هر گره باید حداقل و حداکثر میانگین موجود را به دست آورد. مسیر قیمتی مربوط به میانگین قیمت حداکثر برای هر گره  $(N(i, j))$  برابر است با  $j$  حرکت متوالی رو به بالا و سپس  $i - j$  حرکت متوالی رو به پایین. حداقل میانگین ممکن برای هر گره از عکس مسیر بالا به دست می‌آید. با استفاده از معادله‌های زیر می‌توان مقدار میانگین حداکثر و حداقل در هر گره را محاسبه کرد.

$$A_{max}(i, j) = \frac{s_0(1 + u + u^2 + \dots + u^j + u^j d + u^j d^2 + \dots + u^j d^{i-j})}{(i + 1)},$$

$$A_{min}(i, j) = \frac{s_0(1 + d + d^2 + \dots + d^{i-j} + d^{i-j} u + d^{i-j} u^2 + \dots + d^{i-j} u^j)}{(i + 1)}.$$

بعد از بدست آوردن حداکثر و حداقل میانگین در هر گره، فاصله بین این دو عدد به  $M$  فاصله مساوی تقسیم شده و میانگین‌های نماینده از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$A(i, j, k) = \frac{M - K}{M} A_{max}(i, j) + \frac{K}{M} A_{min}(i, j) \quad (k = 0, \dots, M).$$

هر چه  $M$  بزرگتر باشد، تعداد میانگین‌های نماینده بیشتر و ارزش‌گذاری با دقت بیشتر و در زمان بیشتری انجام می‌شود. در مرحله آخر، ارزش اختیار معامله برای همه میانگین‌های نماینده در گره‌های انتهایی محاسبه می‌شود و با استفاده از حرکت عقب‌گرد، سایر ارزش‌های اختیار معامله نیز به دست می‌آید. برای میانگین‌هایی که نقاط متناظر آن‌ها بین میانگین‌های نماینده وجود ندارد، از درون‌یابی خطی استفاده می‌شود [۱].

در ادامه قیمت اختیار معامله آسیایی ۱۰ شرکت در بورس اوراق بهادار تهران به روش درخت دوجمله‌ای محاسبه شده است و سود (زیان) استفاده از آن‌ها برآورد شده است. نتایج حاصله در جدول (۱) نشان داده شده است. در اینجا برای هر شرکت اختیار معامله آسیایی ۶ ماهه طی دوره زمانی ۱۳۹۷/۰۲/۰۱ تا ۱۳۹۷/۰۸/۰۱ در نظر گرفته شده است.  $s_0$  قیمت پایانی تعدیل شده سهم در روز شروع قرارداد و  $k$  قیمت توافقی یا اعمال می‌باشد که با مقدار  $s_0$  برابر گرفته شده است.  $ST$  میانگین قیمت‌های پایانی تعدیل شده سهم در طول دوره اختیار معامله می‌باشد. نرخ بهره بدون ریسک سالانه ۲۰ درصد و نوسان مربوط به هر سهم، یعنی  $\sigma$ ، با استفاده از داده‌های تاریخی برآورد شده است [۲].

جدول ۱. نتایج تعیین قیمت اختیار معامله آسیایی به روش درخت دوجمله‌ای برای ۱۰ شرکت در بورس اوراق بهادار تهران

نماد	$s_0 = k$	$\sigma$	$ST$	قیمت اختیار معامله خرید	قیمت اختیار معامله فروش	سود (زیان) خرید اختیار خرید	سود (زیان) خرید اختیار فروش
اخابر	۱۵۳۴۴۹	۴۰	۱۶۶۳۶۰۹	۱۵۴۹۶۸	۶۷۰۵۵	-۶۷۰۵۵	-۶۷۰۵۵
سفارس	۹۴۲۰۲	۵۳	۱۳۲۱۶۳۸	۸۳۵۰۹	۶۱۰۲۸	۲۹۶۱۰۹	-۶۱۰۲۸
شاراک	۲۵۰۹۹۸	۶۰	۳۸۰۶۱۹۳	۳۲۷۷۴۰	۲۱۶۱۶۷	۹۶۸۴۷۳	-۲۱۶۱۶۷
شیندر	۶۶۴۰۳۶	۶۰	۹۲۷۶۰۷۸	۸۶۷۰۶۶	۵۰۵۶۰۱	۱۷۶۸۶۵۲	-۵۰۵۶۰۱
حکشتی	۳۶۰۳۳۲	۴۳	۳۶۰۳۵۱۳	۳۶۴۶۸۳	۱۷۸۲۹۶	-۶۴۴۹	-۱۷۸۲۹۶
خودرو	۲۴۵۰۳۶	۴۶	۲۳۷۷۰۹۶	۲۶۰۵۳۳	۱۳۰۸۷	-۲۶۰۵۳۳	-۵۷۶۰۶
رانفور	۷۶۹۳۲۱	۴۱	۹۲۳۸۴۹۸	۷۵۲۰۷۳	۳۴۸۶۷۳	۷۹۴۲۱۵	-۳۴۸۶۷۳
غالیر	۱۳۰۹۰۱	۵۸	۱۵۱۹۶۳	۱۶۶۳۵۱	۹۵۴۲۴	۴۴۲۶۹	-۹۵۴۲۴
فولاد	۱۴۸۹۹۷	۴۸	۲۴۰۸۴۱۴	۱۷۱۶۸۶	۸۴۴۱۴	۷۴۶۷۵۸	-۸۴۴۱۴
وصندوق	۱۳۹۴۶	۵۲	۱۸۲۴۰۷۱	۱۶۲۷۲۰	۸۸۰۵۷	۲۶۶۷۵۱	-۸۸۰۵۷

### ۳. استفاده از اختیار معامله آسیایی در پوشش ریسک

گاهی سرمایه‌گذاران برای مصون ماندن از ریسک و بدست آوردن سود به طور همزمان به خرید و فروش قرارداد اختیار معامله خرید و اختیار معامله فروش می‌پردازند. این روش‌ها به دو دسته راهبردهای ترکیبی متقارن و نامتقارن تقسیم می‌شوند. راهبردهای ترکیبی

مقارن شامل خرید و فروش ترکیب‌های مختلف هر دو قرارداد اختیار خرید و قرارداد اختیار فروش است. راهبردهای ترکیبی نامقارن شامل خرید و فروش دو یا چند قرارداد اختیار معامله از یک نوع (اختیار خرید یا اختیار فروش) است. از انواع این راهبرد می‌توان به راهبرد نامقارن خوش‌بینانه، راهبرد نامقارن بدبینانه و راهبرد نامقارن پروانه‌ای اشاره کرد.

در راهبرد نامقارن خوش‌بینانه، یک قرارداد اختیار معامله فروش با قیمت توافقی پایین  $k_1$  خریداری می‌شود و هم‌زمان یک قرارداد اختیار معامله فروش دیگر به قیمت توافقی بالاتر  $k_2$  ( $k_2 > k_1$ ) به فروش می‌رسد. در این راهبرد، هر دو اختیار معامله دارای تاریخ انقضای یکسانی هستند. در راهبرد نامقارن بدبینانه، یک قرارداد اختیار معامله فروش با قیمت توافقی  $k_2$  خریداری می‌شود و هم‌زمان یک اختیار معامله فروش دیگر با قیمت توافقی کمتر  $k_1$  ( $k_1 < k_2$ ) به فروش می‌رسد. در این راهبرد، هر دو اختیار معامله دارای تاریخ انقضای یکسانی هستند. در راهبرد نامقارن پروانه‌ای، یک اختیار معامله فروش با قیمت توافقی پایین  $k_1$  و نیز یک اختیار معامله فروش دیگر با قیمت توافقی بالاتر  $k_2$  ( $k_2 > k_1$ ) خریداری می‌شود و دو اختیار معامله فروش دیگر با قیمت توافقی  $k_2$  به فروش می‌رسند.  $k_2$  میانگین  $k_1$  و  $k_3$  می‌باشد و به قیمت جاری سهام نزدیک است [۲].

در اینجا راهبردهای ترکیبی نامقارن با استفاده از اختیار معامله آسیایی بر روی ۱۰ شرکت در بورس اوراق بهادار تهران اعمال شده است و بیش‌ترین و کم‌ترین عایدی خالص آن در جدول (۲) آورده شده است.

جدول ۲. عایدی خالص راهبردهای ترکیبی نامقارن

نماد	بیشترین عایدی خوش‌بینانه	کمترین عایدی خوش‌بینانه	بیشترین عایدی بدبینانه	کمترین عایدی بدبینانه	بیشترین عایدی پروانه‌ای	کمترین عایدی پروانه‌ای
اخیر	۱۵۹۷۴	-۳۴۹۵۳۶	۳۱۹۸۷۴	-۱۴۶۱۶	۳۱۶۹۲۶	۱۳۶۲۷
سفارس	۳۶۱۴۹	-۵۲۱۸۳۱	۴۱۳۳۸۴	-۲۸۶۳۶	۵۸۷۳۵	-۵۰۱
شاراک	۵۱۰۸۵	-۹۴۸۹۱۵	۸۹۸۳۸۸	-۱۰۱۶۱۲	۵۳۱۹۳	۶۷۲۵۷
شبنر	۱۴۱۵۹۴	-۱۷۱۸۰۴۶	۲۷۶۱۵۷۸	-۲۲۸۴۲۲	۱۹۱۶۹۸۶	۵۰۱
حکشتی	۴۵۱۶۹	-۹۵۴۸۳۱	۹۴۸۰۸	-۵۱۹۲	۵۲۹۹۳	۶۷۵۱
خودرو	۵۳۴۱۸	-۹۴۶۵۸۲	۹۴۶۵۹۵	-۵۳۴۰۵	۵۳۰۸۱	-۵۱۲
رانفور	۹۰۶۴۵	-۱۹۰۹۳۵۵	۱۹۰۹۳۵۵	-۹۰۶۴۵	۵۰۷	۰
غالیر	۷۲۸۹۷	-۹۲۷۱۰۳	۲۸۶۴۸۳	-۲۲۵۲۷	۱۳۵۲۳	۲۰۲۲۹
فولاد	۵۶۷۲۲	-۹۴۳۲۷۸	۴۶۲۲۱۷	-۲۷۷۵۳	۲۲۴۸۱۸	-۵۰۶
و صندوق	۶۳۱۴۲	-۹۳۶۸۵۸	۳۶۹۶۸۵	-۲۴۹۱۵	۱۲۷۸۵۴	-۵۰۲

نتایج جدول (۲)، دورنمایی از استفاده اختیار معامله آسیایی برای اتخاذ پوشش ریسک در سرمایه‌گذاری در هر یک از ۱۰ شرکت منتخب را نشان می‌دهد. با استفاده از این نتایج سرمایه‌گذارانی که دارای دید خوش‌بینانه نسبت به آینده سهم هستند درمی‌یابند که خرید یا انتشار اختیار معامله آسیایی برای هر یک از این شرکت‌ها چه آینده‌ای را می‌تواند رقم بزند. این مطلب برای سرمایه‌گذارانی که دید کاهشی یا دید نوسانی به قیمت سهام هر یک از این شرکت‌ها را در آینده دارند نیز صادق خواهد بود.

#### ۴. نتیجه‌گیری

اختیار معاملات ابزارهای مناسبی برای پوشش ریسک هستند و با استفاده از آن‌ها امنیت سرمایه‌گذاری ارتقا می‌یابد. در این مقاله اختیار معامله آسیایی معرفی و نحوه قیمت‌گذاری آن توسط روش درخت دوجمله‌ای شرح داده شده است. همچنین جهت بررسی کارایی استفاده از این نوع اختیار معامله‌ها در بازار بورس ایران، ۱۰ شرکت فعال و معتبر از صنایع مختلف در بورس اوراق بهادار تهران انتخاب و نوسان‌پذیری سهام این شرکت‌ها و سایر پارامترهای لازم با استفاده از داده‌های تاریخی این شرکت‌ها محاسبه شده‌اند. نتایج استفاده از اختیار معامله آسیایی بر روی این شرکت‌ها در جدول (۱) آمده که این نتایج نشان‌دهنده کارایی استفاده از این نوع از اختیار معامله‌ها در خصوص این شرکت‌ها می‌باشد. همچنین جدول (۲) نتایج حاصل از به‌کارگیری اختیار معامله آسیایی در راهبردهای ترکیبی پوشش ریسک را نشان می‌دهد که نتایج حاصل می‌تواند در تصمیم‌گیری مربوط به پوشش ریسک مورد استفاده قرار گیرد. نکته‌ی قابل‌تأمل در اینجا نحوه تعیین مقادیر مختلف قیمت سررسید اختیار معامله آسیایی در راهبردهای مختلف پوشش ریسک می‌باشد که می‌تواند موضوع تحقیق در آینده باشد.

#### مراجع

۱. آ. پیش‌بهار، م. باغستانی و ق. دشتی، کاربرد درخت دوجمله‌ای در تعیین قیمت اختیار معامله آسیایی و محاسبه پارامترهای حساسیت ریسک، نشریه اقتصاد و توسعه کشاورزی، ۳۲ (۱۳۹۷)، شماره ۱، ۱-۱۶.
۲. ف. سفیدفرد، قیمت‌گذاری اختیار معامله به روش درخت دوجمله‌ای، پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضیات مالی، دانشگاه شهید باهنر کرمان، دانشکده ریاضی و رایانه، بهمن ۱۳۹۷.
۳. ع. نبوی‌چاشمی، بررسی راهبردهای ترکیبی نامقارن در دادوستد اختیار فروش سهام جهت مدیریت ریسک و تحلیل فرصت‌های سودآوری در بورس اوراق بهادار تهران، فصلنامه علمی پژوهشی دانش مالی تحلیل اوراق بهادار، ۷ (۱۳۹۳)، شماره ۲۲، ۱-۱۴.
4. J. Hull and A. White, Efficient procedures for valuing European and American path-dependent options, The Journal of Derivatives, 1 (1993) 21-31.

5. K. S. Moon, Y. Jeong, and H. Kim. An efficient binomial method for pricing Asian options. Economic Computation and Economic Cybernetics studies and Research 2 (2016) 151-164.
6. Z. Qin Z and X. Li, Expected payoff of Trading Strategies Involving European Option for Fuzzy Financial Market, Iranian Journal of Fuzzy Systems, 8 (2011) 81-94.

پست الکترونیکی: [fahime.sefidfard64@yahoo.com](mailto:fahime.sefidfard64@yahoo.com)  
پست الکترونیکی: [mhosseini@uk.ac.ir](mailto:mhosseini@uk.ac.ir)

## ارائه رویکردی جدید برای پیش بینی مدل بازه‌ای سری‌های زمانی

محمد عبدالله زاده بالانجی \*

دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی، دانشگاه صنعتی ارومیه، ارومیه، ایران

اتابک باقرزاده هوشمندی

استادیار گروه ریاضی، دانشگاه صنعتی ارومیه، ارومیه، ایران

و پرپسا نباتی

استادیار گروه ریاضی، دانشگاه صنعتی ارومیه، ارومیه، ایران

چکیده. پیش بینی قیمت سهام یکی از مهم‌ترین رکن‌های ریاضیات مالی است. اکثر مدل‌های موجود در بازارهای مالی بر پایه قیمت پایانی روزانه سهام بدست آمده‌اند. این مقاله، قیمت‌های بیشینه، کمینه و پایانی روزانه سهام در مدل بازه ای را مورد بررسی قرار می‌دهد. بدین منظور فرایند به‌صورت مسیر پیوسته در نظر گرفته شده و از مدل نوسانات تصادفی در شبیه سازی استفاده می‌شود. نهایتاً با شبیه سازی ۵۰ سهم پایه از بازار بورس تهران با رویکرد جدید و مقایسه آن با مدل‌های قبلی، کارایی و دقت روش مورد مقایسه قرار می‌گیرد. **واژه‌های کلیدی:** سری‌های زمانی، پیش بینی، معادلات دیفرانسیل تصادفی. **طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]:** 91B84, 62M10, 60H10.

### ۱. مقدمه

تاکنون مدل‌های زیادی برای پیش بینی داده‌های مالی ارائه شده اند که اغلب بر پایه قیمت پایانی می باشند. در حالی که انجام این مورد باعث نادیده گرفتن اطلاعات مهمی از جمله اطلاعات درون روزانه می باشد. یکی از روش های مناسبی که بتوان به‌وسیله آن اطلاعات دیگر یک سهم را وارد کرد، مدل برداری اتورگرسیون (VAR) می باشد. با این وجود مسئله مهم نویز است که می‌تواند موجب ایجاد تفاوت بین مقدار پیش بینی شده و مقدار واقعی شود. برای کنترل این موضوع، بیلارد و دایدی [۲، ۳] فرایند را با در نظر گرفتن میانگین، واریانس و کوواریانس در تحلیل رگرسیون که بر پایه مشاهدات است را پیشنهاد می کنند. نئو و کاروالو [۶] مدل های اتورگرسیون را به فرایند های مرکز و شعاع به طور جداگانه مطابق می کنند. همچنین می‌توانیم که همبستگی بین مرکز و شعاع را در این حالت نادیده بگیریم. آریو و همکارانش [۱] مدل برداری اتورگرسیون را براساس فرایند مرکزی تفاضل مرتبه اول و فرایند شعاع در نظر می گیرند. به طور مشابه، رادگیوس و سالیس [۷] بازده های مرکزی را معرفی می کنند که تفاضل بین مقدارهای مرکز بازه و طول بازه از فاصله زمانی قبلی است. آن‌ها شعاع میانی مدل اتورگرسیون آستانه ای (CR - SETAR) را پیشنهاد می کنند. در این مقاله از معادله دیفرانسیل تصادفی برای مشخص کردن این مسیر پیوسته استفاده می کنیم. به منظور ساخت تابع درست نمایی بیشینه و پایانی (اگر فرایند یک حرکت براونی استاندارد باشد)، از اصل بازتاب و قضیه Girsanov [۵] استفاده می کنیم.

### ۲. مدلسازی ریاضی

می‌دانیم که داده های روزانه با فراوانی زیاد، در  $t$  اُمین روز، از معادله دیفرانسیل تصادفی زیر پیروی می کند [۴]:

$$(1) \quad dY_t = \mu dt + \sigma dW_t \quad i-1 < t < i,$$

که در آن  $W_t$  یک حرکت براونی استاندارد است. در این مطالعه، فرض می کنیم که تمامی داده‌ها نامعلوم هستند، به جز مولفه های نماد  $X_i = (O_i, U_i, L_i, C_i)$  به عنوان بردار تصادفی مشاهده شده در  $t$  اُمین روز، که در آن  $O_i, U_i, L_i, C_i$  به ترتیب قیمت باز شدن، بیشینه، کمینه و قیمت پایانی است. بیشینه و کمینه مقادیر را با  $U_i = \max_{i-1 < t < i} Y(t)$  و  $L_i = Y_t \min_{i-1 < t < i}$  به دست می آوریم. با به کار بردن قضیه Girsanov به  $Y_t$  و ارتباط بین قیمت بیشینه و پایانی در [۸، قضیه ۳.۷.۳] بیان شده است، نتیجه زیر را داریم:

**قضیه ۱.۲.** فرض کنید که قیمت لگاریتم گرفته شده  $Y_t$ ، در معادله دیفرانسیل تصادفی (۱) صدق می کند، و فرض کنید که  $OddO_i = Y_{i-1}$  و  $CddC_i = Y_i$ ،  $UddU_i = \max_{i-1 < t < i} Y_t$  باشد. پس چگالی توام  $(U, C)$  با شرط اینکه  $O = o$  برابر است با:

$$(2) \quad f_{U,C|O}(u,c|o) = \frac{2(2u-o-c)}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} \exp \left\{ -\frac{(2u-o-c)^2}{2\sigma^2} - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} + \frac{(c-o)}{\sigma^2} \right\} u \geq l, u \geq l$$

\* ارائه دهنده

که بر اساس لگاریتم قیمت کمینه و پایانی تابع چگالی احتمال است. به طور مشابه، ما می توانیم توزیع توام مقادیرهای کمینه و پایانی را بدست آوریم :

**قضیه ۲.۲.** فرض کنید که لگاریتم قیمت  $Y_t$ ، در معادله دیفرانسیل تصادفی (۱) صدق می کند، و فرض کنید  $OddO_i = Y_i$ ،  $CddC_i = Y_i$  و  $LddL_i = \min_{i_1 < t < i} Y_t$  باشد. پس چگالی توام  $(L, C)$  با شرط اینکه  $O = o$  برابر است با :

$$(۳) \quad f_{L,C|O}(l,c|o) = \frac{\gamma(o+c-\gamma l)}{\sqrt{\gamma\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{(o+c-\gamma l)^2}{\gamma\sigma^2} - \frac{\mu^2}{\gamma\sigma^2} + \frac{\mu(c-o)}{\sigma^2} \right\}$$

که  $c \geq l$ ،  $o \geq l$  به علاوه، اگر  $W_t^l = W_s \inf_{o \leq s \leq t}$  و  $W_t^u = W_s \sup_{o \leq s \leq t}$  باشد، توزیع توام  $W_t^l(W_t W_t^u)$  عبارت اند از :  $(a \leq o, b \geq o)$

$$(۴) \quad P_{W_t, W_t^u, W_t^l}(a \leq W_t^l \leq W_t^u \leq b, W_t \in dx) = \frac{1}{\sqrt{\gamma\pi t}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[ \exp \left( -\frac{1}{\gamma t} (x - \gamma k(b-a))^2 \right) \exp - \frac{1}{\gamma t} (x - \gamma b - \gamma k(b-a))^2 \right] dx,$$

**گزاره ۳.۲.** فرض می کنیم شرایط قضیه ۱.۲ و قضیه ۲.۲ برقرار باشد. فرض کنید  $X_i = (O_i, U_i, L_i, C_i)$  به ازای  $i = 1, \dots, n$  اگر داده های مشاهده شده در  $i$  آمین روز برای  $Y$  باشد. تابع درست نمایی  $(\mu, \sigma^2)$  بر اساس قضیه ۱.۲ به صورت زیر بدست می آید :

$$(۵) \quad L(\mu, \sigma^2 | \vec{u}, \vec{o}, \vec{c}) = \prod_{i=1}^n \frac{\gamma(\gamma u_i - o_i - c_i)}{\sqrt{\gamma\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{(\gamma u_i - o_i - c_i)^2}{\gamma\sigma^2} - \frac{\mu^2}{\gamma\sigma^2} + \frac{\mu(c_i - o_i)}{\sigma^2} \right\},$$

که  $\vec{c} = (c_1, \dots, c_n)$  و  $\vec{o} = (o_1, \dots, o_n)$ ،  $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)$  می باشد.

$\mu$  و  $\sigma^2$  برابر است با

$$(۶) \quad \hat{\mu}_u = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (C_i - O_i),$$

$$(۷) \quad \hat{\sigma}_u^2 = \frac{1}{\gamma n} \sum_{i=1}^n (\gamma U_i - C_i - O_i)^2 - \frac{1}{\gamma} \hat{\mu}_u^2.$$

و بطور مشابه با استفاده از قضیه ۲.۲ می توانیم نشان دهیم که:

$$(۸) \quad \hat{\mu}_l = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (C_i - O_i),$$

$$(۹) \quad \hat{\sigma}_l^2 = \frac{1}{\gamma n} \sum_{i=1}^n (C_i - O_i - \gamma L_i)^2 - \frac{1}{\gamma} \hat{\mu}_l^2.$$

چون  $\hat{\mu}_u = \hat{\mu}_l$  می باشد، برای سادگی، از  $\hat{\mu}$  به جای  $\hat{\mu}_u$  و  $\hat{\mu}_l$  استفاده می کنیم.

### ۳. مدل نوسانات تصادفی

مدل نوسانات تصادفی را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$(۱۰) \quad \begin{cases} dY_t = \mu dt + \sigma_t dW_t, & Y_o = O, \\ d\sigma_t^2 = b(\sigma_t^2) dt + \sqrt{v(\sigma_t^2)} dB_t, & \sigma_o^2 = \xi, \end{cases}$$

که در آن  $(B_t, W_t)_{t \geq 0}$  یک حرکت براوانی استاندارد دو بعدی است و  $O$  همان لگاریتم قیمت باز شدن است و  $\xi$  یک متغیر تصادفی از توزیع پایدار  $\sigma_t^2$  و مستقل از  $(B_t, W_t)$  می باشد ما یک مدل خاص را مطالعه می کنیم که برای  $i = 1, \dots, n$  نوسانات  $\sigma_t^2$  در فرایند انتشار زیر صدق می کند :

$$(۱۱) \quad \sigma_i^2 = \sigma_{i-1}^2 + \rho \left( \frac{\beta}{\alpha - 1} - \sigma_{i-1}^2 \right) + \frac{\gamma \rho \sigma_{i-1}^2}{\alpha - 1} \tilde{Z}_i, \quad \sigma_o^2 = \xi,$$

که در آن  $\bar{Z}_l, n, i = 1, \dots, n$  متغیر تصادفی نرمال استاندارد هستند. توزیع پایدار  $\sigma_t^2$ ، توزیع گامای معکوس است. پس، با توجه به نوسان  $\sigma_t^2$  در روز  $i$ ، قیمت درون روزانه  $Y_t$  در روز  $i$ ، در مدل نوسانات تصادفی زیر صدق می کند:

$$(12) \quad Y_{i+j\Delta} = Y_{i+(j-1)\Delta} + \mu\Delta + \sigma_i Z_j, \quad j = 1, \dots, m,$$

که در آن  $\bar{Z}_l, m, j = 1, \dots, m$ ، مستقل بوده و معمولاً توزیع نرمال با میانگین صفر و با انحراف معیار  $\Delta = m^{-1}$  است. یعنی، ما فرض می کنیم که در هر روز  $m$  لگاریتم قیمت وجود دارد. برای سادگی، ما بیشتر فرض می کنیم که  $Z$  مستقل هستند. پس چگالی توام  $(U, L, C)$  را می توان با استفاده از روش Bayesian به شکل زیر بدست آورد:

$$f_{U,L,C|O}(u, l, c|o) = \int f_{U,L,C|O}(u, l, c|o, s) f_{\sigma}(s) ds.$$

#### ۴. شبیه سازی عددی

برای مقایسه، ما برآوردگر درست نمایی بیشینه را برای  $\sigma^2$  براساس قیمت پایانی زمان گسسته ارائه شده در نظر می گیریم:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^n (R_i - \bar{R})^2$$

که در آن  $R_i = C_i - C_{i-1}$  لگاریتم بازگشت قیمت پایانی و  $\bar{R} = (n-1)^{-1} \sum_{i=2}^n R_i$  هستند. پس از ۵۰ بار تکرار، و تعریف خطای نسبی به صورت

$$(13) \quad RE = \frac{RMSE}{True \ value}$$

که در آن RMSE نماد مربع خطای جذر میانگین بین برآوردگرها و مقادیر واقعی است، بیان می کنیم. همچنین، بازده نسبی  $s^2$  در مقایسه با  $\hat{\sigma}_{all}^2$  به صورت  $\frac{RE_{s^2}}{RE_{\hat{\sigma}_{all}^2}}$  محاسبه می شود. معیار خطای میانگین فاصله (MDE) را بصورت

$$(14) \quad MDE = \left( \sum_{t=1}^T \frac{U_t - \hat{U}_t)^2 + L_t - \hat{L}_t)^2}{2T} \right)^{1/2}$$

تعریف می کنیم. که در آن  $X = [L_t, U_t]$  فاصله ی حقیقی داده و  $\hat{X} = [\hat{L}_t, \hat{U}_t]$  تخمین زده می شود. همچنین نرخ پوشش

$$(15) \quad R_C = T^{-1} \sum_{t=1}^T \frac{w(X_t \cap \hat{X}_t)}{w(X_t)}$$

، نرخ موثر

$$(16) \quad R_E = T^{-1} \sum_{t=1}^T \frac{w(X_t \cap \hat{X}_t)}{w(\hat{X}_t)}$$

و اختلاف مقارن نرمال

$$(17) \quad R_N = T^{-1} \sum_{t=1}^T \frac{w(X_t \cap \hat{X}_t)}{w(X_t \cup \hat{X}_t)}$$

را به این صورت در نظر می گیریم. که در آن  $W(x)$  طول یک فاصله ی  $X$  را نشان می دهد. با توجه به جدول ۱ نتیجه روش پیشنهادی نشان می دهد که برآوردگرهای پیشنهادی  $(\hat{\sigma}_{all}^2, \hat{\sigma}_l^2, \hat{\sigma}_u^2)$  موجب بهبودهای قابل توجهی به روش پیشنهادی داده است و در حالت های مختلف پایدار هستند. ما نتیجه می گیریم که برآوردگر  $\hat{\mu}$  خطای کمتری نسبت به  $\hat{\mu}_{all}$  دارد. همانطور که انتظار داشتیم اطلاعات بیشتر دقت تخمین نوسان را بهبود بخشیدند. علاوه بر این برآوردگرهای  $\hat{\sigma}_c^2$  و  $\hat{\sigma}_v^2$ ، که تحت مدل نوسانات تصادفی برآورد شده اند، عملکرد بهتری را نسبت به مدل نوسانات ثابت که به صورت  $\hat{\sigma}_{all}^2$  که در حالت نوسان ثابت برآورد شده اند، انجام می دهند.



جدول ۱. مقایسه بین روش پیشنهادی جدید و سایر موارد پیشنهادی در طول دوره نوسان مشابه.

روش	MDE	$R_C$	$R_E$	$R_N$	روش	MDE	$R_C$	$R_E$	$R_N$
Naive	۴/۰	۴۸/۱	۴۹/۳	۳۵/۳	VAR	۳/۳	۵۶/۵	۴۵/۱	۳۳/۸
EWMA	۳/۷	۵۵/۴	۴۴/۹	۳۳/۵	VECM	۳/۵	۵۴/۲	۴۴/۷	۳۶/۰
CR-SETAR	۵/۱	۶۳/۱	۳۹/۱	۳۰/۱	Proposed method	۲/۹	۵۹/۱	۵۱/۱	۴۰/۲

## ۵. نتیجه گیری

چگالی های توام لگاریتم قیمت باز شدن، بیشینه و پایانی و لگاریتم قیمت باز شدن، کمینه و پایانی را براساس معادلات دیفرانسیل تصادفی را پیشنهاد می کنیم. مطالعات شبیه سازی نشان می دهد که برآوردگر های پیشنهادی کارایی بالاتری نسبت به روش مرسوم با استفاده از خطای جذر میانگین ریشه (RE) دارند. در تحلیل داده های واقعی برای سهام های نمونه، پیش بینی یک مرحله ای از روش پیشنهادی بهتر از چندین گزینه از لحاظ MDE،  $R_E$  و  $R_N$  است.

## مراجع

1. j. Arroyo, G. Gonzalez and C. Mate, *Forecasting with Interval and Histogram Data: Some Financial Application*, Handbook of Empirical Economics and Finance, 2011.
2. L. Billard and E.Diday, *From the statistics of the Data to the Statistics of knowledge: symbolic Data Analysis*, Journal of the American Statistics Association. 98 (2003), no 462, 470-487.
3. L. Billard and E.Diday, *symbolic Data Analysis: Conceptual Statistics and Data Mining*, Chichester, Uk, John Wiley & Sons, 2006.
4. A. Blanco, A.Colubi, N. Corral and G. Gonzalez, *On a linear independence test for interval valued random sets*, Soft Methods for Handling Variability and Imprecision, Advances in Soft Computing, 2008.
5. G. Gonzalez, A. Blanco, N. Corral and A.Colubi, *Least square estimation of linear regression models for convex compact random sets*, Advances in Data Analysis and Classification. 1 (2007), no 1, 67-81.
6. E.A.L. Neto and F.A.T. De Carvalho, *Center and Range method for fitting a linear regression model to symbolic interval data*, *Computational Statistics & Data Analysis*. 52 (2007), no 3, 1500-1515.
7. P.M. Rodrigues and N. Salish, *Modeling and forecasting interval time series with Threshold models*, Working paper, 2011.
8. S.E. Shreve, *Stochastic Calculus for Financial II*, Springer, 2004.

پست الکترونیکی: [riazi\\_fds@yahoo.com](mailto:riazi_fds@yahoo.com)  
 پست الکترونیکی: [ataabak@aut.ac.ir](mailto:ataabak@aut.ac.ir)  
 پست الکترونیکی: [p.nabati@uut.ac.ir](mailto:p.nabati@uut.ac.ir)

## قیمت گذاری اختیار معامله دومانعی با استفاده از روش تصویرسازی متعامد مبتنی بر چندجمله ای های لژاندر

میلاد فهیمی\*

دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، دانشگاه سمنان، سمنان، ایران

و کاظم نوری

عضو هیات علمی دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، دانشگاه سمنان، سمنان، ایران

چکیده. در این مقاله قیمت گذاری اختیار معامله دومانعی در حالت گسسته مورد بررسی قرار گرفته است. در همین راستا ابتدا قیمت اختیار معامله مبتنی بر معادله دیفرانسیل جزئی بلک-شولز در نظر گرفته شده است و سپس با اعمال تغییر متغیر مناسب و تشکیل معادله گرما، با بهره گیری از روش تصویر مبتنی بر چندجمله ای های متعامد لژاندر، جواب های معادله برآورد شده است. نتایج حاصل از حل عددی مبتنی بر روش تصویر با استفاده از نرم افزار متلب نشان می دهد که این روش در مقایسه با سایر روش ها، از دقت و سرعت محاسباتی بیشتری برخوردار است.

واژه های کلیدی: قیمت گذاری، چندجمله ای متعامد، اختیار معامله دومانعی، روش تصویر.  
طبقه بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 62P05, 91G60, 94A11.

## ۱. پیش گفتار

یکی از موضوعات اساسی در ریاضیات مالی قیمت گذاری اختیار معاملات است. اختیار معاملات انواع مختلفی دارند، که به دو نوع استاندارد و غیر استاندارد دسته بندی می شوند. یکی از انواع اختیار معاملات غیر استاندارد اختیارات معامله با مانع است که قدیمی ترین نوع اختیار معاملات محسوب می شوند، که تاریخ شروع داد و ستد آنها به سال ۱۹۶۷ میلادی باز می گردد. از جمله عواملی که موجب جذابیت و پوشش ریسک بهتر از سوی سرمایه گذاران می شود کنترل نوسان ارزش دارایی به دلیل وجود مانع قیمتی و سودآوری این نوع از اختیارات است. پس از پیدایش نظریه قیمت گذاری اختیارات مبتنی بر مدل بلک شولز در سال ۱۹۷۳ میلادی علاقه زیادی در پژوهشگران برای قیمت گذاری اختیار معامله ها انجام شد. مرتون [۵] اولین کسی بود که از مدل بلک-شولز برای قیمت گذاری اختیار خرید با مانع استفاده نمود. بعدها هینن و کیت [۴] فرمول قیمت گذاری اختیار با مانع پاره زمان را که در آن ها مانع ها برای قسمتی از عمر اختیار فعال است، به دست آوردند تا آنجا که فوسای [۳] در مقاله ای، حل تحلیلی برای قیمت گذاری اختیار معاملات تک مانعی ارائه نمود. همچنین میلف و تاگلیانی [۶] یک روش عددی برای قیمت گذاری اختیار معاملات دو مانعی در حالت گسسته ارائه نمودند. در این مقاله از روش تصویر برای قیمت گذاری اختیار معاملات دو مانعی در حالت گسسته استفاده شده است که در آن عملکرد تصویر بر روی چندجمله ای متعامد لژاندر پیاده سازی شده است.

## ۲. مبانی نظری مدل ریاضیاتی قیمت گذاری اختیار معامله

لوویس بشیلیه در سال ۱۹۰۰ میلادی الگویی برای تغییر قیمت سهام ارائه نمود و به همین دلیل بسیاری از افراد او را بنیانگذار ریاضیات مالی می دانند؛ بعدها، ساموئلسون توانست الگوی مناسبی برای تغییرات قیمت کالاها در بازار بورس پیدا کند که تحت عنوان حرکت براونی هندسی یاد می شود و به صورت زیر است:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dB_t \quad (1)$$

حال با توجه به تعریف ارائه شده برای اختیار معامله با مانع دو تایی در حالت گسسته، زمان های مشاهده و کنترل قیمت سهام در بازه  $[0, t]$  را به صورت افراز بندی شده زیر تعریف می کنیم:

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_M = T$$

بدین منظور فرض می کنیم که این افراز بندی به طور یکنواخت با طول گام  $\tau = \frac{T}{m}$  و به صورت  $t_m = m\tau$  انجام شود؛ در همین راستا ارزش اختیار  $p(s, t, m-1)$  را به عنوان تابعی از قیمت سهام در لحظه  $t \in (t_{m-1}, t_m)$  در نظر می گیریم؛ به گونه ای که طبق معادله دیفرانسیل جزئی بلک-شولز داریم:

$$-\frac{\partial p}{\partial t} + rS \frac{\partial p}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 p}{\partial S^2} - rp = 0 \quad (2)$$

\* ارائه دهنده

با شرایط کرانه ای زیر:

$$\begin{cases} p(S, t_0, \circ) = (S - E) \mathbb{1}_{(\max(E, L) \leq S \leq U)} \\ p(S, t_m, \circ) = p(S, t_m, m-1) \mathbb{1}_{(L \leq S \leq U)} \quad m = 1, 2, \dots, M-1 \end{cases}$$

همچنین:

$$p(S, t_m, m-1) = \lim_{t \rightarrow t_m} p(S, t, m-1)$$

حال قرار می دهیم:

$$E^* = \ln\left(\frac{E}{L}\right), C(z, t, m) = p(S, t, m), z = \ln\left(\frac{S}{L}\right)$$

$$\delta = \max\{E^*, \circ\} \text{ و } \theta = \ln\left(\frac{U}{L}\right), \mu = r - \frac{\sigma^2}{2}$$

بنابراین با تغییر متغیر، معادله (۲) و شرایط کرانه ای به صورت زیر تبدیل می شوند:

$$-C_t + \mu C_z + \frac{\sigma^2}{2} C_{zz} = rC \quad (3)$$

$$\begin{cases} C(Z, t_0, \circ) = L(e^z - e^{E^*}) \mathbb{1}_{(\delta \leq z \leq \theta)} \\ C(z, t_m, m) = C(z, t_m, m-1) \mathbb{1}_{(\circ \leq z \leq \theta)} \quad m = 1, 2, \dots, M-1 \end{cases}$$

با قرار دادن :

$$\beta = \alpha\mu + \alpha^2 \frac{\sigma^2}{2} - r \text{ و } C^\alpha = \frac{\sigma^2}{2}, \alpha = -\frac{\mu}{\sigma^2}$$

$$C(z, t_m, m) = e^{\alpha z + \beta t} h(z, t, m) \text{ و}$$

معادله (۳) به معادله گرما تبدیل می شود.

$$-h_t + C^\alpha h_{zz} = \circ$$

$$\begin{cases} h(z, t_0, \circ) = L e^{-\alpha z} (e^z - e^{E^*}) \mathbb{1}_{(\delta \leq z \leq \theta)} \quad m = \circ \\ h(z, t_m, m) = h(z, t_m, m-1) \mathbb{1}_{(\circ \leq z \leq \theta)} \quad m = 1, 2, \dots, M-1 \end{cases}$$

طبق [۷] می دانیم مساله گرما با شرایط اولیه و مرزی داده شده دارای جوابی به فرم انتگرال پیچشی زیر می باشد:

$$h(z, t, m) \xRightarrow{\text{جواب به فرم انتگرال پیچشی}} \begin{cases} \int_{\delta}^{\theta} \kappa(z - \xi, t) \cdot L \cdot e^{-\alpha \xi} (e^{\xi} - e^{E^*}) d\xi; \quad m = \circ \\ \int_{\circ}^{\theta} \kappa(z - \xi, t - t_m) h(z, t_m, m-1) d\xi; \quad m = 1, 2, \dots, M-1 \end{cases}$$

که در آن :

$$\kappa(z, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi C^\alpha t}} e^{\frac{-z^2}{4C^\alpha t}}$$

حال با توجه به این که  $h(z, t_m, m-1)$  تابعی دو متغیره است لذا با تعریف  $f_m(z) = h(z, t_m, m-1)$  داریم:

$$f_{\circ}(z) = L e^{-\alpha z} (e^z - e^{E^*}) \mathbb{1}_{(\delta \leq z \leq \theta)}$$

$$f_1(z) = \int_{\delta}^{\theta} k(z - \xi, \tau) f_{\circ}(\xi) d\xi \quad (4)$$

$$f_m(z) = \int_{\circ}^{\theta} k(z - \xi, \tau) f_{m-1}(\xi) d\xi \quad (5) \quad m = 2, 3, \dots, M$$

### ۳. قیمت گذاری مبتنی بر روش تصویرسازی متعامد

تعریف ۱۰۳. تعریف عملگر تصویر: مجموعه ای از پایه های مستقل خطی در فضای مربع انتگرال پذیر  $L^2$  روی بازه (محدود)  $[\circ, \theta]$  را به صورت  $\{\phi_i\}_{i=\circ}^{\infty}$  در نظر می گیریم.

و همچنین عملگر  $K$  را به صورت  $K : L^{\gamma}[\circ, \theta] \rightarrow L^{\gamma}[\circ, \theta]$  به گونه ای که:

$$K(f)(z) = \int_{\circ}^{\theta} k(z - \xi, \tau) f(\xi) d\xi$$

$$k(z, t) = \frac{1}{\sqrt{\gamma \pi c^{\gamma} t}} e^{\frac{-t^{\gamma}}{\gamma c^{\gamma} t}}$$

حال  $P_n$  را می توان به عنوان دنباله ای از عملگرهای تصویر پیوسته به صورت  $P_n : L^{\gamma} \rightarrow X_n$  تعریف نمود، آن گاه به ازای هر  $f \in L^{\gamma}$  داریم:

$$P_n(f) = \sum_{i=\circ}^{d_n} a_i \phi_i(z) \quad (P_n \text{ به عنوان ترکیب خطی از عناصر پایه } \phi_m)$$

حال باید تخمین  $f_m$  توسط  $\tilde{f}_m$  با انتخاب مناسب  $P_n$  انجام گیرد.

$$\tilde{f}_{1,n} = P_n K(f_{\circ})$$

$$\tilde{f}_{m,n} = P_n K(\tilde{f}_{m-1,n}) = (P_n K)^m(f_{\circ}); \quad m \geq 2 \quad (I)$$

#### ۴. قیمت گذاری با استفاده از چندجمله ای متعامد لژاندر:

تعریف ۱.۴. حال روش تصویر را مبتنی بر چندجمله ای متعامد لژاندر اجرا می کنیم. چندجمله ای لژاندر با رابطه ی بازگشتی زیر قابل تعریف خواهد بود:

$$P_i(x) = x P_{i-1}(x) + \left(\frac{i-1}{i}\right) (x P_{i-1}(x) - P_{i-2}(x)) \quad (۶)$$

که در آن  $P_0(x) = 1$  و  $P_1(x) = x$  که در آن  $\{P_i(x)\}_{i=\circ}^{\infty}$  پایه متعامد در  $L^{\gamma}[-1, 1]$  است.

با توجه به قضیه استورم-لیوویل، با استفاده از تغییر متغیر مناسب، رابطه بازگشتی چندجمله ای لژاندر را در بازه  $[\circ, \theta]$  به صورت زیر خواهد بود:

$$P_i\left(\frac{\gamma t}{\theta} - 1\right) = \left(\frac{\gamma t}{\theta} - 1\right) P_{i-1}\left(\frac{\gamma t}{\theta} - 1\right) + \left(\frac{i-1}{i}\right) \left( \left(\frac{\gamma t}{\theta} - 1\right) P_{i-1}\left(\frac{\gamma t}{\theta} - 1\right) - P_{i-2}\left(\frac{\gamma t}{\theta} - 1\right) \right)$$

لذا با در نظر گرفتن  $\tilde{P}_i(t) = \sqrt{\frac{\gamma n + 1}{\theta}} \cdot p_i\left(\frac{\gamma t}{\theta} - 1\right)$  عملگر تصویرسازی متعامد  $P_n$  به صورت زیر تعریف می شود:

$$\forall f \in L^{\gamma}[\circ, \theta] : P_n(f) = \sum_{i=\circ}^n \langle f, \tilde{P}_i(x) \rangle \tilde{P}_i(x)$$

که در آن  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  نشانگر ضرب داخلی است. حال با توجه به عملگر تصویر تعریف شده داریم:

$$F_1 = [a_1^{\circ}, a_1^1, \dots, a_1^n] \text{ و از طرفی: } K = (k_{ij})_{(n+1) \times (n+1)} \text{ که در آن: } \phi_n = [\tilde{P}_{\circ}, \tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_n]$$

$$a_{1i} = \int_{\circ}^{\theta} \int_{\delta}^{\theta} \tilde{p}_i(\eta) k(\eta - \xi, \tau) f_{\circ}(\xi) d\xi d\eta \quad 0 \leq i \leq n$$

$$k_{ij} = \int_{\circ}^{\theta} \int_{\delta}^{\theta} \tilde{p}_{i-1}(\eta) \tilde{p}_{j-1}(\xi) k(\eta - \xi, \tau) d\xi d\eta \quad 1 \leq i, j \leq n+1$$

نتیجه ۲.۴. ارزش اختیار معامله با مانع دوتایی از نوع برونشو، در حالت گسسته به صورت زیر خواهد بود [۲]:

$$P(S_{\circ}, t_m, m-1) \simeq e^{\alpha z_{\circ} + \beta t} \tilde{f}_{M,n}(z_{\circ})$$

که در آن  $z_{\circ} = \ln\left(\frac{S_{\circ}}{L}\right)$  و  $\tilde{f}_{M,n}$  توسط عملگر متعامد تصویر برآورد می شود. همچنین می توان فرآیند قیمت گذاری را با استفاده از روش درونیایی لاگرانژ مبتنی بر ریشه های چندجمله ای های لژاندر اجرا نمود؛ بنابراین عملگر مربوط به درونیایی به صورت زیر تعریف می

شود:  $\mathcal{I}_n^{\alpha,\beta}(f) = \sum_{i=0}^n f(x_i^{\alpha,\beta}) \mathcal{L}_i(x)$  که در آن  $\mathcal{L}_i(x)$ ،  $i$  امین چندجمله ای لاگرانژ است که در نقاط گرهی  $\{x_i^{\alpha,\beta}\}_{i=0}^n$  به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mathcal{L}_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{(x - x_j^{\alpha,\beta})}{(x_i^{\alpha,\beta} - x_j^{\alpha,\beta})}$$

##### ۵. نتایج عددی فرآیند قیمت گذاری

حال در این بخش به حل عددی روش و بررسی نتایج عددی حاصل از اجرای روش می پردازیم و سپس این نتایج با سایر روش های محاسبات عددی مورد مقایسه واقع می شود.

مثال ۱۰۵. بنابراین در اختیار دومانعی برونشو قرار می دهیم:

$$S_0 = 100, T = 0.5, E = 100, U = 120, \sigma = 0.25, r = 0.05$$

$M$	$L$	روش تصویر - مقاله	روش درخت سه جمله ای	روش درونیابی - مقاله	زمان پردازش
۵	۸۰	۴۴۸۸.۲	۴۴۹۹.۲	۴۴۳۹.۲	۰.۴۳s.
۵	۹۵	۶۸۳۰.۱	۶۸۳۱.۱	۶۹۲۶.۱	۰.۴۳s.
۵	۹۹	۸۴۲.۱	۰۸۱۱.۱	۰۸۵۳.۱	۰.۴۳s.
۲۵	۸۰	۹۴۳۰.۱	۹۴۲۰.۱	۹۴۹۰.۱	۰.۷۹s.
۲۵	۹۵	۸۷۸۸.۰	۸۶۶۸.۰	۸۸۲۳.۰	۰.۷۹s.
۲۵	۹۹	۳۰۲۵.۰	۲۹۳۱.۰	۳۱۵۳.۰	۰.۷۹s.
۲۵۰	۸۰	۹۱۹۵.۱	۷۴۷۷.۱	۶۹۹.۱	۰.۸۳s.
۲۵۰	۹۵	۴۸۶۷.۰	۵۶۹۹.۰	۵۴۹.۰	۰.۸۳s.
۲۵۰	۹۹	۰۷۵۸.۰	۱۲۰۱.۰	۱۰۸۹.۰	۰.۸۳s.

جدول ۱. قیمت گذاری اختیار معامله دو مانعی در مثال ۱۰۵

##### ۶. نتیجه گیری

در این مقاله با اجرای روش تصویرسازی متعامد مبتنی بر چندجمله ای های لژاندر، قیمت اختیار معامله های دومانعی (برونشو) در حالت گسسته برآورد شده است. بنابراین با توجه به نتایج حاصل از حل عددی با استفاده از نرم افزار متلب، این روش سرعت محاسباتی و دقت بیشتری نسبت به سایر روش ها دارد.

##### مراجع

1. R.C.Daileda, Introduction to Sturm Liouville Theory, Trinity University, (2012), 5-10
2. R.Farnoosh, A.Sobhani, M.Beheshti, Efficient and fast numerical method for pricing discrete double barrier option by projection method, Comput. Econ. Volume 73, Issue 7 (2017), 1539-1545.
3. G. Fusai, I.D. Abrahams, C. Sgarra, An exact analytical solution for discrete barrier options, Finance Stoch. 10 (1) (2006) 1-26.
4. R.C.Heynen, H.M. Kat, Partial Barrier Options. The Journal of Financial Engineering 3, (1994), pp. 253-274
5. R.Merton, Theory of Rational Option Pricing. Bell Journal of Economics and Management 4, (1973), pp. 141-183.
6. M. Milev, A. Tagliani, Numerical valuation of discrete double barrier options, J. Comput. Appl. Math. 233 (10) (2010) 2468-2480.
7. W.A. Strauss, Partial Differential Equations, Vol. 92, Wiley, New York, 1992.

پست الکترونیکی: [fahimimilad@gmail.com](mailto:fahimimilad@gmail.com)

پست الکترونیکی: [knouri@semnan.ac.ir](mailto:knouri@semnan.ac.ir)

## کران‌های تضمین شده خط مشی‌های فرایند تصمیم مارکف

علی معدن کن \*  
گروه ریاضی کاربردی، دانشکده ریاضی، دانشگاه یزد، یزد، ایران  
علی دلاورخلفی  
گروه ریاضی کاربردی، دانشکده ریاضی، دانشگاه یزد، یزد، ایران  
سید مهدی کرباسی  
گروه ریاضی کاربردی، دانشکده ریاضی، دانشگاه یزد، یزد، ایران  
و فضل الله ادیب نیا  
گروه مهندسی کامپیوتر، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه یزد، یزد، ایران

چکیده. در این مقاله فرایندهای تصمیم مارکف را با معیار هزینه متوسط در نظر گرفته و به دنبال راه کاری برای تعیین میزان کارایی از دست رفته با استفاده از یک سیاست کنترلی زیر بهینه می‌باشیم. سیستمی که در نظر گرفته‌ایم در اصل یک فرایند تصمیم مارکفی می‌باشد که به دنبال محاسبه کران‌های کارایی برای سیاست‌های کنترل تصادفی فرایند تصمیم مارکفی با معیار متوسط هزینه می‌باشیم. در عمل، محققین بسیاری به خاطر سختی در محاسبات و اجرای ریاضیاتی سیاست‌های کنترل بهینه از سیاست‌های کنترلی فراابتکاری استفاده کرده و می‌کنند. برای این قبیل سیاست‌ها، به دنبال محاسبه کران‌های تضمین شده‌ای برای کارایی‌اش، به خصوص کارایی‌اش در مقایسه با سیاست بهینه، می‌باشیم. به عبارت دیگر هدف رسیدن به یک ره یافت متقارن برای ارزیابی اختلاف یک سیاست خاص با بهینگی با استفاده از متوسط هزینه دوره‌ای در یک فرایند تصمیم مارکفی می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: سیستم‌های صف بندی، سیاست‌های کنترل تصادفی، فرایند تصمیم مارکف، صف چند کلاسه.  
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 93E20, 37H99, 60J27.

### ۱. معرفی مساله

فرایندهای تصمیم مارکفی زمان گسسته را در نظر بگیرید. برای این قبیل سیستم‌ها فرض کنید  $\mathcal{V}$  یک فضای حالت عمومی اندازه پذیر با توجه به سیگما فیلد داده شده  $\mathcal{A}, B(\mathcal{V})$  یک مجموعه از عمل‌های موجود در هر بازه زمانی باشند. تابع  $R: \mathcal{V} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  نیز یک تابع هزینه اندازه پذیر می‌باشد. در موقعیت  $y \in \mathcal{V}$ ، عمل  $a \in \mathcal{A}$  دلیلی برای یک هزینه خاص می‌باشد.  $\rho: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{A}$  تابعی اندازه پذیر می‌باشد که به حالت جاری سیستم وابسته است و عمل مربوط به هر بازه زمانی را انتخاب می‌کند. مجموعه تمام سیاست‌های اندازه پذیر  $\rho$  را با مجموعه  $Q = \{\rho: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{A} | \rho\}$  تعریف می‌کنیم. تحت یک سیاست بازخوردی ثابت  $\rho \in Q$ ، متغیر تصادفی توصیف کننده ارزیاب حالت یک زنجیره مارکف زمان-همگن  $(Y_0, Y_1, \dots)$  با احتمال انتقال مشخص شده با هسته تصادفی  $p(B, y, \rho(y))$  می‌باشد. کارایی یک سیستم را تحت یک سیاست خاص  $\rho \in Q$  با استفاده از متوسط هزینه به ازای هر دوره به صورت زیر ارزیابی می‌کنیم

$$J(\rho) = \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{t-1} E \left[ c(Y_k, \rho(Y_k)) \mid Y_0 = y \right].$$

در حالی که کارایی بهینه را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$J_{opt} = \inf_{\rho \in Q} \left\{ \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{t-1} E \left[ c(Y_k, \rho(Y_k)) \mid Y_0 = y \right] \right\}.$$

هدف نهایی ما در این فصل پیدا کردن و توسعه دادن ابزارهایی برای تعیین سیاست‌هایی می‌باشد که  $J(\rho)$  را به  $J_{opt}$  نزدیک کند.

### ۲. کرانها بر روی متوسط هزینه هر دوره

در این بخش روشی را برای تعیین کرانها بر روی متوسط هزینه هر دوره که توسط فرایند تصمیم مارکفی رخ داده است را ارائه می‌دهیم. در ابتدا نشان می‌دهیم که این کرانها را چگونه می‌توان برای زنجیره مارکف بدون کنترل محاسبه کرد. سپس روش حاصل را برای بدست آوردن کران پایین بر روی متوسط هزینه هر دوره که توسط هر سیاست بازخوردی حالت ثابت رخ داده است را توسعه می‌دهیم. با مشخص کردن کران بالا بر روی هزینه حاصله از یک سیاست دلخواه و کران پایین بر روی هزینه حاصله از هر سیاستی، می‌توان تعیین کنیم که بهینگی چقدر از سیاست داده شده دلخواه فاصله دارد.

\* ارائه‌دهنده

۱.۲. زنجیره مارکف بدون کنترل. وانگ<sup>۱</sup> و همکارش بوید<sup>۲</sup> در [۱] نشان دادند که چطور کران‌های عملکرد را برای مسائل کنترل تصادفی افق متناهی با سیستم دینامیک خطی و قیود محدودیت دلخواه، را محاسبه کرد. در این بخش روشی را برای یافتن یک راهبرد برای تعیین کرانهای متوسط هزینه هر دوره ارائه می‌دهیم. به همین منظور، قبل از ارائه کران پایین متوسط هزینه هر دوره، ابتدا سعی در یافتن کران‌ها برای زنجیره مارکف بدون کنترل می‌کنیم و سپس از همین روش استفاده کرده تا کرانی پایین برای متوسط هزینه هر دوره برای هر سیاست ارائه دهیم و سپس تفاوت‌های بین بهینگی و سیاست بدست آمده را با استفاده از یک کران بالا و یک کران پایین بر روی هزینه بدست آمده با سیاست بدست آمده و هزینه اعمال شده از طریق هر سیاست دیگر را بررسی می‌کنیم. برای این منظور قضیه زیر را در نظر می‌گیریم:

قضیه ۱.۲. برای هر تابع اندازه پذیر  $g : \mathcal{Y} \rightarrow R$  در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}\alpha_u &= \sup_{y \in \mathcal{Y}} \left\{ c(y) + E[g(Y_{t+1}) | Y_t = y] - g(y) \right\}, \\ \alpha_l &= \inf_{y \in \mathcal{Y}} \left\{ c(y) + E[g(Y_{t+1}) | Y_t = y] - g(y) \right\}.\end{aligned}$$

حال اگر  $\epsilon > 0$  موجود باشد به طوری که

$$\sup_{y \in \mathcal{Y}} \left\{ E \left[ |g(Y_{t+1})|^{1+\epsilon} \mid Y_t = y \right] - |g(y)|^{1+\epsilon} \right\} < \infty,$$

آنگاه برای تمام  $y \in \mathcal{Y}$

$$\begin{aligned}\alpha_u &\geq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{t-1} E \left[ c(Y_k) \mid Y_0 = y \right], \\ \alpha_l &\leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{t-1} E \left[ c(Y_k) \mid Y_0 = y \right].\end{aligned}$$

این قضیه نتیجه اصلی این فصل می‌باشد و ما از آن برای تعیین کران‌های بالا و پایین هزینه متوسط حاصله از زنجیره مارکف با فضای حالت اندازه پذیر استفاده می‌کنیم. اما قبل از اثبات قضیه، نشان می‌دهیم که تمام امیدهایی که بیان می‌شوند، موجود می‌باشند.

لم ۲.۲. فرض کنید  $g : \mathcal{Y} \rightarrow R$  تابعی اندازه پذیر باشد و

$$\begin{aligned}\sup_{y \in \mathcal{Y}} \left\{ c(y) + E[g(Y_{t+1}) | Y_t = y] - g(y) \right\} &< \infty, \\ \inf_{y \in \mathcal{Y}} \left\{ c(y) + E[g(Y_{t+1}) | Y_t = y] - g(y) \right\} &> -\infty,\end{aligned}$$

و  $\epsilon > 0$  وجود دارد به طوری که:

$$\sup_{y \in \mathcal{Y}} \left\{ E \left[ |g(Y_{t+1})|^{1+\epsilon} \mid Y_t = y \right] - |g(y)|^{1+\epsilon} \right\} < \infty,$$

پس برای  $y \in \mathcal{Y}$

$$\begin{aligned}E \left[ |g(Y_{t+1})|^{1+\epsilon} \mid Y_0 = y \right] &< \infty, \\ \left| E \left[ c(Y_k) \mid Y_0 = y \right] \right| &< \infty.\end{aligned}$$

<sup>2</sup> Boyd

<sup>1</sup> Wang

### ۳. زنجیره مارکف با کنترل

از قضیه ۱۰۲ برای بدست آوردن کران‌های بالا و پایین برای  $ACPF^*$  حاصل شده توسط زنجیره مارکف با فضای حالت اندازه پذیر عمومی استفاده کردیم. از آنجا که هدف نهایی ما کراندار کردن فاصله عملکرد بین  $J(\rho)$  و  $J_{opt}$  برای برخی  $\mu$ های خاص می‌باشد، نتیجه بدست آمده را برای ارائه یک کران پایین برای متوسط هزینه هر دوره که توسط هر سیاست حالت-بارخوردی ثابت رخ داده است را توسعه می‌دهیم.

لم ۱۰۳. برای هر تابع اندازه پذیر  $h: \mathcal{Y} \rightarrow R$  فرض کنید برای تمام  $a \in \mathcal{A}$  و  $y \in \mathcal{Y}$

$$\alpha_l = \inf_{y \in \mathcal{Y}, a \in \mathcal{A}} \left\{ c(y, a) + E[g(Y_{t+1}) | Y_t = y, A_t = a] - g(y) \right\}.$$

برای هر سیاست کنترلی بازخوردی ثابت  $\rho: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{A}$  به طوریکه

$$\sup_{y \in \mathcal{Y}} \{ E[|g(Y_{t+1})|^{1+\varepsilon} | Y_t = y, A_t = \rho(y)] - |g(y)|^{1+\varepsilon} \} < \infty,$$

دارای متوسط هزینه دوره‌ای می‌باشد که در رابطه زیر صادق است:

$$\alpha_l \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{t-1} E[c(Y_k, \rho(Y_k)) | Y_0 = y], \forall y \in \mathcal{Y}.$$

### ۴. سیاست کنترلی صف چند کلاسه

فرض کنید سیستم صف بندی مورد نظر، یک سیستم زمان گسسته باشد. لذا در هر بازه زمانی  $t$  در نظر می‌گیریم که  $W_t^i \in \{0, 1\}$  میزان کارهای وارده به کلاس  $i$ ام به صف می‌باشد. فرض کنید  $\mathbf{W}_t = (W_t^1, \dots, W_t^N)$  نشان دهنده بردار ورودی باشد. فرض می‌کنیم  $\lambda_i = E[W_t^i]$  که مستقل از  $t$  می‌باشد. فرض کنید  $Y_t^i$  نشان دهنده تعداد کارهای کلاس  $i$ ام در زمان  $t$  باشد. دنباله کنترلی  $A_i$  را در هر دوره زمانی  $t$  به صورت زیر می‌سازیم:

$$A_t^i = \begin{cases} 1, & \text{اگر یک کار از کلاس } i \text{ در حال دریافت سرویس باشد.} \\ 0, & \text{در غیر این صورت.} \end{cases}$$

یک سرویس از یک کار از کلاس  $i$ ام که سرویس‌اش را در دوره زمانی داده شده شروع کرده است، با احتمال  $\theta_i$  کامل خواهد شد که این  $\theta_i$  مستقل از سابقه سرویس می‌باشد. همچنین، متغیر تصادفی  $D_t^i = A_t^i I(Y_t^i) B^i$  نشان دهنده تعداد کارهای خارج شده از کلاس  $i$  در دوره زمانی  $t$  می‌باشد. دینامیک طول صف به ازای  $i \in \{1, \dots, N\}$  به قرار زیر است

$$Y_{t+1}^i = Y_t^i + W_t^i - D_t^i$$

روشن است که مساله انتخاب اینکه چطور کلاس‌های کاری را با توجه به مینیم کردن میانگین طول صف سرویس داد، یک فرایند تصمیم مارکفی با اصل متوسط هزینه دوره‌ای می‌باشد.

در هر دوره زمانی  $t$  هزینه حادث شده  $c(Y_t) = \sum_{i=1}^N Y_t^i$  می‌باشد که تعداد کل کارهای در صف می‌باشد. فرض کنید  $\rho: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{A}$  یک سیاست کنترلی بازخوردی باشد و  $(Y_0, Y_1, \dots)$  فرایند طول صف تحت این سیاست باشد. آنگاه

$$J(\rho) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{t-1} E[c(Y_k) | Y_0 = 0].$$

متوسط طول صف تحت سیاست  $\rho$  می‌باشد.

لم ۱۰۴. اگر  $\sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i}{\theta_i} > 1$  آنگاه هیچ سیاست بدون معطلی با متوسط طول صف کراندار شده وجود ندارد.

با توجه به لم فوق معلوم است که هنگامی که  $\sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i}{\theta_i} < 1$ ، هر سیاست بدون معطلی به متوسط طول صف کراندار شده می‌رسد. قضیه زیر متوسط طول صف از یک سیاست بدون معطلی را به متوسط طول صف از یک سیاست بهینه مرتبط می‌سازد.



قضیه ۲.۴. فرض کنید  $\mathcal{Q}_{NI}$  مجموعه تمام سیاست‌های بدون معطلی باشد. همچنین فرض کنید  $\rho \in \mathcal{Q}_{NI}$  یک سیاست بدون معطلی دلخواه باشد و همچنین فرض کنید

$$J_{opt} = \inf_{\rho \in \mathcal{Q}_{NI}} \left\{ \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{t-1} E[c(Y_k, \rho(Y_k)) | Y_0 = \circ] \right\}.$$

اگر  $\sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i}{\theta_i} < 1$  آنگاه  $J(\rho) < \infty$  و داریم:

$$\frac{J(\rho)}{J_{opt}} \leq \frac{\max_i \{\theta_i\}}{\min_i \{\theta_i\}}.$$

## ۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله روشی را ارائه دادیم که می‌توان آن را برای بدست آوردن کرانهای هزینه‌ای فرایند تصمیم مارکفی با فضای حالت معمولی و معیار متوسط هزینه دوره‌ای، به کار بست. این روش را ما در یک سیستم صف چندکلاسه به کار بردیم و توانستیم یک کرانی را برای نسبت بین متوسط طول صف بدست آمده با هر سیاست خاص و متوسط طول صف بدست آمده با سیاست بهینه، پیدا کنیم.

## مراجع

1. Y. Wang, S. Boyd, *Performance bounds and suboptimal policies for linear stochastic control via LMIs*, Int. J. Robust. Nonlinear Control, 2011, (21), 1710-1728.
2. Jia Li, H. Michael Zhang, *Bounding Queuing System Performance with Variational Theory*, Transportation Research Procedia, 2015, (7) 519-535.
3. A. Senderovich, M. Weidlich, A. Gal, A. Mandelbaum, *Queue mining for delay prediction in multi-class service processes*, Information Systems, 2015, (53), 278-295.
4. Huang Qing, S. R. Chakravarthy, *Analytical and simulation modeling of a multi-server queue with Markovian arrivals and priority services*, Simulation Modelling Practice and Theory, 2012, (28), 12-26.
5. G. Casale, A. Sansottera, P. Cremonesi, *Compact Markov-modulated models for multiclass trace fitting*, European Journal of Operational Research, 2016, (255), Issue 3, 822-833.
6. E. Lefeber, S. Lämmer, J. E. Rooda, *Optimal control of a deterministic multiclass queueing system for which several queues can be served simultaneously*, Systems & Control Letters, 2011, (60), Issue 7, 524-529.
7. J. Walraevens, H. Bruneel, D. Fiems, S. Wittevrongel, *Delay analysis of multiclass queues with correlated train arrivals and a hybrid priority/FIFO scheduling discipline*, Applied Mathematical Modelling, 2017 (45), 823-839.
8. A. Kebarighotbi, C. G. Cassandras, *Optimal Scheduling of Parallel Queues with Stochastic Flow Models: The  $c\mu$ -rule Revisited*, IFAC Proceedings Volumes, 2011, (44), 8223-8228.
9. L. Kleinrock, *Queueing Systems. Volume II: Computer Applications*, John Wiley, 1976.
10. S. Meyn and R. Tweedie, *Markov chains and stochastic stability*, Springer-Verlag, 1993.
11. J. Shanthikumar and D. Yao, *Multiclass queueing systems: Polymatroidal structure and optimal scheduling control*, Operations Research, 1992, (40), no. 2, 293-299.
12. P. J. Schweitzer and A. Seidmann, *Generalized polynomial approximations in Markovian decision processes*, J. Mathematical Analysis and Applications, 1985 (110) 568-582.
13. Ching-Tarng Hsieh, S. S. Lam, *Two classes of performance bounds for closed queueing networks*, Performance Evaluation, 1987 7, Issue 1, 3-30.
14. D. Koukopoulos, M. Mavronicolas, P. Spirakis, *Performance and stability bounds for dynamic networks*, Journal of Parallel and Distributed Computing, 2007 67, Issue 4, 386-399.

پست الکترونیکی: [a.madankan@stu.yazd.ac.ir](mailto:a.madankan@stu.yazd.ac.ir)

پست الکترونیکی: [Delavarkh@yazd.ac.ir](mailto:Delavarkh@yazd.ac.ir)

پست الکترونیکی: [Smkarbassi@yazd.ac.ir](mailto:Smkarbassi@yazd.ac.ir)

پست الکترونیکی: [Fadib@yazd.ac.ir](mailto:Fadib@yazd.ac.ir)

## میانگین رتبه‌ای در مدل‌هایی از مجموعه‌های مرتب پاره‌ای

ساناز میرانشاهی،\* امیرحسین صنعت‌پور و بردیا پناه‌بحق  
دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران

چکیده. یکی از روش‌های رتبه‌بندی در نظریه رتبه‌بندی داده‌ها، ساختن تمامی گسترش‌های خطی ممکن و اندازه‌گیری میانگین رتبه‌ای اعضای مجموعه براساس آنها می‌باشد. از چالش‌های اصلی این روش برای رتبه‌بندی، ساختن تمامی گسترش‌های خطی ممکن می‌باشد. این مسئله در مواجهه با داده‌های واقعی عملاً منجر به پیچیدگی‌های محاسباتی زیادی می‌شود. یکی از راهکارهای مطرح شده برای حل این مشکل، استفاده از روش‌ها و تکنیک‌های نمونه‌گیری به جای در نظر گرفتن تمامی گسترش‌های خطی است. در این مقاله علاوه بر بررسی محاسبه میانگین رتبه‌ای دقیق در برخی ساختارهای معروف، مسئله تقریب این رتبه‌ها نیز بررسی شده است.  
واژه‌های کلیدی: مجموعه مرتب پاره‌ای، گسترش خطی، میانگین رتبه‌ای، مدل مرتب پاره‌ای شاخه‌ای، مدل مرتب پاره‌ای موضعی.  
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 62F07, 06A06

## ۱. پیش‌گفتار

یکی از ابزارهای مهم در ارزیابی داده‌ها، رتبه‌بندی آنها براساس یک یا چند مشخصه می‌باشد. ارزیابی داده‌ها براساس یک مشخصه، تنها منوط به جمع‌آوری اطلاعات دقیق بوده و پیچیدگی عملیاتی چندانی ندارد. این در حالی است که در بیشتر پدیده‌های واقعی، عملاً بیش از یک مشخصه در ارزیابی و رتبه‌بندی داده‌ها ظاهر می‌شوند. نظریه ترتیب پاره‌ای یکی از ابزارهای اصلی در رتبه‌بندی چنین داده‌هایی است [۱، ۲، ۳]. در حالت کلی رابطه  $\leq$  در مجموعه ناتهی  $X$  را یک رابطه ترتیب پاره‌ای گوئیم هرگاه به‌ازای هر  $x, y, z \in X$  داشته باشیم:

$$\begin{aligned} x &\leq x \quad (i) \\ \text{اگر } x &\leq y \text{ و } y \leq x \text{ آنگاه } x = y \quad (ii) \\ \text{اگر } x &\leq y \text{ و } y \leq z \text{ آنگاه } x \leq z \quad (iii) \end{aligned}$$

تعریف ۱.۱. فرض کنیم  $X$  جامعه‌ای متناهی و  $I = \{q_1, \dots, q_n\}$  مجموعه‌ای از مشخصه‌ها برای هر عضو از جامعه باشد. به عبارت دیگر، به‌ازای هر عضو  $x \in X$ ، برداری از مشخصه‌های متناظر با  $x$  است. رابطه ترتیب پاره‌ای متناظر با  $I$  را روی  $X$  به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(1) \quad x, y \in X; \quad x \leq y \Leftrightarrow q_i(x) \leq q_i(y) \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

رابطه فوق یک رابطه ترتیب پاره‌ای روی  $X$  می‌باشد و  $(X, I)$  را یک مجموعه مرتب پاره‌ای گوئیم.

با مفروض بودن مجموعه مرتب پاره‌ای  $X$ ، گوئیم اعضای  $x, y \in X$  قابل مقایسه‌اند هرگاه  $x \leq y$  یا  $x \geq y$  و در این صورت می‌نویسیم  $x \perp y$ . در صورتی که اعضای  $x, y \in X$  قابل مقایسه نباشند، می‌نویسیم  $x \parallel y$ . مجموعه تمامی اعضای غیر قابل مقایسه با  $x$  را با نماد  $U(x)$  نمایش می‌دهیم، یعنی

$$U(x) = \{y \in X : y \parallel x\}.$$

گوئیم زیرمجموعه  $Y$  از مجموعه مرتب پاره‌ای  $X$  یک مجموعه پایینی در  $X$  است هرگاه به‌ازای هر  $x \in Y$  و  $z \leq x$  داشته باشیم  $z \in Y$ . به‌ازای هر عضو از مجموعه مرتب پاره‌ای  $X$ ، مجموعه

$$O(x) = \{y \in X : y \leq x\}.$$

یک مجموعه پایینی است. همچنین گوئیم زیرمجموعه  $Y$  از مجموعه مرتب پاره‌ای  $X$  یک مجموعه بالایی در  $X$  است هرگاه به‌ازای هر  $x \in Y$  و  $x \leq z$  داشته باشیم  $z \in Y$ . به‌ازای هر عضو از مجموعه مرتب پاره‌ای  $X$ ، مجموعه

$$F(x) = \{y \in X : y \geq x\}.$$

یک مجموعه بالایی است. گوئیم عضو  $x$  از مجموعه مرتب پاره‌ای  $X$  یک عضو تنهاست هرگاه هیچ عضو  $y \in X$  یافت نشود که  $x < y$  یا  $x > y$ . به عبارت دیگر  $x \in X$  یک عضو تنهاست اگر و تنها اگر  $U(x) = X \setminus \{x\}$ . مجموعه تمامی اعضای تنهای  $X$  را با نماد  $Iso(X)$  نمایش می‌دهیم.

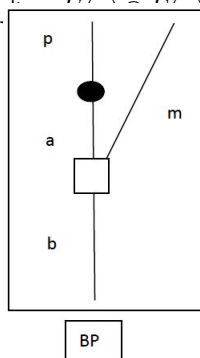
\* ارائه‌دهنده

گوییم زیرمجموعه  $C$  از مجموعه مرتب پاره‌ای  $X$  یک زنجیر است هرگاه هر دو عضو  $C$  قابل مقایسه باشند. رابطه ترتیب  $X$  روی زنجیر  $C \subseteq X$  را یک رابطه ترتیب خطی گوییم. منظور از گسترش خطی  $L$  از مجموعه مرتب پاره‌ای  $X$  یک ترتیب خطی از اعضای  $X$  است که تمامی روابط مذکور در (۱) را حفظ می‌کند. یکی از روش‌های رتبه‌بندی در این نظریه، ساختن تمامی گسترش‌های خطی ممکن و اندازه‌گیری میانگین رتبه‌ای اعضای مجموعه براساس آنها می‌باشد. چالش اصلی این روش برای رتبه‌بندی، ساختن تمامی گسترش‌های خطی ممکن می‌باشد. این مسئله در مواجهه با داده‌های واقعی عملاً منجر به پیچیدگی‌های محاسباتی زیادی می‌شود. یکی از راهکارهای مطرح شده برای حل این مشکل، استفاده از روش‌ها و تکنیک‌های نمونه‌گیری به جای در نظر گرفتن تمامی گسترش‌های خطی است. در بخش‌های بعد، ضمن معرفی و تحلیل برخی از معروف‌ترین مدل‌های مجموعه‌های مرتب پاره‌ای، پیشنهادات و روش‌هایی را جهت رفع مشکل پیچیدگی محاسباتی داده‌های واقعی ارائه می‌کنیم.

## ۲. مدل‌های مرتب پاره‌ای موضعی و شاخه‌ای

محققان در بررسی مجموعه‌های مرتب پاره‌ای مدل‌های مختلفی را ارائه و مطالعه نموده‌اند که از معروف‌ترین آنها مدل مرتب پاره‌ای موضعی ( $LPOM$ ) و مدل مرتب پاره‌ای شاخه‌ای ( $BP$ ) می‌باشند. ایده اصلی در مدل مرتب پاره‌ای موضعی ( $LPOM$ ) به شکل زیر پیاده‌سازی می‌گردد:

- (i) انتخاب یک عضو از جامعه مانند  $x \in X$ .
  - (ii) یافتن یک رابطه ترتیب پاره‌ای که تا جایی که ممکن است روابط مرتبط به  $x$  را ارائه و به اندازه کافی ساده باشد.
  - (iii) ارائه یک فرمول تخمین برای میانگین رتبه  $x$ .
- حالت خاصی از مدل  $LPOM$ ، مدل مرتب پاره‌ای موضعی صفر ( $LPOM^0$ ) می‌باشد که دارای ساختار زنجیر می‌باشد و در آن مجموعه  $U(x)$  یعنی مجموعه عناصر غیرقابل مقایسه با  $x$  تهی می‌باشد. این در حالی است که در مدل  $LPOM_{ext}$  برای هر عضو  $y \in U(x)$  مدل  $LPOM$  روی  $U(y) \cap O(x)$  و  $U(y)$  گرفته می‌شود. در ادامه یکی دیگر از مدل‌های مجموعه‌های مرتب پاره‌ای شاخه‌ای ( $BP$ ) را معرفی و تقریب‌های متناظر با میانگین رتبه‌ای آن را استخراج می‌نماییم.



(شکل ۱)

ساختار مدل شاخه‌ای ( $BP$ ) با استفاده از پارامترهای زیر توصیف می‌شود: (شکل ۱ را ملاحظه نمایید)

- $a$ : تعداد اعضای زنجیر بین  $x$  و نقطه اتصال
- $b$ : تعداد اعضای زیر نقطه اتصال
- $p$ : تعداد اعضای بالای  $x$
- $m$ : تعداد اعضای شاخه کناری متصل به نقطه اتصال

تعداد تمام گسترش‌های خطی در مدل  $BP$  بر حسب پارامترهای ساختاری فوق با فرمول زیر به دست می‌آید: (مرجع [۴] را ملاحظه نمایید)

$$(۲) \quad LT(BP) = \binom{a+p+1+m}{m}.$$

هنگام ساختن گسترش‌های خطی، اعضای مجموعه  $U(x)$  می‌توانند جایگاه‌هایی بین نقطه اتصال و زیر  $x$  یا بالای  $x$  را اختیار کنند. فرض کنیم اعضای  $U(x)$  با  $0, \dots, j, \dots, m$  اندیس‌گذاری شده باشند که اعضای  $0, \dots, j$  می‌توانند جایگاهی زیر  $x$  و اعضای  $j+1, \dots, m$  جایگاهی بالای  $x$  داشته باشند ( $j = 0, \dots, m$ ). به دلیل اینکه اعضای  $U(x)$  خودشان به صورت یک زنجیر هستند، متغیر دیگری برای محاسبه جایگشت‌های ممکن مورد نیاز نیست. اگر برای لحظه‌ای دم و نقطه اتصال را نادیده بگیریم به طوری که اعضای  $U(x)$  در زنجیر ساخته شده از  $a$  و خود  $x$  و اعضای  $p$  ادغام شوند، بر اساس [۴]، فراوانی گسترش‌های خطی با ارتفاع  $j+1+a$  را به صورت

زیر به دست می‌آوریم:

$$(۳) \quad freq(x, h = a + ۱ + j) = \binom{a+j}{j} \cdot \binom{m-j+p}{m-j}.$$

از رابطه (۳) نتیجه می‌گیریم که تعداد کل گسترش‌های خطی نه تنها وابسته به گسترش‌های خطی است که اعضای  $y \in U(x)$  زیر  $x$  می‌سازند، بلکه به اینکه چند جایگاه ممکن است برای  $y$  بالای  $x$  محقق شود نیز بستگی دارد. اگر  $b + ۱$  عضو شامل دم و نقطه اتصال هم در نظر گرفته شوند، رابطه نهایی میانگین ارتفاع به صورت زیر خواهد بود:

$$(۴) \quad hav(exact, x) = \frac{\sum_{j=0}^m \binom{a+j}{j} \cdot \binom{m-j+p}{m-j}}{\binom{m+a+p+1}{m}}$$

که در آن

$$prob(x, h = a + b + j + ۲) = \frac{\binom{a+j}{j} \cdot \binom{m-j+p}{m-j}}{\binom{m+a+p+1}{m}}$$

برابر با احتمال ارتفاع  $a + b + j + ۲$  برای عضو  $x$  می‌باشد. رابطه (۴) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(۵) \quad hav(exact, x) = (a + b + ۲) \sum_{j=0}^m prob(x, h) + \frac{\sum_{j=0}^m \binom{a+j}{j} j \binom{m-j+p}{m-j}}{LT(BP)}.$$

جمله مجموع اول که شامل همه احتمالات است به صورت زیر می‌باشد:

$$(۶) \quad \sum_{j=0}^m \binom{a+j}{j} \cdot \binom{m-j+p}{m-j} = \binom{m+a+p+1}{m}$$

رابطه (۶) در واقع یک تساوی دوجمله‌ای است که در تحلیل میانگین ارتفاع مفید است. در جمله دوم از رابطه (۵) حضور فاکتور  $j$  اجازه ساده‌سازی سریع را نمی‌دهد. با تغییر متغیر  $k = j - ۱$  داریم:

$$B = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(a+k+1)!}{a!k!} \cdot \binom{m-k-1+p}{m-k-1}$$

و در نهایت با استفاده از اتحاد

$$\binom{x}{m-1} = \frac{m}{x-m+1} \cdot \binom{x}{m}$$

متوسط جایگشت‌ها را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$(۷) \quad hav(exact, x) = (a + b + ۲) + m \cdot (a + ۱) / (a + p + ۲).$$

### ۳. جمع‌بندی و پیشنهادات

در این بخش ابتدا رابطه (۷) را با ساده‌ترین تقریب  $LPOM^\circ$  مقایسه کنیم. بنابراین ابتدا  $hav(LPOM^\circ)$  را برحسب پارامترهای ساختاری به دست می‌آوریم:

$$(۸) \quad hav(LPOM^\circ, x) = (a + b + ۲) + m \cdot (a + b + ۲) / (a + b + p + ۳).$$

همانطور که ملاحظه می‌شود به علت اینکه  $b$  یک پارامتر ساختاری است، بین تقریب میانگین رتبه (۸) و فرمول دقیق (۷) اختلاف وجود دارد. درواقع اگر عناصر مجموعه  $U(x)$  به صورت  $Iso$  در نظر گرفته شوند، می‌توانیم هنگام ساختن گسترش‌های خطی، عناصر  $U(x)$  را در هر جایی از زنجیر عناصر قابل مقایسه با  $x$  ادغام کنیم.

حال، رابطه (۷) را با تقریب دقیق‌تر  $LPOMext$  مقایسه می‌کنیم. برای این کار ابتدا  $hav(LPOMext)$  را برحسب پارامترهای ساختاری به دست می‌آوریم:

$$(۹) \quad hav(LPOMext, x) = (a + b + ۲) + m \cdot (a + ۱) / (a + p + ۲).$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود در مدل  $BP$  داریم  $hav(LPOMext) = hav(exact)$ . به‌طور خلاصه، داریم:

$$hav(exact) = hav(LPOMext) \neq hav(LPOM^o).$$

دقت کنیم جمله  $(a + b + 2)$ ، که در هر سه رابطه‌ی (۷) و (۸) و (۹) ظاهر شده است، متشکل از  $a + b$  عضو مجموعه‌ی پایینی  $O(x)$ ، یک نقطه‌ی اتصال و خود عضو  $x$  می‌باشد. همچنین حضور جملات شامل متغیر  $j$  در رابطه (۵) به این دلیل است که  $m$  عضو از مجموعه  $U(x)$  با مقادیر مختلف  $j$  در مجموعه پایینی  $O(x)$  ادغام می‌شوند. در نهایت از بررسی نتایج تحلیلی فوق نتیجه می‌گیریم هرچه پارامتر ساختاری  $b$  بزرگتر باشد انحراف  $hav(LPOM^o)$  از  $hav(exact)$  بیشتر می‌شود.

همان‌طور که در بررسی و تحلیل مدل‌های  $LPOM^o$ ،  $LPOMext$  و  $BP$  ملاحظه شد، یکی از ملزومات اصلی در این مدل‌ها تشکیل تمامی گسترش‌های خطی ممکن می‌باشد. بدیهی‌ست که این مسئله خصوصاً در بررسی داده‌های واقعی بسیار حائز اهمیت می‌شود، زیرا در تحلیل پدیده‌های واقعی تشکیل تمامی گسترش‌های خطی، پیچیدگی محاسباتی زیادی را ایجاد می‌کند. یکی از پیشنهاداتی که برای غلبه بر این پیچیدگی محاسباتی ارائه می‌کنیم استفاده از افزاینده‌ی جامعه می‌باشد. به عبارت دقیق‌تر به منظور ارائه یک رتبه‌بندی برای اعضای جامعه مرتب پاره‌ای (۱)، می‌توانیم جامعه  $X$  را به تعداد  $m$  زیرمجموعه کوچکتر  $k$  عضوی، مانند  $X_1, \dots, X_m$ ، افراز کنیم و میانگین رتبه‌ای اعضای جامعه‌های کوچکتر  $X_i$  را محاسبه کنیم. تکرار این روش به تعدادی نسبتاً بزرگ و قابل قبول و تحلیل مناسب میانگین‌های رتبه‌ای حاصل شده، در مدت زمانی بسیار کمتر منجر به ارائه یک رتبه‌بندی تقریبی برای اعضای جامعه اصلی  $X$  خواهد شد.

### سپاس‌گزاری

نویسندگان مقاله بر خود لازم می‌دانند از پروفسور بروگمن بابت راهنمایی‌ها و در اختیار قرار دادن منابع مفید تشکر و قدردانی کنند.

### مراجع

1. R. Bruggemann and P. Annoni, *Average heights in partially ordered sets*, MATCH Commun. Math. Comput. Chem. 71 (2014), 117–142.
2. R. Bruggemann and G. P. Patil, *Ranking and Prioritization for Multi-indicator Systems*, Springer Science+Business Media, LLC, 2011.
3. R. Bruggemann, U. Simon and S. Mey, *Estimation of averaged ranks by extended local partial order models*, MATCH Commun. Math. Comput. Chem. 54 (2005), 489–518.
4. R. Stanley, *Enumerative Combinatorics*, Wadsworth, Brooks/Cole, Monterey, 1986.

پست الکترونیکی: [sanaz.miranshahi@gmail.com](mailto:sanaz.miranshahi@gmail.com)

پست الکترونیکی: [a\\_sanatpour@khu.ac.ir](mailto:a_sanatpour@khu.ac.ir), [a.sanatpour@gmail.com](mailto:a.sanatpour@gmail.com)

پست الکترونیکی: [panahbehagh@khu.ac.ir](mailto:panahbehagh@khu.ac.ir)

## حل عددی معادله بلک-شولز دو بعدی

سمیه پوراحمدی\* و محمد ایزدی  
بخش ریاضی کاربردی، دانشکده ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران

چکیده. در این پایان نامه، به بررسی و حل عددی مدل معروف بلک-شولز شامل دو دارایی (سهام) در بازارهای مالی می‌پردازیم. روش عددی براساس روش تفاضلات متناهی برای اختیار معامله خرید و فروش اروپایی برای معادله بلک-شولز شامل دو دارایی ارائه می‌شود. واژه‌های کلیدی: معادله بلک-شولز، قراردادهای اختیار معامله خرید و فروش، روش تفاضلات متناهی. طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 65M06, 91G60.

## ۱. مقدمه

در این مقاله معادله بلک-شولز را برای اختیار معامله‌هایی با بیش از یک دارایی مورد بررسی و حل عددی قرار می‌دهیم. ابتدا به بیان معادله و شرایط اولیه و مرزی برای این مسئله می‌پردازیم. سپس به ارائه یک روش عددی صریح براساس روش تفاضل متناهی و پیاده سازی این روش می‌پردازیم. در ادامه با حل معادله دوبعدی بلک-شولز به تجزیه و تحلیل نتایج عددی می‌پردازیم.

## معادله بلک-شولز دو سهامی

اختیار معامله‌ی رنگین کمانی (Rainbow) عبارت است از تمام اختیار معاملاتی که سود و ضرر آنها به بیش از یک دارایی بستگی دارد. هر دارایی متناظر با یک رنگ در نوع اختیار است. اختیار معامله‌ی اروپایی را که سود و ضرر آن به دو قیمت‌های  $S_1$  و  $S_2$  بستگی دارد در نظر بگیرید. فرض کنید  $V(S_1, S_2, t)$  ارزش اختیار معامله باشد. در اینصورت معادله متناظر بلک-شولز پسرو به صورت زیر نوشته می‌شود [۱]:

$$(1) \quad \frac{\partial V}{\partial t}(S_1, S_2, t) + \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2}(S_1, S_2, t) + \frac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2}(S_1, S_2, t) + \rho\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial S_2}(S_1, S_2, t) + rS_1 \frac{\partial V}{\partial S_1}(S_1, S_2, t) + rS_2 \frac{\partial V}{\partial S_2}(S_1, S_2, t) - rV(S_1, S_2, t) = 0,$$

که در این معادله  $\sigma_1$  نوسانات دارایی  $S_1$ ،  $\sigma_2$  نوسانات دارایی  $S_2$ ،  $r$  نرخ بهره و  $\rho$  ضریب همبستگی بین  $S_1$  و  $S_2$  است. جواب معادله فوق را روی نواحی زیر در نظر می‌گیریم:

$$\{(S_1, S_2, t) | S_1 \in [0, \infty), S_2 \in [0, \infty), t \in [0, T]\},$$

و شرط نهایی در زمان  $T$  به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$(2) \quad V(S_1, S_2) := \text{Payoff}(S_1, S_2, T).$$

مثال‌هایی از بازده اختیار معامله رنگین کمانی با دو دارایی شامل موارد زیر است [۱۷]:

- حداکثر اختیار معامله‌ی خرید:  $\text{Payoff}(S_1, S_2) = \max(\max(S_1, S_2) - E, 0)$
- حداکثر اختیار معامله‌ی فروش:  $\text{Payoff}(S_1, S_2) = \max(E - \max(S_1, S_2), 0)$
- حداقل اختیار معامله‌ی خرید:  $\text{Payoff}(S_1, S_2) = \max(\min(S_1, S_2) - E, 0)$
- حداقل اختیار معامله‌ی فروش:  $\text{Payoff}(S_1, S_2) = \max(E - \min(S_1, S_2), 0)$
- بهترین از دو دارایی یا اختیار نقدی:  $\text{Payoff}(S_1, S_2) = \max(S_1, S_2, E)$

\* ارائه‌دهنده

برای جزئیات بیشتر مراجع [۱، ۲، ۳، ۴] را مطالعه کنید.

در ادامه با یک تبدیل مناسب و جانشینی  $C$  بجای  $V$ ، معادله پسرو (۱) به معادله پیشرو بلک-شولز زیر تبدیل می‌شود [۱]:

$$(۳) \quad \frac{\partial C}{\partial t}(S_1, S_2, t) - \frac{1}{4}\sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_1^2}(S_1, S_2, t) - \frac{1}{4}\sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_2^2}(S_1, S_2, t) - \rho\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_1 \partial S_2}(S_1, S_2, t) \\ - rS_1 \frac{\partial C}{\partial S_1}(S_1, S_2, t) - rS_2 \frac{\partial C}{\partial S_2}(S_1, S_2, t) + rC(S_1, S_2, t) = 0.$$

از شرط نهایی (۲) شرط اولیه‌ی  $V(S_1, S_2, 0) = \text{Payoff}(S_1, S_2)$  را داریم. در ادامه بخش، ماکزیمم اختیار معامله‌ی خرید را در نظر می‌گیریم. شرایط اولیه به صورت زیر می‌باشد که همان معادله ماکزیمم اختیار معامله خرید است.

$$(۴) \quad C(S_1, S_2, 0) = \max(\max(S_1, S_2) - E, 0).$$

همچنین شرایط مرزی نیز به صورت زیر هستند:

- اگر  $S_1 = 0$  و  $S_2 = 0$  باشد، آنگاه مقدار اختیار معامله برابر است با:  $C(S_1, S_2, t) = 0$ .
- در صورتی که  $S_1 = 0$  و  $S_2 \neq 0$  باشد، مقدار اختیار معامله فقط به  $S_2$  و  $t$  بستگی دارد. عبارتی داریم:

$$(۵) \quad \frac{\partial C}{\partial t}(S_2, t) - \frac{1}{4}\sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_2^2}(S_2, t) - rS_2 \frac{\partial C}{\partial S_2}(S_2, t) + rC(S_2, t) = 0, \\ C(0, S_2, t) = \max(S_2 - Ee^{-r(T-t)}, 0).$$

معادله‌ی (۵) فرمول معمولی بلک-شولز با یک سهام برای  $S_2$  است.

- در صورتی که  $S_1 \neq 0$  و  $S_2 = 0$  باشد، مقدار اختیار معامله فقط به  $S_1$  و  $t$  بستگی دارد. عبارتی معادله (۳) بصورت زیر است:

$$(۶) \quad \frac{\partial C}{\partial t}(S_1, t) - \frac{1}{4}\sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_1^2}(S_1, t) - rS_1 \frac{\partial C}{\partial S_1}(S_1, t) + rC(S_1, t) = 0, \\ C(S_1, 0, t) = \max(S_1 - Ee^{-r(T-t)}, 0),$$

معادله‌ی (۶) فرمول معمولی بلک-شولز با یک سهام برای  $S_1$  است. همچنین موارد زیر برقرار است [۱، صفحه ۱۸]

- اگر  $S_1 \rightarrow \infty$  و  $S_2 \rightarrow \infty$  میل کند، ارزش اختیار معامله تقریباً برابر  $S_1$  یا  $S_2$  است.
- اگر  $S_1 \rightarrow \infty$  و  $S_2$  متناهی باشد، ارزش اختیار معامله تقریباً برابر  $S_1$  است.
- اگر  $S_1$  متناهی و  $S_2 \rightarrow \infty$  میل کند، ارزش اختیار معامله تقریباً برابر  $S_2$  است.

جواب واقعی معادله‌ی (۳) در شرایط خاص  $(\sigma_2, \sigma_1, r)$  ثابت باشد (بصورت زیر می‌باشد) [۱]:

$$(۷) \quad C(S_1, S_2, t) = S_1 \left[ N(\delta_1) - N_2(-d_1, \delta_1; \rho_1) \right] + S_2 \left[ N(\delta_2) - N_2(-d_2, \delta_2; \rho_2) \right] \\ + Ee^{-r(T-t)} N_2 \left( -d_1 + \sigma_1 \sqrt{T-t}, -d_2 + \sigma_2 \sqrt{T-t}; \rho \right) - E^{-r(T-t)},$$

که در آن  $d_1, d_2, \delta_1, \delta_2, \rho_1, \rho_2$  و  $\sigma$  به صورت زیر هستند:

$$d_{1,2} = \frac{\ln \frac{S_{1,2}}{E} + \frac{\sigma_{1,2}^2}{4}(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}, \quad \delta_{1,2} = \frac{\ln \frac{S_{1,2}}{S_{2,1}} + \frac{\sigma_{1,2}^2}{4}(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}, \quad \rho_{1,2} = \frac{\rho\sigma_{2,1} - \sigma_{1,2}}{\sigma}, \quad \sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2.$$

در اینجا تابع  $N$  تابع توزیع تجمعی برای یک متغیر تصادفی نرمال استاندارد است، در حالیکه تابع  $N_2$  تابع توزیع تجمعی دوبعدی برای دو متغیر تصادفی نرمال استاندارد است.

## ۲. تقریب عددی

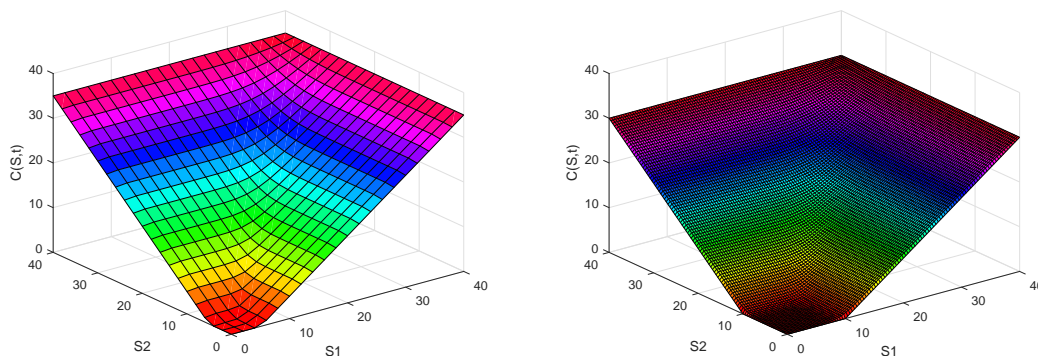
چون در معادله (۳) متغیرهای  $S_1, S_2$  و  $t$  داریم، ناحیه جواب را به صورتی که محور  $S_1$  را به زیربازه‌هایی با طول مساوی  $\Delta S_1$ ، محور  $S_2$  را به زیربازه‌هایی با طول یکسان  $\Delta S_2$  و محور  $t$  را به زیربازه‌هایی با طول مساوی  $\Delta t$  افراز می‌کنیم. به دلیل اینکه نمی‌توانیم این معادله را به صورت عددی برای  $S_1 \in [0, \infty]$  و  $S_2 \in [0, \infty]$  حل کنیم لذا بایستی کران‌های بالای منطقی برای متغیرهای  $S_1$  و  $S_2$  انتخاب کنیم. برای مثال، این کران‌ها می‌تواند چهار برابر قیمت توافقی  $E$  در نظر گرفته شوند. در ادامه کران‌های بالای مورد نظر را با  $S_{max}$  نمایش می‌دهیم. بنابراین فضای  $[0, T] \times [0, S_{max}] \times [0, S_{max}]$  به وسیله‌ی شبکه زیر تقریب زده می‌شود:

$$\{(S_m, S_n, t_k) | (m \Delta S_1, n \Delta S_2, k \Delta t) \in [0, M \Delta S_1] \times [0, N \Delta S_2] \times [0, K \Delta t]\},$$

س. پورا حمدی و م. ایزدی

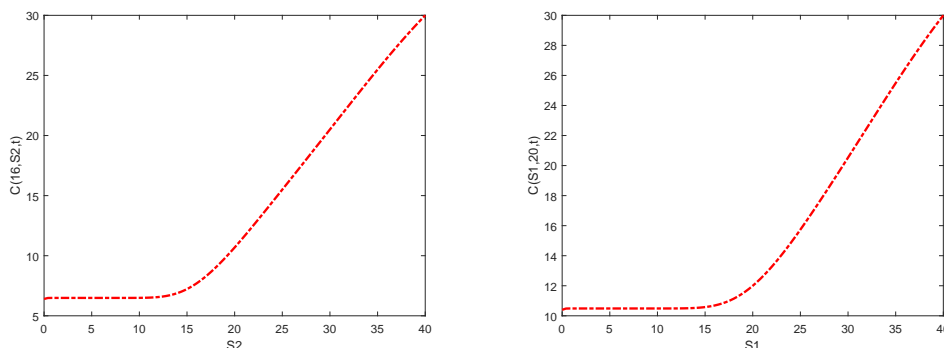


همچنین نمودار دو بعدی حداکثر اختیار معامله خرید با روش صریح به ازای پارامترهای  $E = 5, 10, r = 0.1, \sigma_1, \sigma_2 = 0.2$  در شکل (۱) نمایش داده شده است.



شکل ۱. حداکثر اختیار معامله خرید اروپایی با روش صریح با دو سهام  $S_1$  و  $S_2$  و با پارامترهای  $T = 0.5, S_{max} = 40, r = 0.05, \rho = 0.1, \sigma_1, \sigma_2 = 0.2$  و  $M, N = 100$  به ازای  $E = 5$  (شکل سمت چپ) و  $E = 10$  (شکل سمت راست).

نمودارهای یک بعدی حداکثر اختیار معامله خرید با روش صریح به ازای پارامترهای  $E = 10, r = 0.1, \sigma_1, \sigma_2 = 0.2$  در شکل (۲) رسم شده‌اند. در شکل سمت چپ مقدار  $S_1 = 16$  ثابت در نظر گرفته شده‌است در حالیکه در شکل سمت راست مقدار  $S_2 = 20$  ثابت در نظر گرفته شده‌است.



شکل ۲. حداکثر اختیار معامله خرید اروپایی با روش صریح با دو سهام  $S_1$  و  $S_2$  و با پارامترهای  $T = 0.5, S_{max} = 40, r = 0.05, \rho = 0.1, \sigma_1, \sigma_2 = 0.2$  و  $M, N = 100$  به ازای  $S_1 = 16$  (شکل سمت چپ) و  $S_2 = 20$  (شکل سمت راست).

## مراجع

1. G. Dura, A. Moşneagu, Numerical approximation of Black-Scholes equation, An. Stiint. Univ. Al. I. Cuza Iasi. Mat., 56 (1) (2010) 39-64.
2. H. Johnson, Options on the maximum or the minimum of several assets, J. Financ. Quant. Anal. 22(3) (1987) 277-283.
3. M. Rubinstein, Somewhere over the rainbow. Risk 4, 11 (1991), 61-63.
4. R. Stulz, Options on the minimum or the maximum of two risky assets, analysis and applications, J. Financ. Econ., 10(2) (1982) 161-185.

پست الکترونیکی: [somaye\\_pourahmadi@yahoo.com](mailto:somaye_pourahmadi@yahoo.com)  
پست الکترونیکی: [izadi@uk.ac.ir](mailto:izadi@uk.ac.ir)

## مشخص سازی توزیع های پیوسته از طریق نامساوی هایی شامل مقادیر مورد انتظار توابع انتخاب شده

فرانک گودرزی\*  
بخش آمار، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

چکیده. در این مقاله، ما از طریق  $w(\cdot)$ -تابع تعریف شده در کاکلوس و پاپاتاناسیو [۲] توزیع های نمایی و لجستیک و همچنین توزیع مقدار کرانگین نوع سوم را مشخص سازی و کرانهایی برای مقادیر مورد انتظار توابع انتخاب شده در نظریه قابلیت اعتماد را به دست می آوریم. علاوه بر این، کرانی برای وراثت رویی یک متغیر تصادفی دلخواه ارائه می شود. واژه های کلیدی: مشخص سازی، نرخ خطر، نرخ خطر معکوس، نرخ لگ بخت، تابع گلاسر. طبقه بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 60E15 62E10.

### ۱. پیش گفتار

فرض کنید  $X$  یک متغیر تصادفی دارای تابع توزیع مطلقاً پیوسته  $F(\cdot)$ ، تابع بقای  $\bar{F}(\cdot) = 1 - F(\cdot)$  و تابع چگالی احتمال  $f(\cdot)$  باشد. فرض کنید  $X$  مقادیری در بازه  $(a, b)$  با  $-\infty \leq a < b \leq \infty$  اختیار می کند، که در آن  $a = \inf\{t : F(t) > 0\}$  و  $b = \sup\{t : F(t) < 1\}$ . آنگاه تابع نرخ خطر  $X$  برای  $t < b$  به صورت  $r(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)}$  تعریف می شود. علاوه بر این فرض کنید متغیر تصادفی  $X$  دارای گشتاورهای متناهی از تمامی مراتب با واریانس  $Var(X) = \sigma^2$  و میانگین  $E(X) = \mu$  باشد. یک اندازه قابلیت اعتماد مفید  $X$  میانگین باقیمانده عمر (MRL) است که به صورت امید ریاضی متغیر تصادفی باقیمانده عمر  $X_t = (X - t | X > t)$  داده شده به وسیله

$$e(t) = \frac{1}{\bar{F}(t)} \int_t^\infty \bar{F}(x) dx,$$

تعریف می شود، هنگامی که  $F(x) = 0$  برای  $x < a$ .  $\bar{F}(t)$  و  $r(t)$  به صورت زیر به یکدیگر مرتبط می شوند

$$(1) \quad \bar{F}(t) = \exp \left\{ - \int_a^t r(x) dx \right\}.$$

به عنوان یک مفهوم دوگانه برای باقیمانده عمر، زمان غیر فعال بودن در زمان  $t$ ،  $X(t) = (t - X | X < t)$  است. تابع نرخ خطر معکوس (RHR)  $X$ ، به وسیله  $\tilde{r}(t) = \frac{f(t)}{F(t)}$  برای  $t > a$  داده می شود، که به  $F(t)$  توسط

$$(2) \quad F(t) = \exp \left\{ - \int_a^t \tilde{r}(x) dx \right\}.$$

مرتبط می شود. به علاوه، تابع گلاسر (همچنین به تابع اتا مشهور است)  $\eta(t)$  برای یک متغیر تصادفی  $X$  به صورت زیر تعریف می شود

$$\eta(t) = - \frac{f'(t)}{f(t)}.$$

تابع شدت سالخوردگی (AI)، که خاصیت سالخوردگی یک سیستم را به طور کمی تحلیل می کند (جیانگ و همکاران [۴] را ببینید) به صورت زیر تعریف می شود

$$L(t) = \frac{tr(t)}{\int_a^t r(u) du} = \frac{-tf(t)}{\bar{F}(t) \ln \bar{F}(t)}.$$

تعریف نرخ لگ-بخت (LOR)  $X$  به صورت زیر داده می شود:

$$(3) \quad LOR(t) = \frac{d}{dt} LO(t) = \frac{f(t)}{F(t)\bar{F}(t)},$$

\* ارائه دهنده

که در آن  $LO(t) = \ln \frac{F(t)}{\bar{F}(t)}$  تابع لگ-بخت است.

کاکلوس و پاپاتاناسیو [۲] کران پایینی برای واریانس تابعی از متغیر تصادفی به دست آوردند. آنها ثابت کردند که، اگر  $X$  یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی  $f(x)$ ، میانگین  $\mu$  و واریانس  $\sigma^2$  و  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  هر تابع مطلقاً پیوسته با مشتق  $g'$  باشد، آنگاه

$$(۴) \quad Var[g(X)] \geq \sigma^2 (E[w(X)g'(X)])^2,$$

که در آن  $w(\cdot)$ -تابع به صورت زیر تعریف می شود

$$(۵) \quad \sigma^2 w(x) f(x) = \int_{-\infty}^x (\mu - t) f(t) dt.$$

تساوی برقرار است اگر و تنها اگر  $g$  خطی باشد. در این مقاله، ما حالت های خاصی از توابع  $g$  را در نظر می گیریم که در تحلیل قابلیت اعتماد برای سالخوردگی استفاده می شوند.

## ۲. مشخص سازی توزیعها بر اساس نامساویهای شامل امیدریاضی $w(\cdot)$ -تابع و تابع $\eta$

کاربرد نامساوی کوشی شوارتز، به ما انگیزه ای برای یافتن یک کران پایین ساده تر برای نامساوی (۴)، برای برخی توابع خاص  $g$  ارائه می دهد. در قضایای ۱.۲ و ۳.۲،  $g(x)$  به ترتیب  $\int_x^b \tilde{r}(u) du$  و  $\int_x^b r(u) du$  در نظر گرفته می شوند. اگر  $\tilde{r}(x)$  و  $r(x)$  موجود باشند، آنگاه  $-\ln \bar{F}(x) = \int_x^b r(u) du$  و  $-\ln F(x) = \int_x^b \tilde{r}(u) du$  به ترتیب نرخ خطر (شکست) تجمعی و نرخ خطر معکوس تجمعی نامیده می شوند.

قضیه ۱.۲. فرض کنید  $X$  یک متغیر تصادفی نامنفی باشد آنگاه

$$(۶) \quad E[w(X)r(X)] \geq \frac{1}{E\left[\frac{w(X)}{r(X)}\right]},$$

که در آن  $w(x)$ ،  $w(\cdot)$ -تابع متناظر با متغیر تصادفی  $X$  است. تساوی دست یافتنی است اگر و تنها اگر  $X$  دارای توزیع نمایی باشد. اثبات. با استفاده از نامساوی کوشی شوارتز، داریم

$$(۷) \quad E^2[w(X)] \leq E[w(X)r(X)] E\left[\frac{w(X)}{r(X)}\right].$$

از طرف دیگر، چون  $E[w(X)] = 1$ ، نامساوی (۷)، (۶) را نتیجه می دهد. تساوی در (۶) برقرار است اگر و تنها اگر ثابت  $r(x) = \square$  یا به طور معادل، اگر و تنها اگر  $X$  دارای توزیع نمایی باشد.

نکته ۲.۲. با مراجعه به کاکلوس و پاپاتاناسیو ([۱] و [۲]) می توان مشاهده نمود که، اگر  $X$  دارای توزیع گاما با پارامتر شکلی  $\alpha > 0$  و پارامتر مقیاس  $\beta > 0$  باشد آنگاه  $w(x) = \frac{x}{\alpha\beta}$  و بنابراین قضیه ۱.۲ همان قضیه ۲.۳ در ناندا [۶] است.

قضیه ۳.۲. برای هر متغیر تصادفی مطلقاً پیوسته  $X$ ،

$$(۸) \quad E[w(X)\tilde{r}(X)] \geq \frac{1}{E\left[\frac{w(X)}{\tilde{r}(X)}\right]},$$

که در آن  $w(x)$ ،  $w(\cdot)$ -تابع متناظر با متغیر تصادفی  $X$  است. تساوی برقرار است اگر و تنها اگر  $X$  به صورت توزیع مقدار کرانی نوع سوم تعریف شده روی  $(-\infty, b]$ ؛  $b \geq 0$ ، به صورت

$$(۹) \quad F(x) = \exp\left(\frac{x-b}{b-\mu}\right), \quad x \in (-\infty, b],$$

توزیع شود. همانطور که در معادله (۳.۲) کوندو و گش [۵] داده شد.

اثبات. مانند قضیه ۱.۲، به آسانی بررسی می گردد که نامساوی (۸) برقرار است. تساوی در (۸) برقرار است اگر و تنها اگر  $\tilde{r}(x) = c$  که در آن  $c$  ثابت مثبت است. یا به طور معادل، با استفاده از (۲)، اگر و تنها اگر

$$F(x) = \exp\left\{-\int_x^b c dx\right\} = e^{c(x-b)}$$

حال چون  $F(a) = 0$  لذا  $a = -\infty$ . همچنین با توجه به آنکه

$$\mu = \int_{-\infty}^b ce^{c(x-b)} dx = \left(x - \frac{1}{c}\right) e^{c(x-b)} \Big|_{-\infty}^b = b - \frac{1}{c}$$

□

بنابراین  $\mu = b - \frac{1}{c}$  و نتیجه حاصل می‌گردد.

در قضیه بعد، فرض می‌کنیم  $g(x)$  به کار رفته در نامساوی (۴)،  $LO(x)$  است.

قضیه ۴.۲. فرض کنید  $X$  یک متغیر تصادفی با  $E[w(X)LO(X)] < \infty$  و  $E\left[\frac{w(X)}{LO(X)}\right] < \infty$  باشد، آنگاه

$$(۱۰) \quad E[w(X)LO(X)] \geq \frac{1}{E\left[\frac{w(X)}{LO(X)}\right]}.$$

تساوی برقرار است اگر و تنها اگر  $X$  از توزیع لجستیک پیروی کند.

اثبات. با استفاده از نامساوی کوشی شوارتز و این حقیقت که  $E[w(X)] = 1$ ، اثبات نامساوی (۱۰) بدیهی است. به علاوه تساوی در (۱۰) برقرار است اگر و تنها اگر ثابت  $LO(x)$  یعنی یک ثابت  $c > 0$  موجود باشد به طوری که برای هر  $x$ ،  $\frac{f(x)}{F(x)F(x)} = c$  که معادل با این حقیقت است که

$$\left\{ \frac{1}{F(x)} + \frac{1}{1-F(x)} \right\} dF(x) = c dx \Rightarrow \frac{d}{dx} \left\{ \ln F(x) - \ln(1-F(x)) \right\} = c dx$$

یا به طور معادل

$$\frac{d}{dx} \ln \frac{F(x)}{1-F(x)} = \frac{d}{dx} cx \Rightarrow \frac{F(x)}{1-F(x)} = e^{cx} A_0.$$

که در آن  $A_0$  ثابت انتگرالگیری است. بنابراین، برای  $A_0 = \frac{1}{c}$  و برای هر  $x$ ،

$$\frac{1}{1-F(x)} - 1 = e^{cx} A_0 \Rightarrow F(x) = 1 - \frac{1}{1 + e^{cx} A_0},$$

□

و در خاتمه  $F(x) = \frac{e^{cx}}{K_0 + e^{cx}}$  که همان توزیع لجستیک می‌باشد.

نکته بعد یک کران بالا برای  $E[w(X)LO(X)]$  ارائه می‌دهد.

نکته ۵.۲. در نامساوی (۴) اگر  $g(x) = LO(x)$  آنگاه

$$Var[LO(X)] \geq \sigma^2 (E[w(X)LO(X)])^2.$$

چون  $Var[LO(X)] = E[LO(X)]^2 = \int_0^1 (\ln \frac{u}{1-u})^2 du = \frac{\pi^2}{3}$  بنابراین

$$E[w(X)LO(X)] \leq \frac{\pi}{\sigma\sqrt{3}}.$$

در نکته ذیل ما یک کران بالا برای  $E[w(X)r(X)]$  به دست می‌آوریم.

نکته ۶.۲. اگر در نامساوی (۴)، قرار دهیم  $g(x) = -\ln(\bar{F}(x))$  آنگاه

$$Var[-\ln(\bar{F}(X))] \geq \sigma^2 (E[w(X)r(X)])^2.$$

توجه کنید

$$Var[-\ln \bar{F}(X)] = \int_0^1 (\ln u)^2 du - \left( \int_0^1 \ln u du \right)^2 = 1$$

بنابراین،

$$(۱۱) \quad E[w(X)r(X)] \leq \frac{1}{\sigma}.$$

مثال ۷.۲. اگر  $X$  دارای توزیع بتا با پارامترهای  $a > 0$  و  $b > 0$  باشد، آنگاه کاکلوس و پاپاتاناسیو [۲] نشان داده اند که  $w(x) = \frac{(a+b)(a+b+1)}{ab}x(1-x)$ . حال اگر  $a = b = 2$  که به موجب آن  $w(x) = 5x(1-x)$ ،  $\sigma^2 = 20$ ،  $\bar{F}(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ ،  $2.4 \leq E[w(X)r(X)] \leq 4.472$  به آسانی می توان به دست آورد، و (۶) و (۱۱) با استفاده از (۶) و (۱۱) به آسانی می توان به دست آورد.

قضیه ۸.۲. فرض کنید  $X$  یک متغیر تصادفی مطلقاً پیوسته نامنفی با  $E\left[\frac{w(X)}{\eta(X)}\right] < \infty$  باشد و  $w$  یک تابع هموار باشد، آنگاه اگر برای هر  $x > 0$

$$E\left[\frac{w(X)}{\eta(X)}\right] \geq \frac{1}{E[w'(X)]} \text{ آنگاه } \eta(x) > 0 \text{ (الف)}$$

$$E\left[\frac{w(X)}{\eta(X)}\right] \leq \frac{1}{E[w'(X)]} \text{ آنگاه } \eta(x) < 0 \text{ (ب)}$$

که در آن  $w(x)$ ،  $w(\cdot)$ -تابع متناظر با متغیر تصادفی  $X$  است. تساوی برقرار است اگر و تنها اگر  $X$  دارای توزیع نمایی باشد.

□

اثبات. اثبات مشابه اثبات قضایای قبل است.

نکته ۹.۲. وراثتروپی یک متغیر تصادفی  $X$  به صورت زیر تعریف می شود

$$Var(-\log f(X)) = \int_{\mathbb{R}} f(x)(\log f(x))^2 dx - \left( \int_{\mathbb{R}} f(x) \log f(x) dx \right)^2,$$

که در آن  $\log$  نشان دهنده لگاریتم طبیعی است.

در نامساوی (۴) اگر  $g(x) = -\ln f(x)$  آنگاه یک کران پایین برای وراثتروپی  $X$  به وسیله

$$(12) \quad Var[-\ln f(X)] \geq \sigma^2 E[w'(X)].$$

داده می شود.

مثال ۱۰.۲. فرض کنید  $X$  دارای توزیع بتا با پارامترهای  $a = 2$  و  $b = 1$  باشد. به آسانی می توان نشان داد که  $f$ -لگ-مقعر است و  $\eta(x) = -1/x$  و بنابراین برای هر  $x > 0$ ،  $\eta(x) < 0$ . همانطور که در مثال ۷.۲ ذکر شد چون  $w(x) = 6x(1-x)$ ، بنابراین با استفاده از قضیه ۳.۲ فردلیزی و همکاران [۳] و (۱۲)، چون  $\sigma^2 = \frac{1}{18}$  لذا

$$\frac{2}{9} \leq Var[-\ln f(X)] \leq 1.$$

### ۳. نتیجه گیری

در این مقاله، ما توزیع های نمایی و لجستیک و نیز مقدار کرانگین نوع سوم را با استفاده از  $w(\cdot)$ -تابع تعریف شده توسط کاکلوس و پاپاتاناسیو [۲]، مشخص سازی کردیم. همچنین کرانهایی برای مقادیر مورد انتظار توابع انتخاب شده در نظریه قابلیت اعتماد را، با استفاده از این تابع به دست آوردیم. وانگ [۷] برای هر متغیر تصادفی  $X$  با چگالی لگ مقعر  $f$  ثابت کرد که، وراثتروپی از بالا به عدد یک کراندار است و در حقیقت کران احتمال به  $f$  وابسته نیست، در حالی که ما یک کران پایین برای آن به دست آورده ایم که به چگالی احتمال  $X$  بستگی دارد.

### مراجع

1. T. Cacoullos, V. Papathanasiou, *On upper bounds for the variance of functions of random variables*, Stat. Probab. Lett. 3 (1985), 175-184.
2. T. Cacoullos, V. Papathanasiou, *Characterizations of distributions by variance bounds*, Stat. Probab. Lett. 7 (1989), 351-356.
3. M.Fradelizi, M.Madiman, L.Wang, *Optimal concentration of information content for log-concave densities*. High Dimensional Probability VII (C.Houdré, et al., eds.). Progress in Probability 71, Birkhäuser, Springer, 2016, pp. 45-60.
4. R. Jiang, P. Ji, X.Xiao, *Aging property of unimodal failure rate models*, Reliab. Eng. Syst. Saf. 79 (2003), 113-116.
5. C. Kundu, A. Ghosh, *Inequalities involving expectations of selected functions in reliability theory to characterize distributions*, Commun. Stat., Theory Methods 46 (2017), 8468-8478.
6. A.K. Nanda, *Characterization of distributions through failure rate and mean residual life functions*, Stat. Probab. Lett. 80 (2010), 752-755.
7. L. Wang, *Heat Capacity Bound, Energy Fluctuations and Convexity*, Yale University, Ph.D. Thesis, 2014.

پست الکترونیکی: [f-goodarzi@kashanu.ac.ir](mailto:f-goodarzi@kashanu.ac.ir)





